Übungen zur Physik II (SS 99)

Blatt 8

Aufgabe 8.1 (): Radiale Ladungsdichte

Betrachten Sie die rotationssymmetrische Ladungsdichte $\rho(x, y, z)$ aus Aufgabe 4.2. Um auszurechnen, wie die Ladung als Funktion des Radius verteilt ist, geht man zu Kugelkoordinaten über und rechnet zu jedem Radius das Oberflächenintegral aus:

$$\rho_{\text{radial}}(r) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \rho(r, \vartheta, \varphi)$$

Bei welchem Radius hat die radiale Ladungsverteilung ihr Maximum?

Aufgabe 8.2 (): Orthogonale Funktionen

Gegeben sei eine Menge $\{u_i | i \in I\}$ von komplexwertigen Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$. I ist eine Indexmenge, z.B. $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$. Diese Funktionen heißen *orthogonal*, falls gilt

$$\int_a^b u_n(x) u_m^*(x) dx = 0 \text{ für } m \neq n$$

und *normiert*, falls gilt

$$\int_a^b |u_n(x)|^2 = 1 \text{ für alle } n \text{ .}$$

Man bezeichnet eine Menge von Funktionen als *orthonormiert*, wenn

$$\int_a^b u_n(x) u_m^*(x) dx = \delta_{n,m}$$

gilt.

a) Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktionen $u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} (n \in \mathbb{Z})$ orthonormierte Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ sind.

b) Für $n \in \mathbb{Z}$ seien die Funktionen u_n definiert durch

$$\begin{aligned} u_n(x) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \text{ für } n > 0 \text{ und} \\ u_n(x) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \text{ für } n < 0 \text{ ,} \\ u_0(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die u_n orthonomiert sind.

Aufgabe 8.3 (HA 15): Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Ein Menge orthonormierter Funktionen $\{u_n | n \in I\}$ auf einem Intervall $[a, b]$ heißt *vollständig*, wenn man jede auf diesem Intervall quadratintegrable Funktion nach den u_n entwickeln kann.

$$f(x) = \sum_{n \in I} a_n u_n(x)$$

a) Zeigen Sie, daß man dann die Koeffizienten der Entwicklung durch

$$a_n = \int_a^b f(x) u_n^*(x) dx$$

erhält

b) Berechnen Sie die Entwicklung der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ nach den Funktionensystemen aus Aufgabe 2.

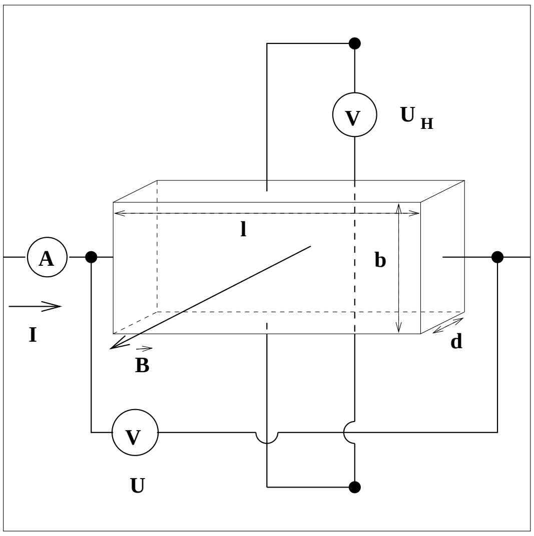
c) Zeichnen Sie die Reihe aus Sinus-/Cosinusfunktionen aufsummiert bis zum 1., 2. und 3. Term.

Bemerkung für die mathematisch interessierten Studierenden: Der Konvergenzbegriff ist in diesem Zusammenhang eigentlich genauer zu untersuchen. Sie werden den geeigneten Begriff „Konvergenz im quadratischen Mittel" aber noch kennenlernen.

Aufgabe 8.4 (HA 15): Stromdurchflossene Platte

In der x-z-Ebene liege eine unendlich ausgedehnte leitende Platte der Dicke L mit einer homogenen konstanten Stromdichte $\vec{j} = j\vec{e}_z$ in z-Richtung. Benutzen Sie Symmetrieargumente für das Magnetfeld um mit Hilfe des Stokeschen Integralsatzes das von der Stromdichte erzeugte Magnetfeld zu berechnen.

Aufgabe 8.5 (): Halleffekt



Durch ein Kupferplättchen der Länge l = 49mm, Breite b = 20mm und Dicke d =10μm fließe bei angelegter Spannung $U = 0,43$V ein Strom von I = 1A. Stellt man das Plättchen in ein Magnetfeld $\vec{B}$ der Stärke B = 1T, senkrecht zur Stromrichtung , so mißt man eine Hallspannung von $U_{\mathrm{H}} = 10^{-5}$V.

Bestimmen Sie die Ladungsträgerkonzentration n, die Beweglichkeit μ und daraus die Leitfähigkeit σ bzw. den spezifischen Widerstand ρ von Kupfer!

Viel Erfolg!

(Physik II im Netz: `http://pauli.uni-muenster.de/~schnetm/physik2.html`)