Übungen zur Physik II (SS 99)

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (): Elektrostatische Energien

Man berechne die Energie W, die erforderlich ist, um eine Ladung q in Form von einzelnen Elektronen e_0 von einer Elektrode eines Kondensators zur anderen zu bringen.

a) Man gebe die Potentialdifferenz nach der Übertragung des ersten Elektrons und der Übertragung des zweiten, dritten etc. Elektrons an.

b) Wie klein muß der Radius eines Kugelkondensators (freistehende Vollkugel) gewählt werden, damit die thermische Energie (bei Zimmertemperatur: ca. $30meV$) etwa zehnmal kleiner ist als die elektrostatische Energie des Kugelkondensators, so daß die Wahrscheinlichkeit, die gespeicherten Elektronen durch thermische Prozesse zu verlieren, klein wird.

c) Man berechne die Größenordnung der Kapazität eines derartigen Einzelelektronenspeichers, der bei Raumtemperatur funktionieren kann.

Aufgabe 3.2 (): Weitere Eigenschaften der δ-Distribution

Zeigen Sie mit Hilfe der Darstellung der δ-Distribution aus Aufgabe 2.3:

a)

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

b)

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a) + \delta(x+a))$$

Begründen Sie nun, warum für die δ-Distribution, eine stetig differenzierbare Funktion f, die nur einfache Nullstellen hat, und eine stetige Funktion g die folgende Gleichung gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(f(x))g(x) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-x_i)g(x) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}g(x_i)$$

Die x_i sind dabei die Nullstellen der Funktion f. Einfache Nullstelle heißt, daß jeweils $f'(x_i) \neq 0$ gilt. Begründen Sie ferner, warum

$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a) \text{ und } x\delta(x) = 0$$

gilt und warum ist es nicht sinnvoll ist, δ-Distributionen mit gleichen Argumenten zu multiplizieren.

Aufgabe 3.3 (): Eindeutigkeitssatz für Vektorfelder

„Ein Vektorfeld $\vec{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das im Unendlichen mindestens wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet, ist eindeutig festgelegt, wenn die beiden Felder $\operatorname{div}\vec{a}$ und $\operatorname{rot}\vec{a}$ bekannt sind.“ Beweisen Sie diesen Satz, indem Sie annehmen, es gebe zwei Vektorfelder $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, deren Divergenzen und Rotationen gleich sind.

a) Was folgt dann für die Divergenz bzw. die Rotation des Differenzenvektorfeldes $\vec{d} := \vec{a}_1 - \vec{a}_2$? Folgern Sie daraus, daß man $\vec{d}$ als eine Ableitung eines anderen Feldes schreiben kann. Welche Gleichung gilt für dieses Feld?

b) Was können Sie mit dem, was sie in der Vorlesung gelernt haben, nun über dieses Feld aussagen? Was gilt demnach für $\vec{d}$ und damit für $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$?

Aufgabe 3.4 (HA 10): Die Stärke der elektrostatischen Kraft

a) Ein Elektron umkreist ein Proton im Abstand von $0.5 \cdot 10^{-10} m$. Berechnen Sie die Stärke der elektrostatischen und der gravitativen Anziehungskraft zwischen den beiden Teilchen und bilden Sie dann das Verhältnis der beiden Kräfte.

b) Wie groß müßte eine Ladung q auf der Sonne und $-q$ auf der Erde sein, um eine elektrostatische Anziehungskraft genauso groß wie die gravitative Anziehungskraft hervorzurufen.

($e_0 = 1,6021 \cdot 10^{-19} C$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} CV^{-1}m^{-1}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} kg, m_P = 1.67 \cdot 10^{-27} kg, m_{\text{Erde}} = 5.98 \cdot 10^{24} kg, m_{\text{Sonne}} = 1.98 \cdot 10^{30} kg, \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$, Abstand Erde-Sonne $1.50 \cdot 10^{11} m$)

Aufgabe 3.5 (): ∇ in Kugelkoordinaten

Der ∇-Operator ist definiert als

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Bei kugelsymmetrischen Problemen ist es nützlich, ∇ in Kugelkoordinaten zu schreiben. Machen Sie sich klar, daß man in Kugelkoordinaten

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

hat. Sie können entweder die Definitionen benutzen und dies direkt ausrechnen, was allerdings etwas Aufwand (Kettenregel!) erfordert, oder sich anhand der anschaulichen Bedeutung klar machen, wie ∇ in Kugelkoordinaten wirkt.

Aufgabe 3.6 (HA 25): Ladung vor geerdeter Kugel

Eine Punktladung der Ladung q befinde sich außerhalb einer geerdeten Kugel mit Radius a. Der Abstand vom Kugelmittelpunkt sei $\vec{d}$.

a) Mit Hilfe der Bildladungsmethode berechne man das Potential außerhalb der Kugel. Ersetzen Sie dafür die induzierte Ladungsdichte auf der Kugeloberfläche durch eine Punktladung q' am Ort $\vec{d'}$ innerhalb der Kugel. Zeigen Sie, daß das Potential die folgende Form hat:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\vartheta}} - \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{d^2} - 2r\frac{a^2}{d}\cos\vartheta}} \right)$$

b) Berechnen Sie Feldstärke und zeigen Sie, daß die induzierte Ladungsdichte auf der Oberfläche der Kugel wie folgt aussieht:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{q(a^2 - d^2)}{a} \frac{1}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\vartheta)^{3/2}}$$

c) Wie groß ist die gesamte induzierte Ladung?

d) Berechnen Sie die Kraft zwischen Punktladung und Kugel.

e) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Äquipotentialflächen.

Viel Erfolg!

(Physik II im Netz: `http://pauli.uni-muenster.de/~schnetm/physik2.html`)