Übungen zur Physik I (WS 98/99)

Blatt 9

Aufgabe 9.1 (): Gravitationskollaps

Da die Gravitationskraft anziehend ist, müssen ausgedehnte Himmelskörper durch andere Mechanismen stabilisiert werden. Bei Sternen, die gasförmig sind, hält der Druck im Inneren normalerweise den Gleichgewichtszustand aufrecht. Was passiert aber, wenn der stabilisierende Mechanismus eines Himmelskörpers wegfällt, etwa bei einem Stern die Kern-Fusion (Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium) aussetzt?

Betrachten Sie eine kugelförmige Massenverteilung. Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen an der Oberfläche der kollabierenden Masse lautet

$$m\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{MG}{R^2}m \quad . \tag{1}$$

Dabei ist $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 = \text{const.}$ die als kugelförmig angenommene Gesamtmasse, m die Masse des betrachteten Teilchens und $R = R(t)$ der Radius der Gesamtmasse. $R_0 := R(t = 0)$ sei der Radius vor Beginn der Kollaps-Phase

a) Leiten Sie aus Gleichung (1) die Energiebilanz für die vorliegende Situation her, indem Sie mit $\frac{dR}{dt}$ multiplizieren!

b) Der Energiesatz ist eine Differentialgleichung für $R(t)$. Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Integration! (ggf. mit Integraltafel oder Mathematikprogramm)

c) Bestimmen Sie jetzt die Kollapszeit t_K aus der Bedingung $R(t_K) = 0$. Hängt die Kollapszeit vom Radius des betrachteten Objektes ab?

d) Für die Milchstraße ist $M \approx 10^{11}M_\odot \approx 10^{41}kg, R \approx 3\cdot 10^{20}m$. Wie groß ist ρ? Wie groß ist also die Kollapszeit der Milchstraße?

e) Angenommen, bei einem Stern versiegt die Energiequelle schlagartig auf eine solche Weise, daß auch Temperatur und Druck schlagartig auf Null fallen. Die Dichte der Sonne ist etwa $\rho \approx 10^3\,\frac{\text{kg}}{m^3}$. Berechnen Sie die Kollapszeit!

Aufgabe 9.2 (): Wasseroberfläche

Ein Eimer sei mit Wasser gefüllt und rotiere um seine Symmetrieachse. Berechnen Sie die Form der Wasseroberfläche!

Aufgabe 9.3 (): Matrizen, Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen und entscheiden Sie jeweils, ob die Matrix eine Drehung, Spiegelung oder Inversion darstellt!

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 9.4 (): Wegintegrale

Auf einen Massenpunkt, der sich in der x-y-Ebene bewegt, wirkt eine Kraft $\vec{F}(x,y)$.

1) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} a_1 x \\ a_2 y \end{pmatrix}$

2) $\vec{F}(x,y) = \frac{a}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3) $\vec{F}(x,y) = a \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Berechnen Sie jeweils die Arbeit, die geleistet wird, wenn sich der Massenpunkt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ längs der Wege

i) Achsenparalleler Weg über $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii) Gerade

iii) Segment des Einheitskreises

iv) Parabelstück

bewegt. Um nicht alle 12 Kombinationen berechnen zu müssen, überlegen Sie sich am besten (unter Beachtung von 7.1) zunächst, welche der Kräfte ein Potential haben.

Viel Erfolg und fröhliche Weihnachten!