Übungen zur Physik I (WS 98/99)

Blatt 10

Aufgabe 10.1 (HA): Schwingungen in zwei Dimensionen

Betrachten Sie das Potential $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$V(x, y) := ax^2 + by^2 \ .$$

a) Welche Bahnen kann ein Teilchen der Masse m in diesem Potential beschreiben?

b) Welche geometrischen Formen haben die Bahnen für den Spezialfall $a = b$, wie sieht also der Graph der Bahnen aus?

c) Für $a \neq b$ sind die Graphen der Bahnen komplizierter. Welcher Zusammenhang muß zwischen a und b bestehen, damit die Bahnen zumindest *geschlossen* sind? (d.h. nach einer gewissen Zeit Δt läuft das Teilchen mit dem gleichen Geschwindigkeitsvektor durch den gleichen Punkt)

Versuchen Sie sich die Graphen der Bahnen für verschiedene Werte von a und b zu veranschaulichen. Die Graphen nennt man auch Lissajous-Figuren

Aufgabe 10.2 (): Schicksal des Universums

In dieser Aufgabe soll mit Hilfe der Newtonschen Mechanik das Schicksal des Universums berechnet werden. Nach Hubble bewegen sich die Galaxien voneinander fort und zwar um so schneller, je weiter sie voneinander entfernt sind. Berechnen Sie, wie der weitere Verlauf dieser Bewegung ist. Betrachten Sie dazu die Bewegung einer beliebig herausgegriffenen Galaxie. Ihr Abstand vom Beobachter werde beschrieben durch

$$\vec{r}(t) = R(t)\vec{r}_0 \ . \tag{1}$$

$\vec{r}_0$ ist der Ortsvektor zum Beobachtungszeitpunkt, $R(t)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung. Wie in der Vorlesung berechnet, trägt nur die Masse, die sich innerhalb der Kugel mit dem Radius $r = |\vec{r}|$ befindet, zur Kraft auf die Galaxie bei:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho(t)r^3$$

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für die Galaxie der Masse m, wenn Sie das Newtonsche Gravitationsgesetz als gültig annehmen?

b) Setzen Sie Gleichung (1) in die Bewegungsgleichung ein und stellen Sie so eine Bewegungsgleichung für $R(t)$ auf!

c) Aus der Erhaltung der Gesamtmasse bestimmen Sie die unbekannte Funktion $\rho(t)$!

d) Leiten Sie aus der so gefundenen Gleichung den Energiesatz her und lösen Sie diese Gleichung durch Separation der Variablen (und ggf. Zuhilfenahme einer Integraltafel)! Die drei Fälle, die Sie bei der Integration unterscheiden müssen, entsprechen drei möglichen Schicksalen des Universums! Welche sind dies?

Aufgabe 10.3 (): Die folgsame Garnrolle

Eine Garnrolle ist unter das Bett gerollt. Ein Fadenende schaut noch heraus. Je nachdem, wie man zieht, kommt die Rolle heraus oder rollt noch tiefer unter das Bett. Wieso?
Hinweis: Wo liegt die momentane Drehachse der Rolle?

Aufgabe 10.4 (HA): Trägheitsmomente

Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel mit Radius R und Masse M mit homogener Massenverteilung für eine Drehachse durch den Kugelmittelpunkt unter Verwendung von

a) Kugelkoordinaten

b) Zylinderkoordinaten

Aufgabe 10.5 (): Hauptachsentransformation

Eine Punktmenge im $\mathbb{R}^2$ sei gegeben durch alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 1 \ , \tag{2}$$

mit $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \neq 0$. Zeigen Sie, daß man (2) durch eine geeignete Drehung der Koordinatenachsen auf die Form

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 = 1 \tag{3}$$

bringen kann. Welche Kurventypen werden durch (2) bzw. (3) erfaßt?

Viel Erfolg!