Übungen zur Physik I (WS 98/99)

Blatt 7

Aufgabe 7.1 (HA): Partielle Ableitungen, Gradient und Wegintegrale

Es sei $r := |\vec{r}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$.

a) Berechnen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} r \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \text{ und für eine beliebige reellwertige Funktion } f: \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f(r)\ !$$

b) Was ist also grad r, grad$\frac{1}{r}$ bzw. grad $f(r)$?

c) Die Funktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $V(\vec{r}) := -(x_1 x_2 + x_1 x_3^2)$. Berechnen Sie $\vec{F} := -\text{grad } V$! Wie groß ist die Arbeit, die man in diesem Feld für eine Verschiebung von

$$\vec{r}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ nach } \vec{r}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

leisten muß? Berechnen Sie dazu das Wegintegral

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

für zwei verschiedene Wege $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}_1$. $\vec{\gamma}_1$ sei dabei der Polygonzug $\vec{r}_0 \to (3, -2, 1) \to (3, 1, 1) \to \vec{r}_1$, $\vec{\gamma}_2$ die Gerade von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}_1$ (vgl. ggf. Großmann, *2.1.2 Parameterdarstellung von Raumkurven*). Berechnen Sie zum Schluß $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_0)$!

Aufgabe 7.2 (): Mathematisches Pendel

Bei einem idealisierten Pendel ist eine Masse m am Ende eines masselosen Stabes der Länge l befestigt. Das andere Ende des Stabes ist in einem Punkt so aufgehängt, daß sich der Stab um eine Achse senkrecht zum Schwerefeld frei drehen kann.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Auslenkungswinkel φ des Stabes aus der Senkrechten auf!
Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus §3 *Kreisbewegung*.

b) Berechnen Sie die potentielle Energie V als Funktion des Winkels φ! Normieren Sie V durch $V(0) = 0$.

c) Bestimmen Sie aus dem Energiesatz die kinetische Energie T als Funktion von φ für die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $v(0) = v_0$.

Aufgabe 7.3 (): Komplexe Zahlen

Innerhalb der reellen Zahlen hat die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung. Man versucht daher, eine Erweiterung der reellen Zahlen zu finden, bei der diese Gleichung Lösungen hat. Wenn ein Element i eine Lösung dieser Gleichung ist, so gilt $i^2 = -1$. Man definiert sich mit dieser Lösung der Gleichung nun die *komplexen* Zahlen als 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den Basisvektoren 1 und i, was die mathematische Sprechweise dafür ist, daß man jede komplexe Zahl als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben kann.

a) Wenn i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ ist, welche andere Lösung gibt es?

b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ für $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, indem Sie die Multiplikationsregeln der reellen Zahlen übernehmen unter Beachtung von $i^2 = -1$!

c) Für $z = x + iy$ definiert man die zu z *komplex konjugierte* Zahl $\bar{z} := x - iy$. Berechnen Sie $z \cdot \bar{z}$ und speziell $i \cdot \bar{i}$!

d) Für $z \neq 0$ berechnen Sie $\frac{1}{z}$, indem Sie mit $\bar{z}$ erweitern!

e) Berechnen Sie $\mathrm{Re}(z) := \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) := \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$!

f) Was ist an der folgenden Aussage falsch?

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Frei nach Feynman (The Feynman Lectures on Physics I, 22-8): Vielleicht sagen Sie jetzt: „Das kann ja immer so weiter gehen! Vielleicht kommt jemand und möchte eine Lösung zu $x^6 + 3x^2 = -2$ haben und wir müssen schon wieder die Zahlen erweitern.“ Aber das ist nicht so! Mit dieser einen Erweiterung der reellen Zahlen kann man alle algebraischen Gleichungen lösen. Der Beweis ist aber nicht einfach und man kann ihn z.B. in den Vorlesungen über Algebra oder Funktionentheorie lernen.

Aufgabe 7.4 (): Energiebilanz beim freien Fall mit Reibung

In Aufgabe 6.1 haben Sie den freien Fall mit Reibung behandelt. Verwenden Sie die Lösung, die Sie dort gefunden haben, um die Energiebilanz zu untersuchen.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V als Funktion der Zeit!

b) Berechnen Sie $T+V$! Ist die Gesamtenergie konstant, also unabhängig von der Zeit? Was gilt im stationären Fall, d.h. wenn die Masse ihre Endgeschwindigkeit hat? Interpretieren Sie das Resultat!

Aufgabe 7.5 (HA): Lineare Regression, Ausgleichsgerade

Eine Spule zeigt bei ihrem Ausschalten eine exponentielle Abhängigkeit der Stromstärke von der Zeit

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \; .$$

Es wurden folgende Werte für den Strom gemessen:

$t[s]$	$0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$	$3,5$	$4,0$	$4,5$	$5,0$
$I[A]$	$0,5940$	$0,3946$	$0,2092$	$0,1422$	$0,0771$	$0,1280$	$0,0380$	$0,0101$	$0,0381$	$0,0042$

a) Tragen Sie die Meßwerte in ein Diagramm ein!

b) Die Meßwerte I_i streuen um die wahren Werte $I(t_i)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Ausgleichsgerade aus den logarithmischen Meßwerten $\ln(I)$. Welche Bedeutung hat die Steigung der Geraden, welche Bedeutung hat der y-Achsenabschnitt? Welche Werte ergeben sich für I_0 und τ?

Viel Erfolg!