Übungen zur Physik I (WS 98/99)

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (HA): Rechenregeln für Ableitungen

Zeigen Sie:

a)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)\right) = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t)$$

b)

$$\vec{x}(t) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = |\vec{x}(t)| \frac{d}{dt} |\vec{x}(t)|$$

mit $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}$.

Aufgabe 4.2 (): Matrixprodukte

In der Vorlesung haben Sie am Beispiel von Drehmatrizen das *Matrixprodukt* kennengelernt. Eine $(n \times m)$-Matrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

kann mit einer $(m \times l)$-Matrix $B = (b_{ij})$ multipliziert werden, $C = AB$, indem man definiert

$$(AB)_{ij} = c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \ .$$

C ist dann eine $(n \times l)$-Matrix.

a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} !$$

Vergleichen Sie dies mit dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Zu einer $(n \times m)$-Matrix $A = (a_{ij})$ hat man eine *transponierte* Matrix $A^T = (\hat{a}_{ij})$ mit $\hat{a}_{ij} = a_{ji}$. A^T ist eine $(m \times n)$-Matrix. Stellen Sie damit das Skalarprodukt als Matrixprodukt dar!

Aufgabe 4.3 (): Drehungen

Betrachten Sie Drehungen um die y-Achse.

a) Durch welche Matrizen werden Drehungen um die y-Achse beschrieben?

b) Betrachten Sie die Menge aller Matrizen, die Drehungen um die y-Achse beschreiben. Da man zwei Drehungen hintereinander um einen Winkel φ_1 und einen Winkel φ_2 ausführen kann und dies anschaulich *einer* Drehung um den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ entspricht, sollte man diese Eigenschaft auch in dieser Menge wieder finden. Welche Operation entspricht der Hintereinanderausführung zweier Drehungen bei Drehmatrizen? Überprüfen Sie dann diese Eigenschaft!

c) Dreht man um die y-Achse zuerst um einen Winkel φ und dann um einen Winkel $-\varphi$, so erhält man die ursprüngliche Situation zurück. Welche Matrizen beschreiben die beiden Drehungen und welche Matrix läßt jeden Vektor invariant? Berechnen Sie das Produkt der beiden Drehmatrizen. Die Matrix, die alle Vektoren invariant läßt, heißt Einheitsmatrix und wird mit E oder mit $\mathbb{I}$ bezeichnet.

d) Allgemein heißt eine Menge G eine *Gruppe*, wenn es eine Verknüpfung $(A_1, A_2) \mapsto A_1 A_2 \in G$ beliebiger zwei Elemente aus G für die gilt:

- **i)** $A_1(A_2 A_3) = (A_1 A_2) A_3$, d.h. die Verknüpfung ist *assoziativ*.
- **ii)** Es gibt ein *neutrales Element* $\mathbb{I}$ aus G, für das $\mathbb{I}A = A\mathbb{I} = A$ für alle $A \in G$ gilt.
- **iii)** Für jedes $A \in G$ gibt es ein Element $A^{-1} \in G$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$.

Also ist die obige Menge der Drehmatrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe. Vergleichen Sie diese Gruppe mit dem bei der Vektor-Addition eingeführten Gruppenbegriff.

Viel Erfolg!