Übungen zur Physik I (WS 98/99)

Blatt 12

Aufgabe 12.1 (): Entwicklung einer rotierenden Gaswolke

Eine nicht rotierende Gaswolke zieht sich unter Einfluß der Gravitation rein radial zusammen (vgl. Aufgabe 9.1). Rotiert die ursprünglich sphärische homogene Wolke mit Drehimpuls $\vec{L} = I\vec{\omega}$, so entwickelt sich eine Galaxie von der Gestalt eines Ellipsoids oder einer Scheibe. Die folgenden Fragen sollen ein zumindest qualitatives Verständnis der Entwicklung der Wolke vermitteln.

a) Warum kontrahiert die Wolke in Richtung der Rotationsachse schneller als senkrecht dazu? Für welche Bereiche der Wolke ist dieser Effekt am größten? Was folgt daraus (qualitativ!) für die sich entwickelnde Dichteverteilung?
Hinweis: Betrachten Sie die Beschleunigung einer Masse am Ort $\vec{r}$ in die betreffenden Richtungen; der Koordinatenursprung liege im Zentrum der Wolke.

b) Welche Winkelgeschwindigkeit muß ein Teilchen am Ort $\vec{r}$ besitzen, damit die Wolke in Richtung auf die Rotationsachse nicht weiter kollabiert? Wie hängt diese Geschwindigkeit von r ab, wenn die von der Teilchenbahn eingeschlossene Masse $M = M(r)$ der Wolke

i) homogen verteilt ist?

ii) im Zentrum der Wolke konzentriert ist?

Aufgabe 12.2 (HA): Rotation, Gradient und die Existenz von Potentialen

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann $\nabla \times (\nabla f) = 0$ gilt!

b) Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Kraftfeld. $\vec{F}$ besitze ein Potential $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Rotation von $\vec{F}$ verschwindet! Also ist $\nabla \times \vec{F}$ eine *notwendige* Bedingung für die Existenz eines Potentials von $\vec{F}$.

c) Sei jetzt $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)^t | z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{A}(x,y,z) := \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Rotation $\nabla \times \vec{A}$ und ein Umlaufintegral in der $x-y$-Ebene um den Ursprung des Koordinatensystems.

d) Ist die Bedingung aus Teil b also auch *hinreichend*?

Aufgabe 12.3 (): Kreiselkompaß

Ein rotationssymmetrischer Kreisel sei so aufgehängt, daß er sich in einer horizontalen Ebene frei drehen kann. Legen Sie ein Koordinatensystem Σ in den Schwerpunkt des Kreisels, dessen z-Achse vertikal ist und dessen y-Achse mit der Kreiselachse zusammenfällt. Die x-Achse ergibt sich durch Ergänzung der beiden Achsen zu einem Rechtssystem. Das Koordinatensystem rotiere also nicht mit dem Kreisel. Überlegen Sie sich, warum im System Σ der Trägheitstensor diagonal ist und die Hauptträgheitsachsen nicht zeitabhängig sind, obwohl Σ kein körperfestes System ist.

a) Berücksichtigen Sie die Erdrotation $\vec{\omega}$. Geben Sie den Gesamtdrehimpuls des Kreisel in einem Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ an, in dem der Schwerpunkt der Erde ruht? Wie lautet die Bewegungsgleichung für die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses in $\tilde{\Sigma}$? Drücken Sie dies durch den Drehimpuls im Koordinatensystem Σ aus, indem Sie zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ von Σ relativ zu $\tilde{\Sigma}$ berechnen!

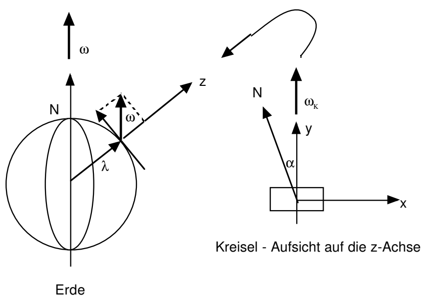

Abbildung 1: Kreiselkompaß

b) Leiten Sie aus der Abbildung die 4 Gleichungen für die Komponenten von $\vec{\omega}$ und von $\dot{\omega}_z$ in Σ ab, und setzen Sie sie in die Gleichung für die z-Komponente des Drehmomentes ein. Sie erhalten so eine Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung des Winkels α. Vereinfachen Sie diese Gleichung, indem Sie annehmen, daß die Winkelgeschwindigkeit s des Kreisels viel größer ist als die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde!

c) Dies ist eine Ihnen bekannte Schwingungsgleichung, die Sie für kleine Winkel α schon einmal gelöst haben. Welche Periodendauer hat diese Schwingung?

d) Kann man mit einem solchen Kreisel einen Kreiselkompaß bauen? Überlegen Sie, welche Komplikationen es bei einer technischen Realisierung gibt, die hier nicht berücksichtigt wurden.

Aufgabe 12.4 (HA): Hauptträgheitsmomente des NH_3-Moleküls

Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente eines NH_3-Moleküls! Der Abstand von Stickstoff und Wasserstoff ist $1.01 \cdot 10^{-10} m$. Nutzen Sie die Symmetrie des Moleküls beim Auffinden der Hauptträgheitsachsen aus!

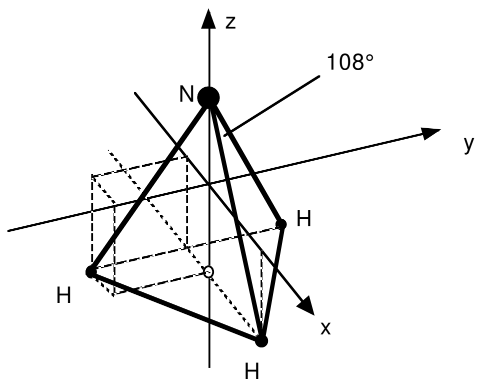

Abbildung 2: NH_3-Molekül

Viel Erfolg!