Übungen zur Physik I (WS 98/99)

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (HA): Kurven in $\mathbb{R}^2$

Die Bogenlänge einer Kurve berechnet man durch Aufintegration des Betrages des Geschwindigkeitsvektors entlang der Kurve:

$$L = \int_0^{2\pi} v(t)dt = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{r}}(t)|dt$$

Machen Sie sich diese Formel klar! Berechnen Sie dann die Bogenlänge der Kurve mit der Parameterdarstellung $x(t) = \cos(t)$ und $y(t) = \sin(t)$ mit ($t \in [0, 2\pi[$) als Aufwärmübung für die Berechnung der Bogenlänge der *Zykloide*.

Eine *Zykloide* ist die Kurve, die von einem festen Punkt auf einem Kreis beschrieben wird, der auf einer Geraden abrollt.

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Zykloide!

b) Zeichnen Sie den Graph der Zykloide und berechnen Sie die Bogenlänge eines Zykloidenbogens!

Aufgabe 3.2 (): Schwarzsche Ungleichung

Für Skalarprodukte gilt die *Schwarzsche Ungleichung*

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab \; .$$

a) Machen Sie sich die Gültigkeit dieser Ungleichung anhand der Definition des Skalarproduktes für Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ klar! Für dieses spezielle Skalarprodukt gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi \; .$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

b) Leiten Sie die Ungleichung aus den Axiomen für ein Skalarprodukt her!
Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Ungleichung für den Fall, daß einer der Vektoren der Nullvektor ist. Dann können sie o.B.d.A. annehmen, daß sowohl $\vec{a}$ als auch $\vec{b}$ ungleich 0 sind. Zerlegen Sie $\vec{b}$ in einen Teil parallel zu $\vec{a}$ und einen Teil orthogonal dazu.

Aufgabe 3.3 (): Skalarprodukte, Vektorprodukte

a) Betrachen Sie die folgenden Mengen von Vektoren $\vec{r}$. Welche geometrische Form beschreiben die Mengen

i) $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | \; \vec{r} \cdot \vec{r} = b\}$,

ii) $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | \; \vec{r} \cdot \vec{a} = k\}$,

iii) $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | \; \vec{r} \times \vec{a} = \vec{c}\}$

für feste $\vec{a}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3, b, k \in \mathbb{R}$?

b) Beweisen Sie

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})\ !$$

c) Berechen Sie das Vektorprodukt $\vec{a}_i \times \vec{b}_i$ für die folgenden Paare von Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}\ ,\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ a_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ ,\ b_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{pmatrix}\ !$$

Aufgabe 3.4 (HA): Vektoralgebra

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ aus $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektoralgebra:

a) Wenn der Betrag der Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich dem Betrag der Differenz von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, dann stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander.

b) Wenn die Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht auf der Differenz von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, dann ist der Betrag von $\vec{a}$ gleich dem Betrag von $\vec{b}$.

Viel Erfolg!