Übungen zur Physik II (SS 99)

Blatt 5

Abgabe der Hausaufgaben am Mittwoch 12.05.1999 in der Vorlesungspause.

Aufgabe 5.1 (): Der Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten

In Aufgabe 3.5 haben Sie den Nabla-Operator ∇ in Kugelkoordinaten berechnet. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um nun $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ in Kugelkoordinaten zu berechnen. Zeigen Sie, daß

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos(\vartheta)}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

gilt. Zeigen Sie ferner , daß man für die beiden Terme mit Ableitungen nach r auch schreiben kann

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$$

(was die Berechnung von $\Delta\frac{1}{r}$ sehr einfach macht) und für die beiden Terme mit Ableitungen nach ϑ

$$\frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) .$$

Aufgabe 5.2 (): Die zweidimensionale Laplace-Gleichung

Auf einem Kreis vom Radius R sei ein Potential $V(\varphi)$ vorgegeben, für das die Randbedingung $V(\varphi = 0) = 0$ gilt. Suchen Sie ein Potential $\Phi(r,\varphi)$ mit $\Phi(R,\varphi) = V(\varphi)$, das die Laplace-Gleichung erfüllt.

a) Schreiben Sie den Laplace-Operator auf ebene Polarkoordinaten um.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$ allgemein mit Hilfe eines Separationsansatzes in 2 Dimensionen.

c) Bestimmen Sie die freibleibenden Konstanten so, daß $\Phi(R,\varphi) = V(\varphi)$ gilt.

Aufgabe 5.3 (HA 10): Häufige Ableitungen in der Elektrodynamik

Berechen Sie die folgenden Ableitungen, die in der Elektrodynamik häufig vorkommen.

a)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

b)

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$$

c)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

d) Berechnen Sie

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{für } r \neq 0$$

in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten nach Aufgabe 5.1.

Aufgabe 5.4 (HA 20): δ-Distribution

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\delta(x-\frac{\pi}{2})dx \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\delta(x-\frac{\pi}{2})dx$$

b)

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\delta(x+1)dx \text{ und } \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\delta(x+1)dx$$

c) Eine weitere häufig vorkommende Darstellung der δ-Distribution ist die Funktion, die durch

$$\delta_n(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx}dk$$

gegeben ist. Berechnen Sie diese Funktion und machen Sie sich anschaulich klar, warum sie für große $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung der δ-Distribution erfüllt.

Als Anwendung der δ-Distribution für die idealisierte Beschreibung eines physikalischen Prozesses betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das zur Zeit $t = t_0$ einen Anstoß erhält. Wie lautet die Bewegungsgleichung für $x(t)$? Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch zweimaliges Integrieren.

Aufgabe 5.5 (): Dipolmomente von Molekülen

In einem HCl-Molekül soll das Elektron des Wasserstoffatoms ganz auf das Chloratom übergehen und zusammen mit dessen Elektron eine kugelsymmetrische negative Ladung um das Chloratom bilden. Berechnen Sie das elektrische Dipolmoment dieses Modells und vergleichen Sie es mit dem realen Dipolmoment! Wo müßte der Schwerpunkt der Ladungsverteilung in einem realen Molekül liegen? Behandeln Sie das Wasserstoffmolekül auf die gleiche Weise! ($d_{H-Cl} = 0.128nm, Cl : 17e, p_{Cl} = 3.44 \cdot 10^{-30}Cm, d_{H-O} = 0.0958nm, O : 8e, p_{H_2O} = 6.22 \cdot 10^{-30}Cm, \varphi_{H-O-H} = 104.45°$)

Viel Erfolg!

(Physik II im Netz: `http://pauli.uni-muenster.de/~schnetm/physik2.html`)