Übungsblatt 1

Übungen zu Physik I: Mo. 8-10 Uhr und Do. 8-10 Uhr

H. F. Arlinghaus, R. Friedrich, Veranstaltung Nr. 110929, WS 2004/05

http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich/

SCHRIFTLICH:

Aufgabe 1: Schwarzsche Ungleichung und Dreiecksungleichung (2 P)
Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung für Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \ . \tag{1}$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \ . \tag{2}$$

Aufgabe 2: Kosinussatz (1 P)
Leiten Sie den Kosinussatz

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\varphi) \tag{3}$$

für die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ her, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist und die Vektorrelation gilt: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. In welchem Fall erhalten Sie den Satz von Pythagoras?

MÜNDLICH:

Aufgabe 1: Satz von Thales (1 P)
Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Satz von Thales: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

Aufgabe 2: Vektorgleichung (2 P)
Lösen Sie die Vektorgleichung

$$\mathbf{x} + \mathbf{a} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \tag{4}$$

für gegebene Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nach dem Vektor $\mathbf{x}$ auf. Unter welcher Voraussetzung hat diese Gleichung keine Lösung?

Aufgabe 3: Orthogonale Zerlegung von Vektoren (1 P)
Gegeben seien zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Dann läßt sich der Vektor $\mathbf{b}$ in die Summe $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ so zerlegen, daß $\mathbf{b}_1$ zu $\mathbf{a}$ parallel und $\mathbf{b}_2$ zu $\mathbf{a}$ orthogonal ist. Man berechne $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$.

Aufgabe 4: Entwicklungssatz und Jacobi-Identität (3 P)
Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ in der Komponentendarstellung: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

(1) Zeigen Sie durch Einsetzen, daß der Entwicklungssatz

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{5}$$

gilt.

(2) Verwenden Sie für das Kreuzprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ die Beziehung

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{6}$$

wobei ϵ_{ijk} der Levi-Civita-Tensor ist und verwenden Sie die Beziehung

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \ . \tag{7}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (6) und Gl. (7), daß der Entwicklungsatz (5) gilt.

(3) Zeigen Sie mit Hilfe des Entwicklungsatzes (5), daß die sogenannte Jacobi-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0 \tag{8}$$

gilt.

Aufgabe 5: Höhere Skalar- und Kreusprodukte (2 P)
Beweisen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ die folgenden Beziehungen:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \tag{9}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{10}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = \{\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\}^2 \tag{11}$$