Bitte beschäftigen Sie sich mit folgenden Aspekten aus dem Gebiet „Schwache Wechselwirkung“:

1) **Eigenarten des nuklearen β-Zerfalls**
2) **Fermi- und Gamow-Teller Übergänge**
3) **vektorielle und axiale Kopplung**
4) **Wiederholen Sie die Grundzüge der Relativitätstheorie und machen Sie sich vertraut mit dem Konzept von Vierervektoren**
5) **Schauen Sie sich in der Nuklidkarte einige Zerfälle an, und versuchen Sie zu verstehen, wie es zu den unterschiedlichen Halbwertszeiten kommen kann**
6) **Berechnen Sie die logft-Werte einiger Zerfälle (s. Nuklidkarte oder diese Vorlesung für Beispielkerne)**

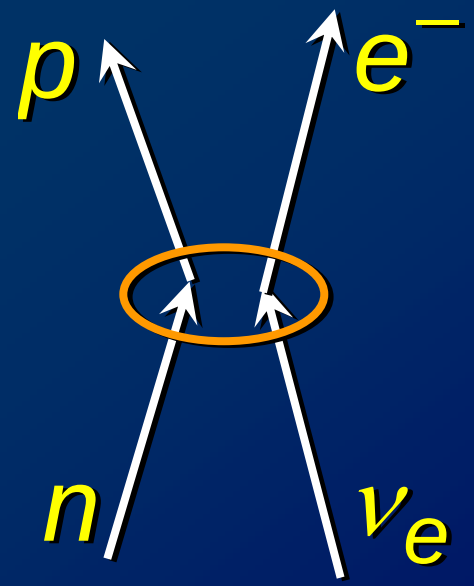
Wiederholung

1

Fermi´s Weg zum β-Zerfall

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \underbrace{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2}_{M_W} \rho(E)$$

Gesamtenergie beim Übergang



Strom-Strom-Kopplung

$$M_W = -\frac{G}{\sqrt{2}c^2} \int d^3\vec{r}\, J_W \cdot J_W^+$$

nicht-relativistisch:

$$\vec{J} = -i\frac{\hbar}{m}\Psi^*\vec{\nabla}\Psi = \Psi^*\frac{\vec{p}}{m}\Psi$$

$$\rho = \Psi^*\Psi$$

- relativistisch:

1. $\vec{J}$ ist Vierervektor: $\vec{J} = (c\rho, \vec{j})$
2. Ψ ist vierkomponentige Wellenfunktion
3. Es gibt 5 Lorentz-invariante Formen eines relativistischen Übergangsstroms

$$\bar{\Psi}_\alpha O_i \Psi_\beta \qquad \bar{\Psi} = \Psi^* \gamma^0$$

$O_S = 1$	→	Skalar	# 1
$O_P = \gamma^5$	→	Pseudoskalar	# 1
$O_V = \gamma^\mu$	→	Vektor	# 4
$O_A = \gamma^5 \gamma^\mu$	→	Axial-Vektor	# 4
$O_T = \sigma^{\mu\nu}$	→	Tensor	# 6

- In der schwachen WW: nur Vektor und Axial-Vektor

(V - A)

Fermi´s Ansatz: nur Vektorkopplung

Berechnung des β-Zerfalls

(nicht-relativistische Näherung)

$$|M|^2 = \frac{1}{2} G^2 \left[g_\nu^2 |M_F|^2 + g_A^2 |M_{GT}|^2 \right]$$

$$M_F = \langle \Psi_f | \tau^{\pm} | \Psi_i \rangle$$ -Fermi-Übergänge

$$M_{GT} = \langle \Psi_f | \sigma\tau^{\pm} | \Psi_i \rangle$$ -Gamow-Teller Übergänge

Beachte Auswahlregeln

Fermi: $\Delta I = 0, \quad \Delta\pi = 0, \quad \Delta T = 0$

GT: $\Delta I = 0{,}1 \quad \Delta\pi = 0, \quad \Delta T = 0{,}1$

L-Unterdrückung der Leptonenwellenfunktion

Feststellung:

Selbst bei erlaubten, reinen Fermi-Übergängen (bzw. GT-Übergängen) werden sehr unterschiedliche Zerfallszeiten beobachtet.

Dieser Unterschied ist eine Folge des zur Verfügung stehenden Phasenraums !

$$\frac{dN}{dE} = \rho(E)$$

Phasenraum, Zustandsdichte

$$\rho_n(E) = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \int d^3\vec{p}_1 \ldots\ldots d^3\vec{p}_{n-1}$$

Variation bzgl. Gesamtenergie

Nebenbedingungen:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_{n-1} + \vec{p}_n = 0$$

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = const$$

Der Phasenraum

Weg 1: Betrachte stehende Welle in einem unendlich hohen Kasten.

Frage: Wieviel k-Werte gibt es (p = k)

Lösung: $N_x = \frac{1}{h} L_x \cdot p_x \qquad p_x = \pm\sqrt{2mE_x}$

Eigenwerte im Kasten

- Verallgemeinerung auf 3 Dimensionen

$$N = \frac{1}{h^3} V \int d^3\vec{p} = \frac{V}{h^3} \int p^2 dp d\Omega_p$$

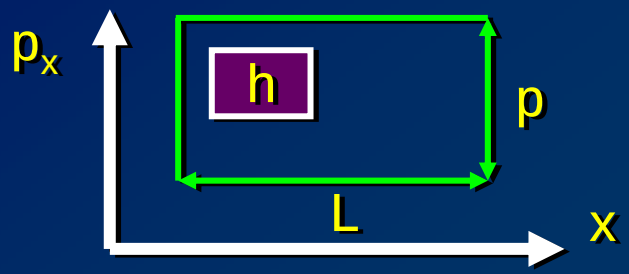
$$N = \frac{4\pi}{h^3} V \int p^2 dp$$

$$\frac{dN}{dE} = \rho(E)$$

Weg 2:

Die Unschärferelation beschreibt die Phasenraumzelle eines Teilchens

$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$ (für viele sich überlagernde ebene Wellen)



jede ebene Welle besetzt ein Volumen h im Phasenraum (1-dimensional zunächst)

$\succ N_x = \frac{L \cdot p}{h}$

und für 3 - Dimensionen

$N = \frac{1}{h^3} V \int d^3\vec{p} = \frac{4\pi}{h^3} V \int p^2 dp$

oder:

In einem Volumen des Phasenraums der Größe h^3 gibt es einen Zustand !

> Zustandsdichte für ein Teilchen

$\rho_1(E) = \frac{dN_1}{dE} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \frac{d}{dE} \int p_1^2 dp_1 d\Omega$

relativistisch gilt: $E^2 = p^2c^2 - m^2c^4$

$\succ \frac{d}{dE} = \frac{E}{pc^2} \frac{d}{dp}$

$$\succ \rho_1(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \frac{E}{p_1 c^2} \frac{d}{dp_1} \int p_1^2 dp_1 d\Omega$$

$$\rho_1(E) = \frac{p \cdot E}{2\pi^2 c^2 \hbar^3} V$$

Nächster Schritt

Zwei Teilchen im Phasenraum mit der (Neben-) Bedingung:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

› Zahl der Zustände N bleibt unverändert $(N = N_1 = N_2)$

ABER: $$\rho_2(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \frac{d}{dE} \int d^3\vec{p}_1$$

$$dE = dE_1 + dE_2 = \frac{p_1 c^2}{E_1} dp_1 + \frac{p_2 c^2}{E_2} dp_2$$

mit: $p_1^2 = p_2^2 \;\succ\; p_1 dp_1 = p_2 dp_2$

folgt: $dE = p_1 dp_1 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} c^2$

$$\rho_2(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) c^2} \frac{1}{p_1} \frac{d}{dp_1} \int p_1^2 dp_1 d\Omega$$

$$\rho_2(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \frac{E_1\ E_2\ p_1}{(E_1 + E_2) c^2} \int d\Omega_1 = 4\pi$$

$\rho_2(E) \le \rho_1(E)$!

weiterer Schritt:

3 Teilchen mit $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$

Teilchen 1 und 2 können bzgl $\vec{p}$ unabhängig variiert werden

$$\succ N_3 = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2$$

$$\succ \rho_3 = \frac{dN_3}{dE} \qquad E = E_1 + E_2 + E_3$$

allgemein:

$$\rho_n(E) = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \int d^3\vec{p}_1 \ldots \int d^3\vec{p}_{n-1}$$

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = const\,!!$$

d.h.: $\frac{d}{dE}$ ist als eine Variation ("δE") zu interpretieren

Anwendung auf β-Zerfall

hier: 3 Teilchen im Endzustand: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$

Impulse von Teilchen 1 & 2 dürfen unabhängig variiert werden.

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_e \qquad \vec{p}_2 = \vec{p}_\nu \qquad \vec{p}_3 = \vec{p}_k$$

$$\rho(E) = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE} \int p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_e d\Omega_\nu$$

setze V = 1 Einheitsvolumen

(da Ströme ebenfalls „pro Volumen“ definiert, fällt V später heraus !!)

benutze folgende Beziehungen:

1 $E_\nu + E_e = E$ Kern übernimmt keine Rückstoßenergie

$\succ dE = dE_\nu + dE_e$ p_e, p_ν weiterhin beliebig

2 berechne $d\rho(E)$ für festes E_e im Intervall: $[E_e, E_e + dE_e]$

$\succ dE = dE_\nu$ $E_\nu = p_\nu c$ $dE_\nu = dp_\nu c$ $m_0 \ll E$

> daher zunächst Integration über Neutrinokoordinaten:

$$d\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 dp_e \frac{1}{c} \frac{d}{dp_\nu} \int p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_e d\Omega_\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 dp_e \frac{p_\nu^2}{c} \int d\Omega_e d\Omega_\nu \qquad p_\nu^2 = \frac{E_\nu^2}{c^2} = \frac{(E - E_e)^2}{c^2}$$

$$d\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 dp_e \frac{1}{c^3} (E - E_e)^2 \int d\Omega_e d\Omega_\nu$$

eingesetzt in die „Goldene Regel“ ergibt

$$dW_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H' | i \rangle \right|^2 d\rho(E)$$

Sei $\overline{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2}$ das über den Winkel zwischen Elektron & Neutrino gemittelte Matrixelement,

mit $\int d^2\Omega_{e,\nu} = (4\pi)^2$

$$d\rho(E) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 dp_e \frac{1}{c^3}(E - E_e)^2 \int d\Omega_e d\Omega_\nu$$

$$dW_{if} = \frac{2\pi}{\hbar}\overline{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^6}\frac{4^2\pi^2}{c^3}(E - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

$$= \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7}\overline{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2}(E - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

Form des β-Spektrums

$$\left[\frac{dW_{if}}{p_e^2 dp_e}\right]^{1/2} \sim \sqrt{\overline{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2}}(E - E_e)$$

Fermi-Kurie Plot

Die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit ist gegeben durch die Integration:

für große Energien: $cp_{max} = E = E_{max}$

$$W_{if} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \overline{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2} \int (E - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

$$= \frac{1}{30c^3} E^5$$

$$\tau_\beta \sim E^{-5} \text{ !!}$$

Im allgemeinen wird das Spektrum der Elektronen durch die Ladung des Kerns verzerrt, so dass im Integral eine Coulomb-Korrektur einzufügen ist.

$$\int_0^{p_{max}} (E - E_e)^2 F(\pm, Z, E_e)\, p_e^2 dp_e = m_e^5 c^7 f(E)$$

E in Einheiten von $m_e c^2$

$$W_{if} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \overline{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|}^2 \int (E - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

dimensionslos

$$\propto \overline{\left|\langle f|H'|i\rangle\right|}^2 = \frac{2\pi^3}{f\tau} \frac{\hbar^7}{m_e^5 c^4}$$

$f\tau$ heißt ft-Wert des β-Zerfalls

oder als log() der log ft - Wert

Zur Bedeutung des ft-Werts

1 ist die schwache WW eine universelle WW so müssen die ft für gleiche Kernmatrixelemente gleich sein.
Problem: es gibt nie zwei gleiche Matrixelemente

ABER

2 die log ft – Werte fallen in etwa gleiche Kategorien:

erlaubte Übergänge	log ft ~ 3-4
einfach verboten	log ft ~ 6-9
zweifach verboten	log ft ~ 12 ±
dreifach verboten	log ft ~ 18
vierfach verboten	log ft ~ 22

Beispiel:

		$T_{1/2}$	E_{max}	log ft
$n \longrightarrow p$	GT + F	640 sec	0,782 MeV	3,04
$^{6}He \longrightarrow {}^{6}Li$	GT	0,8 sec	3,50 MeV	2,91
$^{14}O \longrightarrow {}^{14}N^{*}$	F	71,4 sec	1,812 MeV	3,5
$^{3}H \longrightarrow {}^{3}He$	GT + F	12,2 y	0,018 MeV	3,06
$^{26}Al^{*} \longrightarrow {}^{26}Mg$	F	6,3 sec	3,21 MeV	3,49
$^{34}Cl \longrightarrow {}^{34}S$	F	1,53 sec	4,47 MeV	3,48

Kleiner Abstecher in die Grundzüge der Relativitätstheorie

Lorentz-Invarianz, Vierervektoren und kovariante Formen

Lorentz-Invarianz

Forderung: Lichtgeschwindigkeit c ist in jedem Bezugssystem gleich

Beispiel: Ausdehnung einer Wellenfront:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Bezugssystem 1 Bezugssystem 2

oder:

$c^2 t^2 - x^2$ ist eine Invariante

(fundamentale Lorentz-Invariante)

definiere Vierernotation:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

mit

$$x \cdot x = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$= c^2 t^2 - \vec{x}^2$$

Vierervektor (oder kovariante Form)

Jeder Satz von 4 Größen, die sich wie $(ct, \vec{x})$ unter der Lorentztransformation transformieren heißt:

Vierervektoren

Gleichungen, die Vierervektoren miteinander verbinden, heißen Lorentz-kovariant (kovariante Formen)

Beispiel:

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (p^0, p^1, p^2, p^3)$$

ist ein Vierervektor mit den Invarianten

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \qquad (\succ E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4)$$

(relativistische Energie-Impuls-Beziehung)

Skalarprodukt von Vierervektoren

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}) \qquad B^\mu = (B^0, \vec{B})$$

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A}\vec{B}$$

kontravarianter & kovarianter Vektor

$A^\mu = (A^0, \vec{A})$ kontravariant

$A_\mu = (A^0, -\vec{A})$ kovariant

$$A \cdot B = \sum_\mu A_\mu B^\mu = \sum_\mu A^\mu B_\mu$$

$$= A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$\sum \succ$

metrischer Tensor $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\succ A^\mu = g_{\mu\nu} A_\nu$$

$$\succ A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A_\nu B^\mu$$

weiterhin gilt:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \sum_\mu (g_{\mu\mu})^2 = 4$$

!

weitere Beispiele:

1

$$p^\mu x_\mu = p \cdot x$$
$$= (E, \vec{p}) \cdot (t, \vec{x})$$
$$= Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

$\Updownarrow$ nicht-relativistisch!

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

2

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \qquad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

Vorsicht !! Vorzeichenkonvention

Beachte:

$$\vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$$
$$\longrightarrow -i\vec{\nabla}$$

!

$$\succ \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box^2$$

$$\boxed{\Box^2 = \partial_\mu \partial^\mu}$$