Übungsblatt 3
Übungen zu Physik I: Mo. 8-10 Uhr und Do. 8-10 Uhr

H. F. Arlinghaus, R. Friedrich, Veranstaltung Nr. 110929, WS 2004/05

$http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich.html$

SCHRIFTLICH:

Aufgabe 1: Gruppeneigenschaft der Drehungen in der Ebene (2 P)

Gegeben sei die 2×2 Drehmatrix $D(\varphi)$

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{1}$$

die einen Vektor $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ um den Winkel φ dreht. Man zeige, dass zwei Drehungen um die Winkel φ_1 und φ_2 äquivalent sind zu einer Drehung um den Winkel $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$. D.h., man berechne die Produktmatrix $D(\varphi_2)D(\varphi_1)$ und zeige, dass $D(\varphi_2)D(\varphi_1) = D(\varphi_3)$ gilt ("Abgeschlossenheit" der Drehgruppe).

MÜNDLICH:

Aufgabe 1: Beweis der Quotientenregel (1 P)

Beweisen Sie (in Analogie zum Beweis der Produktregel) die Quotientenregel

$$\frac{d}{dt}\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)}{y^2(t)} \ . \tag{2}$$

Aufgabe 2: Binomischer Lehrsatz (2 P)

Beweisen Sie die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}\, b^k \tag{3}$$

durch Induktion. Das heisst, a) zeigen Sie, dass die Formel für $n = 2$ gilt. b) Nehmen Sie an, dass die Formel für n ihre Gültigkeit besitzt und beweisen Sie unter dieser Annahme ihre Gültigkeit für $n+1$. Hier bedeutet $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$. Z.B. gilt $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$. Anmerkung: $n!$ heisst n-Fakultät.

Aufgabe 3: Zur Differentialrechnung (2 P)
Bestimmen Sie über die Berechnung des Differentialquotienten $[x(t+\Delta t) - x(t)]/\Delta t$ die Ableitung der folgenden Funktionen

(1)

$$x(t) = ct^n \qquad n = 1, 2, ... \tag{4}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}\, b^k \text{ mit } \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} \tag{5}$$

(2)

$$x(t) = a \sin t \qquad , \qquad x(t) = b \cos t \ . \tag{6}$$

Hinweis: Benützen Sie die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen, z. B.:

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2) + \sin(\phi_2)\cos(\phi_1) \ . \tag{7}$$