Übungsblatt 4
für 15.11/18.11

Übungen zu Physik I: Mo. 8-10 Uhr und Do. 8-10 Uhr

H. F. Arlinghaus, R. Friedrich, Veranstaltung Nr. 110929, WS 2004/05

$http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich.html$

SCHRIFTLICH:

Aufgabe 1: Ableitungen zusammengesetzter Funktionen (3 P)

Gegeben seien die Ableitungen der Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\exp(x)$:

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \cos(x) \tag{1}$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \sin(x) \tag{2}$$

$$f(x) = \exp(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \exp(x) \tag{3}$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Beziehungen die Ableitungen folgender Funktionen (verwenden Sie gegebenenfalls die Produkt- bzw. Quotientenregel)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{4}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \tag{5}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{6}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{7}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{8}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \tag{9}$$

Aufgabe 2: Weg-Zeit-Gesetz (2 P)

Bei einer Radtour im Gebirge schiebt ein Radfahrer sein Fahrrad bergauf mit der Geschwindigkeit $v_1 = 5\,\mathrm{km/h}$. Bergab fährt der Radfahrer dann mit der Geschwindigkeit $v_2 = 45\,\mathrm{km/h}$. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit, wenn die Teilstrecken bergauf und bergab gleichlang sind? Vernachlässigen Sie Beschleunigungs- und Verzögerungsvorgänge.

MÜNDLICH:

Aufgabe 3: Differenzieren mit Hilfe von Umkehrfunktionen (2 P)

Betrachten Sie die Funktionen $x(t)$ und $t(x)$ mit der Eigenschaft $x(t(x)) = x$. $t(x)$ wird als Umkehrfunktion zu $x(t)$ bezeichnet. (Beispiel: $t > 0$, $x > 0$, $x(t) = t^2$, $t(x) = +\sqrt{x}$.)

a) Bestimmen Sie die Ableitung $\mathrm{d}x(t(x))/\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Kettenregel und beweisen Sie

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t(x)} \frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} = 1 \tag{10}$$

b) Berechnen Sie die Ableitungen der Umkehrfunktionen $t(x)$ zu

$$x(t) = \sin(t) \quad , \quad t(x) = \arcsin(x) \tag{11}$$
$$x(t) = \cos(t) \quad , \quad t(x) = \arccos(x) \tag{12}$$
$$x(t) = \tan(t) \quad , \quad t(x) = \arctan(x) \tag{13}$$
$$x(t) = \exp(t) \quad , \quad t(x) = \ln(x) \tag{14}$$

Aufgabe 4: Höhere Ableitungen (2 P)

a) Bestimmen Sie die $n$ten Ableitungen der Funktionen

$$f(x) = \sin(\Omega x)\ ,\ f(x) = \cos(\Omega x)\ ,\ f(x) = \exp\{\lambda x\} \tag{15}$$

b) Bestimmen Sie die zweiten Ableitungen der Ausdrücke

$$f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)\ ,\ f(x) = g(h(x)) \tag{16}$$

Aufgabe 5: Kettenregel (2 P)
Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2+1} && (17)\\
f(x) &= \left[\frac{x+1}{x}\right]^5 && (18)\\
f(x) &= \ln\left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right] && (19)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6: Rechts- und linksseitige Ableitungen (1 P)
Gegeben sei die stetige Funktion

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x < 0 \\ \sin(x) & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{20}
$$

Bestimmen Sie die Ableitungen von $f(x)$ für $x < 0$ und für $x > 0$. An der Stelle $x = 0$ gibt es zwei Ableitungen, eine rechtsseitige und eine linksseitige. Wie lauten diese?

Aufgabe 7: Produktregel (2 P)
Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos(bx) + b\sin(bx)] && (21)\\
f(x) &= \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) && (22)\\
f(x) &= \frac{1}{2a}\sinh(ax)\cosh(ax) + \frac{x}{2} && (23)\\
f(x) &= (x^2-a^2)\,x^3 && (24)
\end{aligned}
$$