Übungen zur Physik I (WS 98/99)

Blatt 8

Aufgabe 8.1 (): Kegelschnitte

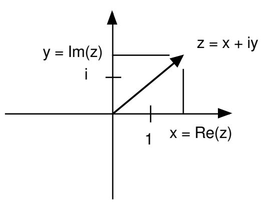
Untersuchen Sie die verschiedenen Definitionen der Kegelschnitte. (Skizze)

a) Eine Ellipse ist definiert als die Menge von Punkten, deren Summe der Entfernungen zu den beiden Brennpunkten gleich ist. („Fadenkonstruktion“, $r + r' = 2a$) Zeigen Sie, daß diese Definition der Ellipse äquivalent zu $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ in kartesischen Koordinaten bzw. zu $r(1 + \epsilon \cos\varphi) = \frac{b^2}{a}$ in Polarkoordinaten ist. ($\epsilon = \frac{|\vec{e}|}{a} < 1$, b wie in der Skizze)

b) Eine Hyperbel ist definiert als die Menge von Punkten, deren Differenz der Entfernungen zu den beiden Brennpunkten gleich ist. ($r - r' = \pm 2a$ für den rechten bzw. den linken Ast) Zeigen Sie wie in a), daß dies äquivalent zu $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ bzw. $r(1 \mp \epsilon \cos\varphi) = \pm\frac{b^2}{a}$ ist. ($b^2 = e^2 - a^2$, e ist der Abstand eines Brennpunktes vom Ursprung, $\epsilon = \frac{e}{a}$)

c) Eine Parabel ist definiert als die Menge aller Punkte, deren Abstand von einem Punkt (dem Brennpunkt) gleich dem Abstand von einer Leitlinie ist. Zeigen Sie, daß dies in kartesischen Koordinaten äquivalent zu $y^2 = -2px$ und in Polarkoordinaten zu $r(1 + \cos\varphi) = p$ ist (p ist der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie).

Aufgabe 8.2 (HA): Komplexe Zahlen



Wie in Aufgabe 7.3 beschrieben, kann man sich die komplexen Zahlen als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum vorstellen, der die Normalbasis $\{1, i\}$ hat.

a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl und $|z|$ der Abstand vom Ursprung in der komplexen Zahlenebene. Zeigen Sie $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$! Man kann also jede komplexe Zahl $z \neq 0$ als $z = |z|\frac{z}{|z|}$ schreiben, mit $|z| \in \mathbb{R}$ und $|\frac{z}{|z|}| = 1$ („Polardarstellung“).

b) Welche geometrische Form hat die Menge $\{z : |z| = 1\}$ in der komplexen Zahlenebene? Warum kann man also jede Zahl aus der Menge $\{z : |z| = 1\}$ als $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) schreiben?

c) Berechnen Sie das Produkt zweier Zahlen $z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$, $z_1 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$ aus dieser Menge, indem sie die Additionstheoreme ausnutzen! Was bedeutet es in der Zahlenebene geometrisch, mit einem Element aus der Menge zu multiplizieren?

d) Die Exponentialfunktion ist gegeben durch

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ .$$

Diese Definition kann man auf komplexe Zahlen erweitern. Es gilt aufgrund der Funktionalgleichung $e^{x+iy} = e^x e^{iy}, x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch umsortieren der Reihe unter Beachtung von $i^2 = -1$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \ !$$

Welchen Wert hat $e^{2\pi i}$? Berechnen Sie das Produkt aus Aufgabe c noch einmal mit Hilfe dieser Formel und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion!

Aufgabe 8.3 (HA): Streuung von Protonen an schweren Atomkernen

Die Bahn eines Protons (Masse m_p, Ladung e) im Coulomb-Potential $U(r) = \frac{Ze}{r}$ eines schweren (ruhenden) Atomkernes ist eine Hyperbel mit dem Atomkern in einer der Brennpunkte. Der „Stoßparameter“ b ist der Abstand, in dem das Proton am Kern vorbeifliegen würde, wenn die Coulomb-Kraft „abgeschaltet“ wäre.

a) Wie groß ist die reduzierte Masse μ für das Proton-Kern-System für <u>sehr schwere</u> Kerne?

b) Beweisen Sie, daß bei einem solchen Stoß der Drehimpuls erhalten bleibt!

c) Formulieren Sie die Energie- und die Drehimpulsbilanz für die Anfangssituation, in der das Proton aus <u>sehr großer</u> Entfernung mit Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ startet und für die Situation minimalen Abstandes $r = s$! Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Protons vom Kern in Abhängigkeit von Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Stoßparameter b!

Aufgabe 8.4 (): Fehlerfortpflanzung

Die Fehlerfortpflanzung bei einer Funktion unabhängiger Größen ist laut Gauß gegeben durch

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2}$$

1) Zeigen Sie, daß für zwei unabhängige Größen $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ folgende einfachen Rechenregeln gelten: a) $\Delta(x+y) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, b) $\frac{\Delta(x\cdot y)}{x\cdot y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$, c) $\frac{\Delta(x^n)}{x^n} = \left|n \cdot \frac{\Delta x}{x}\right|$, d) $\Delta f(x_1, x_2, \dots) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2} \leq \sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|$ (Größtfehlerabschätzung).

2) Geben Sie die Fehlerfortpflanzungen an für a) $y(t, v, \varphi, h) = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin(\varphi)t + h$ (Aufgabe 1.1), b) $t(v_1, g, a) = \frac{v_1(g+a)}{g(g-a)}$ (Aufgabe 2.4), c) $x(r, \varphi) = r(\varphi - \sin(\varphi))$ (Aufgabe 3.1), d) $x(\omega, g, t, \alpha) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos(\alpha)$ (Aufgabe 5.1) und e) $\alpha(\omega, a, s, g) = \frac{\omega^2 a}{g - \omega^2 s}$ (Aufgabe 5.4).

Viel Erfolg!