Übungsblatt 7
für 6.12/9.12

Übungen zu Physik I: Mo. 8-10 Uhr und Do. 8-10 Uhr

H. F. Arlinghaus, R. Friedrich, Veranstaltung Nr. 110929, WS 2004/05

http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich.html

SCHRIFTLICH:

Aufgabe 22: Seil über Kante (1 P)
Ein Seil mit der Masse m und der Länge l rutscht über eine Kante ab. Die Reibung bei der Bewegung soll vernachlässigt werden.

1) Man bezeichne mit $x \leq l$ die Länge des Seilstücks, das von der Kante herabhängt. Wie lautet die Bewegungsgleichung des Seils ausgedrückt mit Hilfe von $x(t)$?

2) Wie lautet die Lösung der Gleichung für den Fall, daß zur Zeit $t = 0$ das Seil losgelassen wird, wobei bereits ein Stück der Länge $x_0 \leq l$ von der Kante herabhängt?

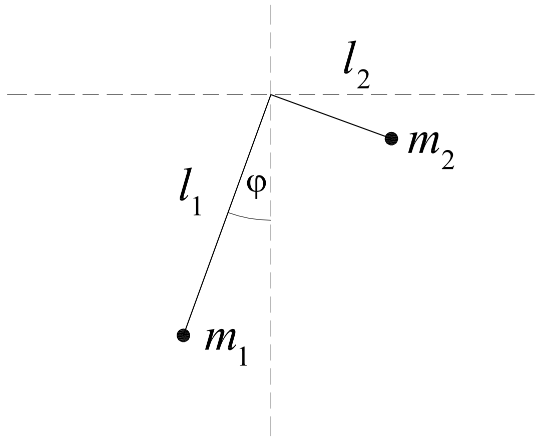
Aufgabe 23: Absturz eines Meteors (1 P)
Eine Punktmasse m werde von einer Masse M, die im Ursprung fixiert ist, mit der Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{GmM}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \tag{1}$$

angezogen ($\mathbf{x} = (x, y, z)$ und $G > 0$). Man bezeichne die Bahn der Punktmasse mit $\mathbf{r}(t) = (r_x, r_y, r_z)$. Zur Zeit $t = 0$ ruhe die Punktmasse im Abstand $a = |\mathbf{r}(0)|$ vom Ursprung. Welche Bewegung beschreibt die Punktmasse für $t > 0$ und wann wird sie mit der Masse M zusammenprallen?

MÜNDLICH:

Aufgabe 24: Drehmoment (2 P)
Ein rechtwinklig geknickter Hebel mit vernachlässigbarer Masse ist an der Knickstelle drehbar gelagert. An den Enden der Hebelarme hängen die Massen $m_1 = 20\,\mathrm{g}$ und $m_2 = 80\,\mathrm{g}$ (siehe Abb.). Berechnen Sie den Winkel φ für die Gleichgewichtsstellung, wenn die Hebelarme die Längen $l_1 = 15\,\mathrm{cm}$ und $l_2 = 7{,}5\,\mathrm{cm}$ haben.



Aufgabe 25: Gravitationsgesetz (1 P)

Zwei Supertanker ($m = 200000\,\mathrm{t}$) fahren parallel nebeneinander im Abstand von $r = 100\,\mathrm{m}$. Aufgrund ihrer eigenen Gravitation ziehen sie sich an und bewegen sich aufeinander zu. Idealisieren Sie die Tanker für die folgenden Berechnungen als Massenpunkte.

a) Wie groß ist Querbeschleunigung aufgrund der Gravitation?

b) Um welche Strecke haben sich die beiden Schiffe nach 20 Minuten Parallelfahrt angenähert und wie groß ist die Quergeschwindigkeit?

Aufgabe 26: Normalenvektor (1 P)
a) Gegeben sei der zeitabhängige Vektor $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$. Es gelte für alle t: $|\mathbf{a}(t)| = C_1$, wobei C_1 eine Konstante darstellt. Zeigen Sie, daß der Vektor

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}(t) \tag{2}$$

auf $\mathbf{a}$ senkrecht steht für alle t. Wie lautet dann der Normaleneinheitsvektor zu $\mathbf{a}$?

b) Gegeben sei der zeitabhängige Vektor $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$ und der Vektor $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$. Es gelte für alle t: $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{d} = C_2$, wobei C_2 eine Konstante darstellt. Zeigen Sie, daß der Vektor

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}(t) \tag{3}$$

auf $\mathbf{d}$ senkrecht steht für alle t.

Aufgabe 27: Vertikaler Wurf (2 P)
Diskutieren Sie den vertikalen Wurf einer Masse m im Gravitationsfeld der Erde: $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\gamma m M \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ und $\gamma > 0$.

a) Die Anfangsgeschwindigkeit beim Abwurf der Masse von der Erdoberfläche sei v_0. Gesucht ist die Geschwindigkeit v der Masse als Funktion ihres Abstandes z vom Erdmittelpunkt.

b) Wie groß muß v_0 mindestens sein, damit die Masse den Schwerebereich der Erde verläßt?

Aufgabe 28: Energiesatz (2 P)
Beweisen Sie ausgehend vom Newtonschen Bewegungsgesetz $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ den Energiesatz für die Bewegung eines Teilchens mit Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ im konstanten Schwerefeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -gm\,\mathbf{e}_z$.

Aufgabe 29: Eindimensionale Dynamik eines Teilchens (4 P)
Ein Teilchen mit der Ortskoordinate x bewege sich im Kraftfeld

$$F(x) = \epsilon x - x^3 \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie das zur Kraft F gehörige Potential $U(x)$. Wählen Sie die Integrationskonstante so, daß $U(0) = 0$.

b) Formulieren Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung.

c) Berechnen Sie die möglichen Ruhelagen des Teilchens.

d) Machen Sie sich klar, daß für kleine Werte von x die Kraft $F(x)$ durch $F(x) = \epsilon x$ ausgedrückt werden kann. (Z.b., wählen sie $\epsilon = 1$ und berechnen Sie $F(x) = \epsilon x - x^3$ und $F(x) = \epsilon x$ für $x = 0.5$, $x = 0.4$, $x = 0.3$, $x = 0.2$, $x = 0.1$.) Lösen Sie für diesen Fall, d.h. für $F = \epsilon x$, die Newtonsche Bewegungsgleichung. (Hinweis: Für $\epsilon < 0$ erhalten Sie die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators.) Welcher Lösungsansatz kann für $\epsilon > 0$ gemacht werden. (Hinweis: die 2te Ableitung von $\cosh(x)$ ergibt wieder $\cosh(x)$). Ist die Nährung $|x^3| \ll |\epsilon x|$ für alle Zeiten t erfüllt?

e) Lösen Sie jetzt die Bewegungsgleichung für den allgemeinen Fall $F = \epsilon x - x^3$ mit Hilfe des in Teil a) bestimmten Potentials U. Leiten Sie dazu aus der Bewegungsgleichung den Energiesatz her. Führen Sie die Variablen $x = q_1$ und $\dot{x} = q_2$ ein. Skizzieren Sie einige Bahnen im Phasenraum, der von den Koordinaten q_1 und q_2 aufgespannt wird. Veranschaulichen Sie sich qualitativ das Verhalten des Teilchens.

f) Betrachten Sie jetzt ein Teilchen mit der Gesamtenergie $E = 0$. Berechnen Sie die Bahnkurve $x(t)$. Diese Lösung wird als Separatrix bezeichnet. Hinweis:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2\epsilon - x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} \ln\left[\frac{\sqrt{2\epsilon} + \sqrt{2\epsilon - x^2}}{x}\right] \tag{5}$$