Bitte beschäftigen Sie sich mit folgenden Aspekten aus dem Gebiet „Schwache Wechselwirkung“:

1) **Eigenarten des nuklearen β-Zerfalls**
2) **Fermi- und Gamow-Teller Übergänge**
3) **vektorielle und axiale Kopplung**
4) **Schauen Sie sich in der Nuklidkarte einige Zerfälle an, und versuchen Sie zu verstehen, wie es zu den unterschiedlichen Halbwertszeiten kommen kann**

Schwache Wechselwirkung

Fermis Weg zum β-Zerfall:

heuristisch-phänomenologische semiklassische Formulierung der Gedankengänge

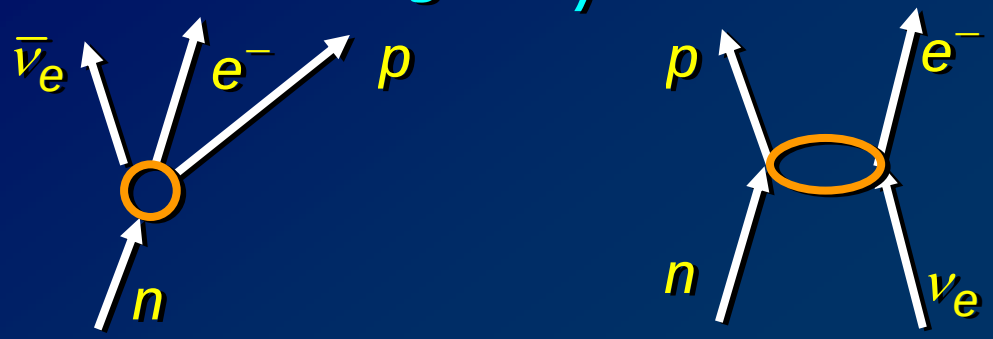
1 Fermis Goldene Regel $W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle f|H'|i\rangle\right|^2 \rho(E)$

W_{if}	Übergangswahrscheinlichkeit
$\langle i|, \langle f|$	Eigenzustände eines ungestörten Hamilton-Operators H_0
H'	Störung ($H' \ll H_0$)
$\rho(E) := \frac{dN}{dE}$	Zustandsdichte, bzw. Zahl der erreichbaren Endzustände bei der Gesamtenergie E (Phasenraum)

- „Goldene Regel" immer dann anwendbar, wenn Wechselwirkungsenergie H' klein gegen Gesamtenergie des Systems

- $\rho(E)$ wird später berechnet

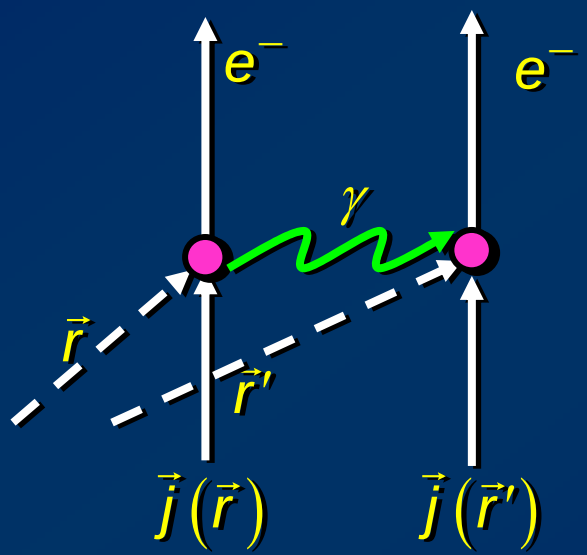
2 Um - Schreibung des β -Zerfalls



$$M_W = \left| \left\langle p e^- \bar{\nu}_e \left| H_W \right| n \right\rangle \right| = \left| \left\langle p e^- \left| H_W \right| n \nu_e \right\rangle \right|$$

3 Konstruktion einer Analogie zur E-Dynamik

(hier: Herleitung der Struktur von M_W)



$$E_{em} = -\frac{q}{c}\int d^3\vec{r}\,\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{q}{c}\int d^3\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

setze q = e

$$\succ E_{em} = -\frac{e^2}{c^2}\int d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}\,'\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

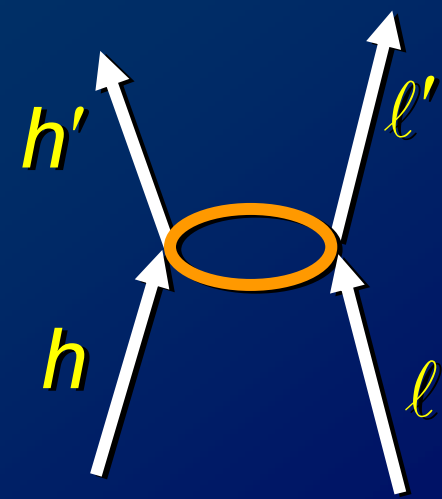
Strom-Strom-Wechselwirkung

Übergang zur schwachen Wechselwirkung

- $e \longrightarrow g$
- $\vec{j}_{em}^{Lepton} \longrightarrow \vec{j}_{W}^{Lepton} = \vec{j}_{W}^{\ell}$
- $\vec{j}_{em}^{Hadron} \longrightarrow \vec{j}_{W}^{Hadron} = \vec{j}_{W}^{h}$
- $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \longrightarrow f(\vec{r}-\vec{r}\,')$
- $E_{em} \longrightarrow M_W$

Beispiel:

h = Neutron
h' = Proton
l = Neutrino
l' = Elektron



Hinweis für später

$$\succ M_W = -\frac{g^2}{c^2}\int d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}\,' j_W^{\ell}(\vec{r})\cdot j_W^{h}(\vec{r}\,')\cdot f(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Die $\vec{j}_W^{\ell,h}$ werden über die Kontinuitäts-gleichung mit den Wellenfunktionen verknüpft. Die WW wird durch eine Kopplungskonstante mal einer Verknüpfungsvorschrift für die Ströme definiert. Die Wellenfunktionen werden ebene Wellen sein.

4 Die Reichweite der schwachen WW ist „sehr" klein $f(r) \neq \frac{1}{r}$

d.h. auch:

Die WW wird vermittelt durch ein Quant „W", das massiv und elektrisch geladen ist.

Aus Unschärferelation:

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar$$

$$\succ R_W \leq \frac{\hbar}{m_W c} \ll 1\,fm \quad (O(10^{-3}\,fm))$$

de Broglie-Wellenlänge

› Yukawa-Potenzial: $f(r) = \frac{e^{-r/R_W}}{r}$

$$\succ M_W = -\frac{g^2}{c^2} \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}\,' \vec{j}_W^{\,\ell}(\vec{r}) \cdot \vec{j}_W^{\,h}(\vec{r}\,') \cdot \frac{\exp(-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/R_W)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

5 $\vec{j}_W^{\,h}(\vec{r}\,') \cong \vec{j}_W^{\,h}(\vec{r})$

$$\succ M_W = -4\pi \frac{g^2 R_W^2}{c^2} \int d^3\vec{r}\, \vec{j}_W^{\,\ell}(\vec{r}) \cdot \vec{j}_W^{\,h}(\vec{r}) = -4\pi \frac{g^2}{c^2} \left(\frac{\hbar}{m_W c}\right)^2 \int \ldots$$

$$= -\frac{G_\beta}{\sqrt{2}c^2} \int \ldots$$

$$G_\beta = \sqrt{2} \cdot 4\pi \frac{g^2}{\hbar c} \frac{(\hbar c)^3}{(m_W c^2)^2}$$

$$m_W c^2 = \left(\sqrt{2} \cdot 4\pi \frac{g^2}{\hbar c} \frac{(\hbar c)^3}{G_\beta} \right)^{1/2}$$

spekuliere: $\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$!

aus β -Zerfall: $G_\beta = 0{,}87 \cdot 10^{-4} MeV \cdot fm^3$

$\succ m_W c^2 \approx 100\ GeV$

d.h.: Die Vorstellung, dass

1. em-Wechselwirkung und schwache WW aus demselben Prizip herrührt
2. die WW kurzreichweitig ist,

führt zu einem Feldquant extremer Masse

heute: $m_W c^2 = 81\ GeV$

Aber: Von hier bis zur Vereinheitlichung noch ein langer Weg !!

Noch einmal wiederholt

1

Schwache Prozesse:

- rein leptonische Prozesse: $\ell_1 + \ell_2 \longrightarrow \ell_1 + \ell_2$
- semi-leptonische Prozesse:

$$q_1 + \bar{q}_2 \longrightarrow \ell\,\bar{\nu}_\ell \qquad Q(\ell) = -1$$

flavour-erhaltend: $\Delta S = 0$

flavour-ändernd: $\Delta S = 1$

hier: $\Delta S = \Delta Q \quad \Delta I_Z = \frac{1}{2}\Delta S$

$\Delta I = \frac{1}{2}$ bevorzugt

- nicht-leptonische Prozesse:

$q_1 + \bar{q}_2 \longrightarrow q_3 + \bar{q}_4$

$Q(q_1, \bar{q}_2) = Q(q_3, \bar{q}_4)$

sieht aus wie flavour-ändernder neutraler Strom

$q_1, \bar{q}_2 \longrightarrow \ell\,\bar{\nu}_e \longrightarrow q_3, \bar{q}_4$

c.c. c.c.

Noch einmal wiederholt

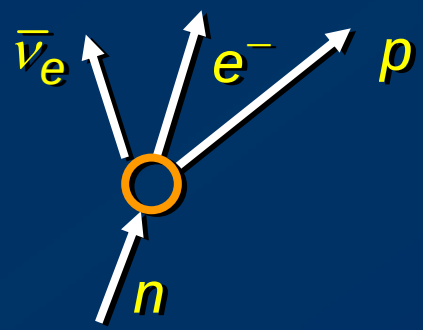
1

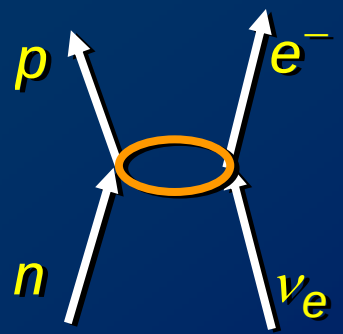
Fermis Weg zum β -Zerfall

Goldene Regel: $W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H' | i \rangle \right|^2 \rho(E)$

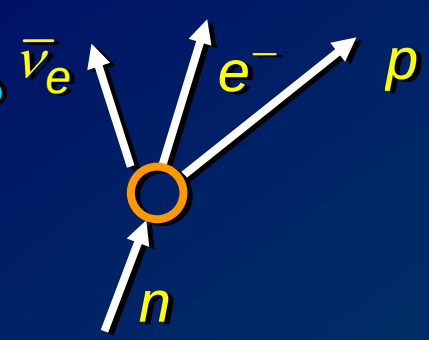
M_W

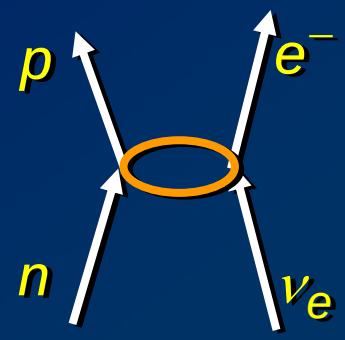
2





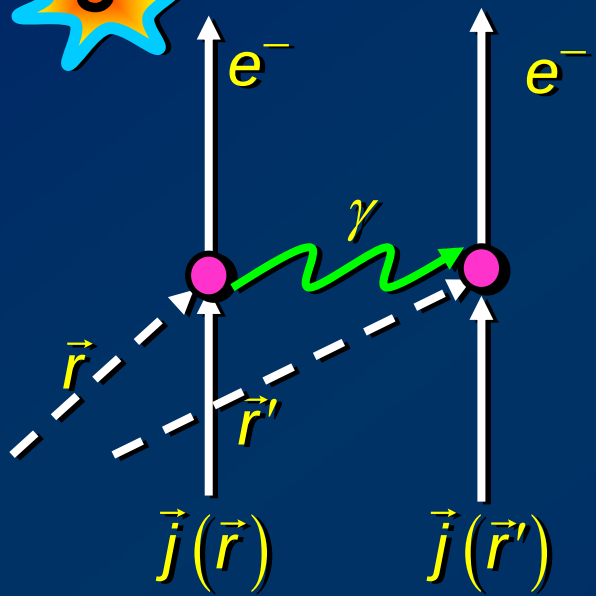
2ff





$$M_W = \left|\left\langle pe^-\bar{\nu}_e \left| H_W \right| n \right\rangle\right| = \left|\left\langle pe^- \left| H_W \right| n\nu_e \right\rangle\right|$$

3



M_W in dieser Form zunächst noch nicht brauchbar

Konstruktion einer Analogie zur E-Dynamik

$$E_{em} = -\frac{q}{c}\int d^3\vec{r}\,\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{q}{c}\int d^3\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}')\cdot\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

setze q = e

4 Übergang zur schwachen W.W.

$e \longrightarrow g$

$\vec{j}_{em} \longrightarrow \vec{j}_W$ (für Lepton, Hadron)

$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \longrightarrow f(\vec{r}-\vec{r}')$

$E_{em} \longrightarrow M_W$

$$\succ M_W = -\frac{g^2}{c^2}\int d^3\vec{r}\,d^3\vec{r}'\,\vec{j}_W^{\,\ell}(\vec{r})\cdot\vec{j}_W^{\,h}(\vec{r}')\cdot f(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$f(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{e^{-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{R_W}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Yukawa-Potential

$\vec{j}_W^{\,h}(\vec{r}') \cong \vec{j}_W^{\,h}(\vec{r})$ Fermis Weg: δ -Potential

$$\succ M_W = -\frac{G}{\sqrt{2}c^2}\int d^3\vec{r}\,\vec{j}_W^{\,\ell}(\vec{r})\cdot\vec{j}_W^{\,h}(\vec{r})$$

Strom-Strom Kopplung

Quantenmechanische Formulierung ausgehend von Gl.

1 $J_W = J_W^{\ell} + J_W^{h} \qquad \left(J_W^{\ell} = J_W^{e} + J_W^{\mu} + J_W^{\tau}\right)$

$$M_W = -\frac{G}{\sqrt{2}c^2}\int d^3\vec{r}\, J_W \cdot J_W^{+}$$

leptonische Prozesse: $\sim J_W^{\ell} \cdot J_W^{\ell\,+}$

semi-leptonische Prozesse: $\sim J_W^{\ell} \cdot J_W^{h\,+} + J_W^{h} \cdot J_W^{\ell\,+}$

hadonische Prozesse: $\sim J_W^{h} \cdot J_W^{h\,+}$

2 J_W ist Vier-Vektor

$$J_W = \left(c\rho_W, \vec{j}_W\right)$$

!

$$J_W \cdot J_W^{+} = c^2 \rho_W \rho_W^{+} - \vec{J}_W \cdot \vec{J}_W^{+} = J_\mu \cdot J^{\mu+} = g_{\mu\nu} J_\mu \cdot J^{\nu+}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Metrik}$$

$\nu, \mu = 0 \ldots 3$

- im nicht – relativistischen „Schrödinger" – Fall gilt:

$$\vec{J} = -i\frac{\hbar}{m}\Psi^*\vec{\nabla}\Psi = \Psi^*\frac{\vec{p}}{m}\Psi$$

$$\rho = \Psi^*\Psi$$

- im relativistischen „Dirac" – Fall ist: $\vec{J} = (c\rho, \vec{j}) = \Psi^*\vec{V}\Psi$

$$= c^2(\Psi^* v_0 \Psi, \Psi^* \vec{v}\Psi)$$

$v_0 \triangleq 1$, $\vec{v} \triangleq \frac{\vec{p}}{mc}$

Ψ ist eine 4-komponentige Wellenfunktion !

Statt Ψ^* wird im Dirac-Formalismus die Wellenfunktion $\bar{\Psi} = \Psi^*\gamma^0$ benutzt, mit:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\succ \vec{J} = \bar{\Psi}O\Psi$$

Die spezielle Form dieses Operators O wird durch den Dirac-Formalismus definiert

$$O = (O_0, \vec{O}) = (\gamma^0, \gamma^i) = \gamma^\mu \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,3 \\ \mu = 0,\ldots,3 \end{matrix}$$

damit wird der leptonische & hadronische Strom
(Faktor c^2 schon herausgekürzt)

$$J_W^{\ell} = \bar{\Psi}_e O \Psi_{\nu_e}$$
$$J_W^{h} = \bar{\Psi}_p O \Psi_n$$
$$O = \gamma^{\mu}$$

$$M_W = -\frac{G}{\sqrt{2}} \int \bar{\Psi}_e O \Psi_{\nu_e} \bar{\Psi}_p O \Psi_n d^3\vec{r}$$

$$M_W = -\frac{G}{\sqrt{2}} \left(\bar{\Psi}_e O \Psi_{\nu_e} \right) \left(\bar{\Psi}_p O \Psi_n \right)$$

Beachte: Integral !!!

Notiere hier noch:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad (= \beta)$$

$$\gamma^{\mu} = \gamma^0 \alpha_i = \gamma^0 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

4-komponentige Matrizen

Statt der hier benutzten speziellen Form des Stroms (nämlich $O = \gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)$) , die eine reine Vektorkopplung beschreibt, werden in der allgemeinen Formulierung des schwachen Stroms alle linear unabhängigen Bilinearformen der Art

$$\bar{\Psi}_\alpha O_i \Psi_\beta = \Psi_\alpha (4x4)_i \Psi_\beta$$

zugelassen.

Von allen möglichen Bilinearformen bleiben insgesamt 5 Lorentz-invariant

$O_S = 1$	Skalar	# 1
$O_P = \gamma^5$	Pseudoskalar	# 1
$O_V = \gamma^\mu$	Vektor	# 4
$O_A = \gamma^5 \gamma^\mu$	Axial-Vektor	# 4
$O_T = \gamma^\mu \underbrace{\gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu}_{\sigma^{\mu\nu}}$	Tensor	# 6

$$(mit\ \gamma^5 = i\ \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3)$$

Die Übergangsamplitude der schwachen WW wird damit über den von Fermi vorgeschlagenem Ansatz erweitert zu:

$$M_W^{\beta-Zerfall} = \frac{1}{\sqrt{2}} G \sum_\alpha g_\alpha^\ell \left(\bar{\Psi}_e O_\alpha \Psi_{\nu_e}\right) g_\alpha^h \left(\bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n\right)$$

Einige formale Erklärungen

1. die WW ist im Ansatz linear (Bilinearform). Nur so ist sie mit der Struktur der Quanten-Mechanik verträglich.

2. Die Größen $\left(\bar{\Psi}_1 O_\alpha \Psi_2\right)\left(\bar{\Psi}_3 O_\alpha \Psi_4\right)$ müssen eine skalare Funktion der 3 Raumkoordinaten bleiben, über die die Integration $\int d^3r$ erfolgt.

   Das schließt Kombinationen $\left(...O_\alpha...\right)\left(...O_\beta...\right)$ mit $\alpha \neq \beta$ aus !!

Eigenschaften der schwachen WW

1. Die schwache WW koppelt NUR vektoriell $\left(O_\alpha = \gamma^\mu\right)$ und axial-vektoriell $\left(O_\alpha = \gamma^5\gamma^\mu\right)$)

2. Die Kopplungsfaktoren sind

$g_V^\ell = 1 \qquad g_A^\ell = -1$

$g_V^h = 1 \qquad g_A^h \sim -1 \quad (= -1{,}25)$

Vorsicht: keine neutralen Ströme, keine Cabibbo-Korrektur

Die Kopplung ist vom

Typ (V-A)

3

jede Kopplung der Art $(V + \lambda A)$

verletzt die Parität !

im leptonischen Sektor ist die Paritätsverletzung maximal.

Vorsicht!

- In einigen Büchern wird benutzt:

$$\gamma^0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3,\ \gamma^5$$

- in anderen:

$$\gamma^4,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3,\ \gamma^5$$

im ersten Fall ist die Linkshändigkeit: $(1-\gamma^5)$

in anderen ist die Linkshändigkeit: $(1+\gamma^5)$

Näherungen zur Berechnung des β-Zerfalls

Der nukleare β-Zerfall ist der nicht-relativistische Grenzfall der Dirac-Theorie, da

1. die Nukleonen bewegen sich nicht-relativistisch

Aus 1:

$$\left(\bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n\right) \longrightarrow \left\langle \Psi_f \left| \tau^{\pm} \right| \Psi_i \right\rangle \qquad O_\alpha = V, S$$

$$\left(\bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n\right) \longrightarrow \left\langle \Psi_f \left| \sigma\tau^{\pm} \right| \Psi_i \right\rangle \qquad O_\alpha = T, A$$

$$\left(\bar{\Psi}_p O_\alpha \Psi_n\right) \longrightarrow 0 \qquad O_\alpha = P$$

4-komponentig ⟶ 1-(2)-komponentig

2 die Leptonenwellenfunktionen sind im Integrationsbereich des Kernvolumens konstant

$$\Psi_\ell(r) \sim \Psi_\ell(0) \qquad \text{für } r \le R_{Kern}$$

Aus 2:

$$\Psi_e^*(r)\Psi_{\nu_e}(r) = \Psi_e^*(r)\Psi_{\bar{\nu}_e}^*(r) = e^{-i\hbar\left(\vec{k}_e + \vec{k}_{\bar{\nu}_e}\right)\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{q} = \vec{k}_e + \vec{k}_{\bar{\nu}_e}$$

mit $E_\beta \sim 1\,MeV \;\succ\; \hbar c q \sim 1\,MeV$

$R \sim 5\,fm \;\succ\; q \cdot R \sim 1/40$

$$\Psi_e^*(r)\Psi_{\nu_e}(r) = \Psi_e^*(0)\Psi_{\nu_e}(0) \approx 1$$

(unter Vernachlässigung des Spins !!)

Zeigen Sie, dass dieses gilt

Damit ist das Matrixelement des β-Zerfalls :

$$|M|^2 \sim G^2 \left[g_\nu^2 |M_F|^2 + g_A^2 |M_{GT}|^2 \right]$$

$g_\nu \approx 1{,}0$ $\quad$ $g_A \approx 1{,}25$

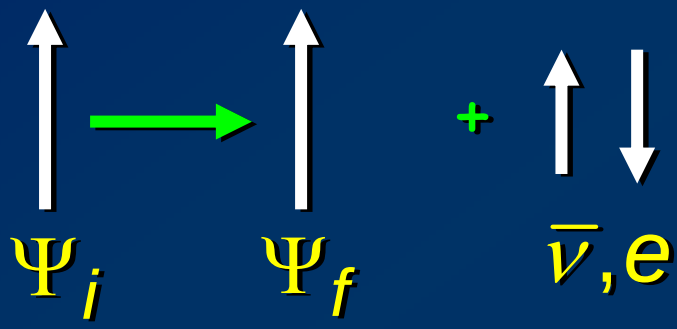
- $M_F = \langle \Psi_f | \tau^{\pm} | \Psi_i \rangle$ Fermi-Übergang
- $M_{GT} = \langle \Psi_f | \sigma\tau^{\pm} | \Psi_i \rangle$ Gamow-Teller-Übergang

Fermi-Übergang

die seltensten
im Periodensystem

$$\Delta I = 0 \qquad \Delta \pi = 0 \qquad \Delta T = 0$$

Übergänge zwischen Mitgliedern desselben Isospin-Multipletts.



(hier: [H,T] = 0)

Beispiel: $^{14}O(0^+) \longrightarrow {}^{14}N^*(0^+,\ 2{,}31\ MeV)$

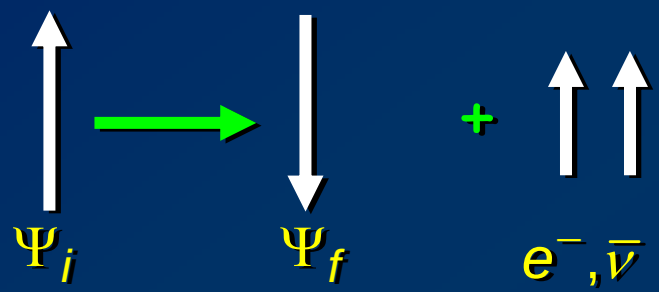
hier: $|M_F|^2 = 2$ keine zusätzlichen Energieabhängigkeiten

Gamow-Teller Übergang

$\Delta I = 0,1$ (Spin-Flip) nicht $0 \longrightarrow 0$

$\Delta \pi = 0$

$\Delta T = 0,1$



Beispiel:

- $^6He(0^+) \longrightarrow {}^6Li(1^+)$
- $n(\uparrow) \longrightarrow p(\downarrow)$

$$|M_{GT}|^2 = 3$$

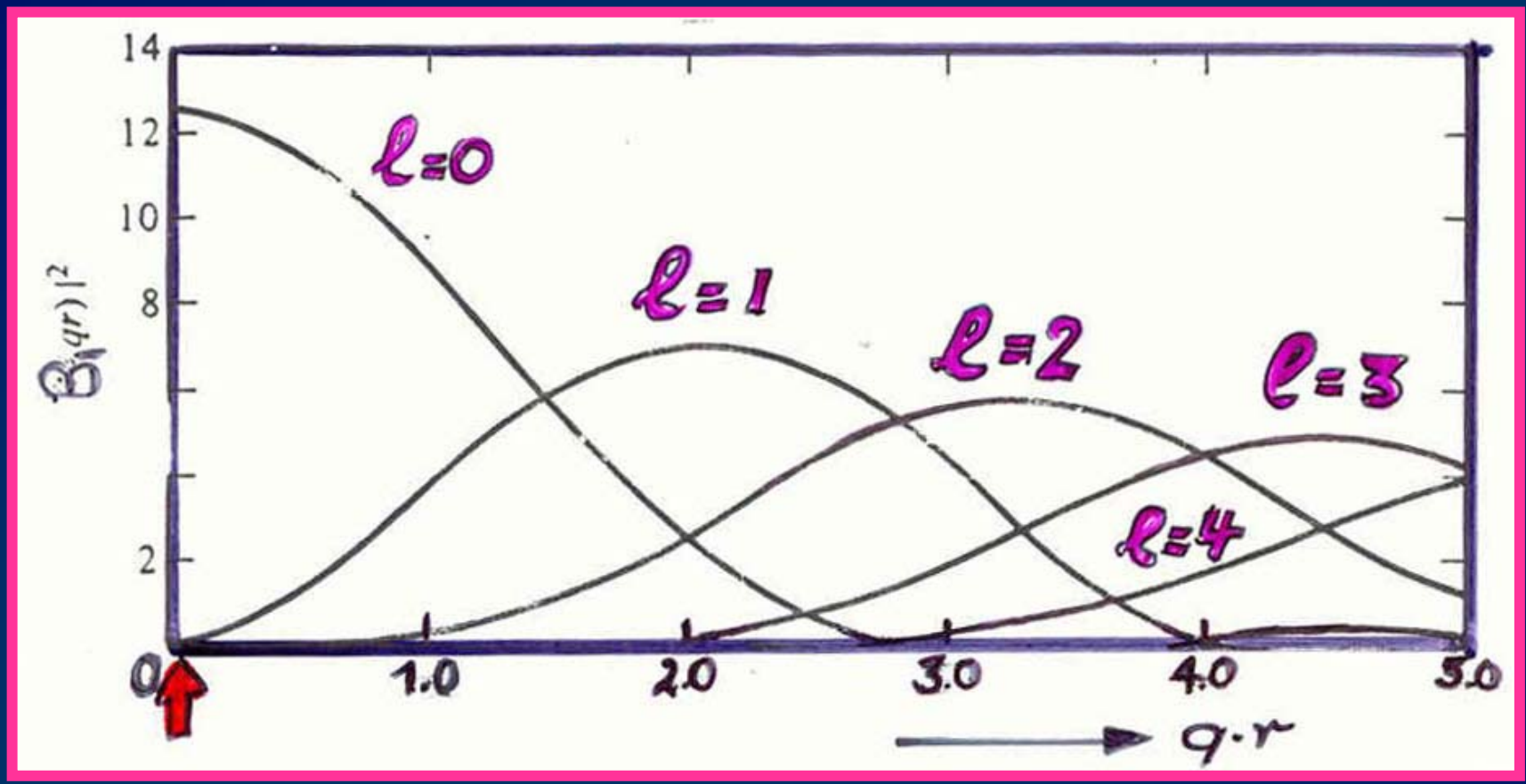
$\Delta I > 0$ -Übergänge werden möglich über die $\ell \neq 0$ -Komponenten der leptonischen Partialwellen. Solche Übergänge sind

ℓ -fach verboten

$$\Delta \pi = (-1)^{\ell}$$

M_F, M_{GT} zeigen komplizierte Energieabhängigkeit

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_{\ell} B_{\ell}(qr) Y_{\ell,0}(\Theta)$$



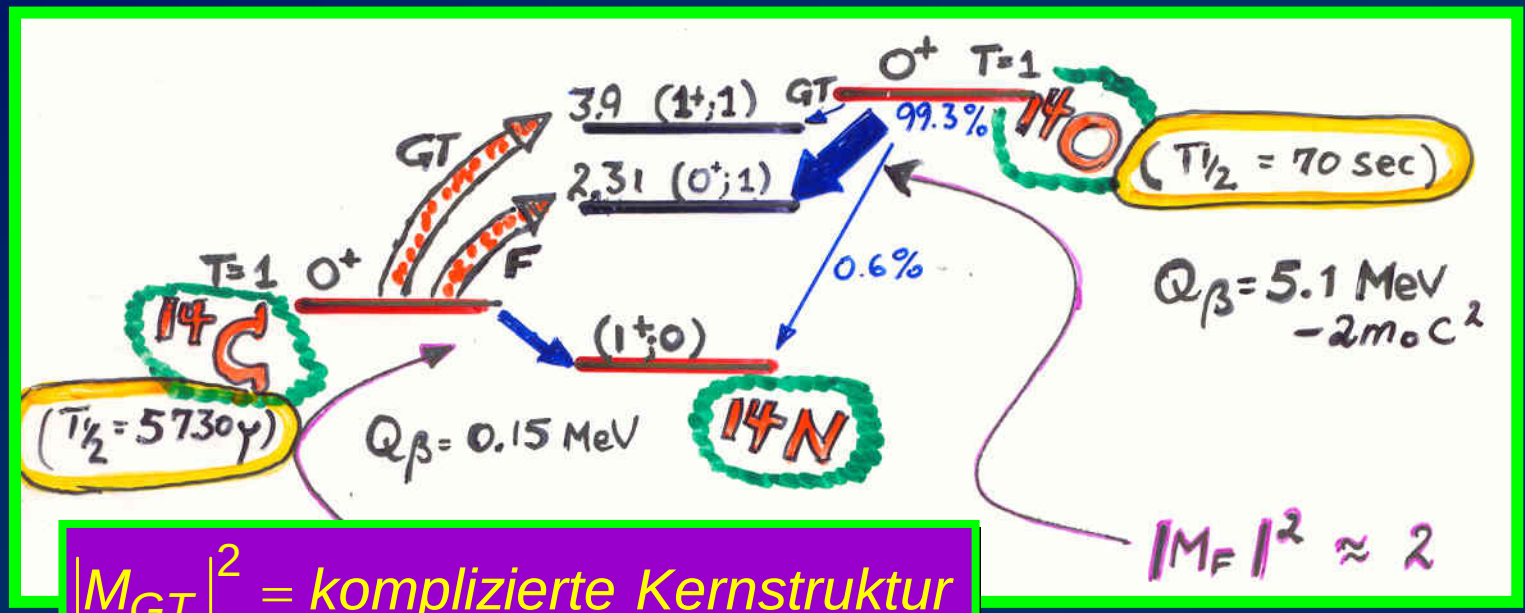
3.6 The functions $|B_{\ell}(qr)|^2$, (From Enge, H., Introduction to Nuclear Physics. Addison-Wesley (1966).)

Beachte: $q \cdot R \approx 1/40$

$R = 5\ fm$

$\hbar c q \sim 1\ MeV$

Beispiel: $^{14}C_{g.s.}(0^+) \longrightarrow {}^{14}N_{g.s.}(1^+)$

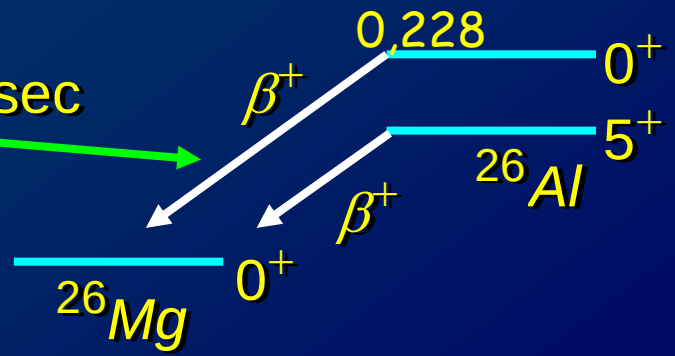


$|M_{GT}|^2$ = komplizierte Kernstruktur

Beispiel: $n \longrightarrow p + e^- \bar{\nu}$

hier: $|M_F|^2 = 1 \quad |M_{GT}|^2 = 3$

Beispiel:

$^{26}Al^*(0{,}228) \longrightarrow {}^{26}Mg_{g.s.}$

$T_{1/2} = 6{,}4$ sec