Übungen zur Physik II (SS 99)

Blatt 1

Aufgabe 1.1 (): Wiederholung Gradient, Divergenz und Rotation

Den Nabla-Operator definiert man als

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

Gelegentlich wird auch $\vec{\nabla}$ geschrieben.

a) Gegeben sei das skalare Feld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}r^2$. Berechnen Sie den *Gradienten* $\operatorname{grad} V = \nabla V$!

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{r}$. Berechnen Sie die *Divergenz* $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$ und die *Rotation* $\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$!

c) Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A}$ und das skalare Feld V, wobei Sie sich auf 2 Dimensionen bzw. eine Dimension beschränken können! Zeichnen Sie einige Linien, auf denen V den gleichen Wert hat (ist V ein Potential, so spricht man von Äquipotentiallinien), in das Bild von $\vec{A}$ ein!

d) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{B}(\vec{r}) = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$. Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{B}$ und $\operatorname{rot} \vec{B}$ und zeichnen Sie $\vec{B}$!

Aufgabe 1.2 (): Weitergehende Übungen zu Divergenz und Rotation

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der folgenden Vektorfelder:

a)

$$\vec{a}_1(\vec{r}) = a(r)\vec{e}_r$$

b)

$$\vec{a}_2(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{r} \ \text{ mit } \vec{c} = \text{const.}$$

c)

$$\vec{a}_3(\vec{r}) = \frac{\alpha}{y^2 + z^2 + \beta^2}\vec{e}_x \ \text{ mit } \alpha, \beta > 0$$

Skizzieren Sie $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$!

Aufgabe 1.3 (): Graphische Darstellung elektrostatischer Felder

Eine Punktladung mit der elektrischen Ladung q hat das elektrostatische Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} .$$

Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ und skizzieren Sie φ und $\vec{E}$! Betrachten Sie eine Punktladung q_1 im Urspung und eine Punktladung auf der positiven x-Achse mit der Ladung q_2. Zeichnen Sie qualitativ die Summe der beiden Einzelfelder für $q_1 = q_2$, $q_1 = -q_2$ und für $q_1 = 4q_2$!

Aufgabe 1.4 (): Das Feld einer elektrisch geladenen Kugel

Im ersten Semester haben Sie in der Vorlesung das Gravitationspotential einer sphärischen Massenverteilung berechnet. Wiederholen Sie diese Berechnung und die Verwendung von Kugelkoordinaten. Berechnen Sie dann analog das elektrische Potential einer homogenen sphärischen Ladungsverteilung innerhalb und außerhalb der Kugel. Die Gesamtladung betrage Q und die Kugel habe den Radius R. Das Potential einer Punktladung q ist wie in Aufgabe 1.3

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \; .$$

Berechnen Sie dann aus dem erhaltenen Potential das elektrische Feld!

Aufgabe 1.5 (): Produktregeln der Vektoranalysis

Bestätigen Sie die folgenden Produktregeln der Vektoranalysis:

a)

$$\nabla \times (\alpha\vec{a}) = \nabla\alpha \times \vec{a} + \alpha\nabla \times \vec{a}$$

b)

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \check{\nabla}(\check{\vec{a}}\cdot\vec{b}) + \check{\nabla}(\vec{a}\cdot\check{\vec{b}}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b})$$

c)

$$\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \check{\nabla}\cdot(\check{\vec{a}}\times\vec{b}) + \check{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\check{\vec{b}}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$$

Bei den letzten beiden Aufgaben wirkt der Nabla-Operator auf der rechten Seite in jedem Term nur auf den mit „ˇ“ bezeichneten Faktor.

Aufgabe 1.6 (): Mehrfache Ableitungen mit ∇

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Beide sollen jeweils zweimal stetig partiell differenzierbar sein. Zeigen Sie:

a)

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0$$

b)

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$$

c)

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(=: \Delta f)$$

d)

$$\mathrm{div}\,(\vec{A}f) = (\mathrm{div}\,\vec{A})f + \vec{A}\cdot\mathrm{grad}\, f$$

e)

$$\mathrm{rot}\,(\vec{A}f) = (\mathrm{rot}\,\vec{A})f - \vec{A}\times\mathrm{grad}\, f$$

Viel Erfolg!