

Neues Kapitel :

Drehimpulskopplung , Auffüllen von Schalen,
Restwechselwirkung , Paarkräfte.

Bisherige Betrachtung : 1 Valenznukleon
außerhalb einer $J=0$ -Schale

Frage: Wie koppeln 2 (oder mehr) Nukleonen
in einer Schale

Antwort: Im Grundzustand zu $I=0$

Aber: $I=0$ ist nicht die einzige
Kopplungsmöglichkeit.

Denn: für j_1, j_2 gibt es i.a.
 $|j_1 - j_2| \leq I \leq j_1 + j_2$!!

Lösung

Sei $\varphi_{m_1}^{j_1}(1)$ eine Ein-Teilchenwellenfunktion für Teilchen 1 am Ort 1 und $\varphi_{m_2}^{j_2}(2)$ Entsprechend für Teilchen 2

Die Produktwellenfktn Ψ mit einem definierten I, M ist dann eine Linear-Kombination der Produkte $\varphi_{m_1}^{j_1}(1) \cdot \varphi_{m_2}^{j_2}(2)$

$$\Psi_{M}^{I} = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | I M) * \varphi_{m_1}^{j_1}(1) \varphi_{m_2}^{j_2}(2)$$

$$\Psi_M^I = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | I, M) \\ * \varphi_{m_1}^{j_1}(1) \varphi_{m_2}^{j_2}(2)$$

Die Koeffizienten $(j_1, j_2, m_1, m_2 | I, M)$ heißen
VEKTOR-ADDITIONSKOEFFIZIENTEN oder

Clebsch-Gordan Koeffizienten

Für diese Koeffizienten gibt es Rekursionsformeln
(s. Theorie) und tabellierte Werte.

! (siehe auch: Edmonds - Drehimpulse in
der Quantenmechanik - BI-Taschenbücher)

Die C.G.-koeffizienten sind nur dann ungleich
Null wenn gilt:

$$|j_1 - j_2| \leq I \leq j_1 + j_2$$

$$m_1 + m_2 = M$$

ABER

Die Wellenfunktion Ψ^I_M muß noch ordentlich antisymmetrisiert werden

für 2 Teilchen leicht durchzuführen

für $N > 2$ Teilchen etwas kompliziert (Slater-Det.)

für 2 Teilchen

$$\Psi^I_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | I M)$$

$$* \left[\varphi_{m_1}^{j_1}(1) \varphi_{m_2}^{j_2}(2) - \varphi_{m_1}^{j_1}(2) \varphi_{m_2}^{j_2}(1) \right]$$

 Ist $j_1 \neq j_2$ (d.h. die beiden Nukleonen sind in verschiedenen j -Schalen) dann gilt:

$$|j_1 - j_2| \leq I \leq |j_1 + j_2|$$

Beispiel: $j_1 = 5/2$; $j_2 = 3/2$

$$I = 1, 2, 3, 4$$

 Ist $j_1 = j_2 = j$ (d.h. die beiden Nukleonen sind in derselben j -Schale) dann fallen einige Kombinationen von (j_1, j_2) durch die Antisymmetrisierung heraus.

Mögliche Kombinationen:

$$I = 0, 2, 4, \dots, 2j-1$$

 Im Schalenmodell ohne Restwechselwirkung sind alle I -Zustände energetisch entartet.
Das ist real nicht der Fall!!

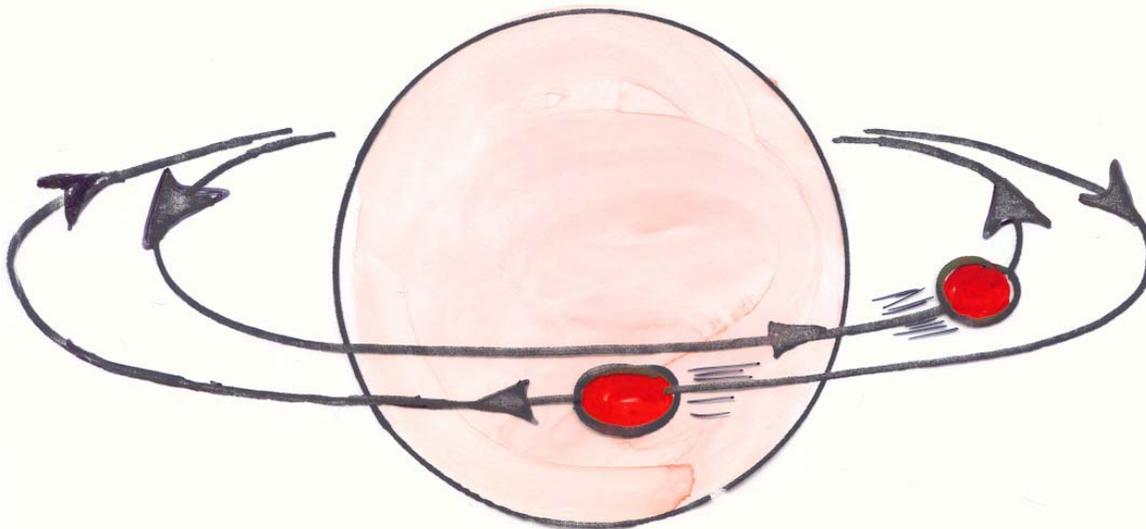
Welcher Art ist die Restwechselwirkung

Offensichtlich ist die Restwechselwirkung entscheidend geprägt durch eine kurzreichweitige Paarungskraft. Sie wirkt nur auf

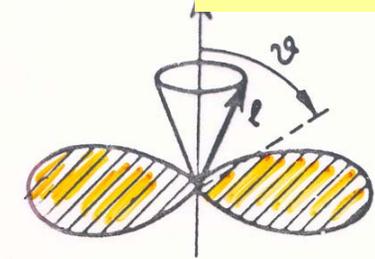
1. gleichartige Nukleonen
2. Nukleonen in derselben j -Schale

tiefere Grund für eine Paarungskraft:

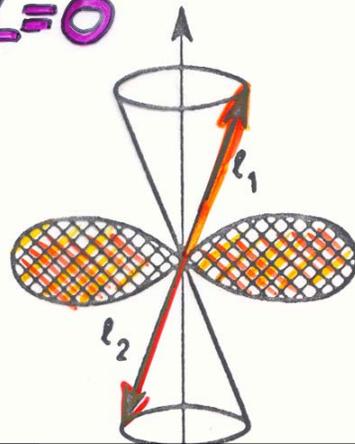
→ Die räumliche Ausdehnung der Wellenfunktion wird durch Paarung minimiert. (Obwohl die Nukleonen entgegengerichtete Orbitale besitzen)



$$1 + 1 = 0 \quad L=0$$



$$|Y_l(\vartheta, \varphi)|^2 \sim \sin^2 \vartheta$$

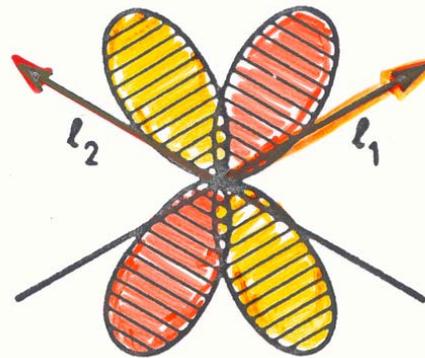
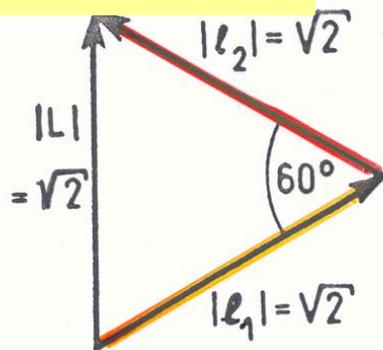


Struktur

der Wellenfkt

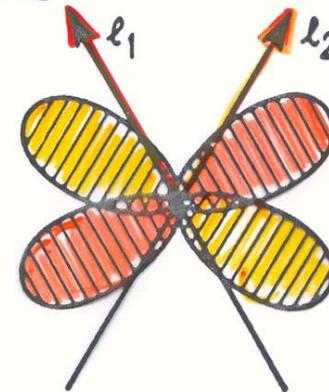
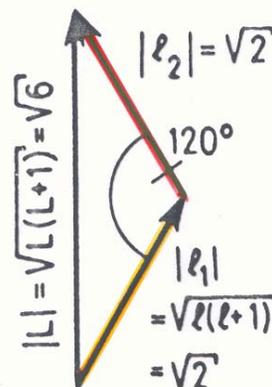
bei Paarung

$$1 + 1 = 1 \quad L=1$$



$$L=2$$

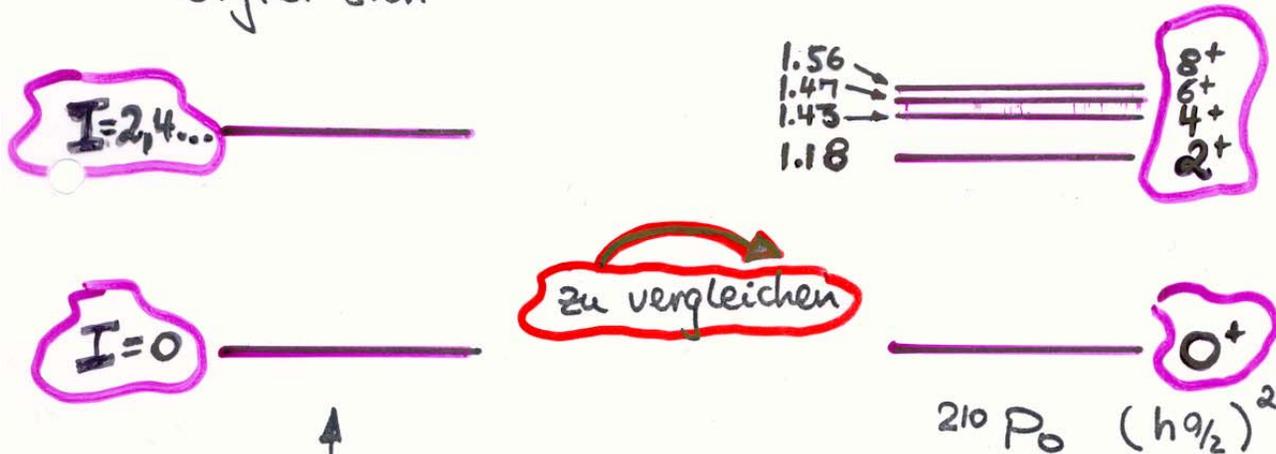
$$1 + 1 = 2$$



einfachster Ansatz für eine Paarkraft:

$$V = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Entwicklung nach Partialwellen & Berechnung der Matrix-Elemente (Aufgabe eines Kerntheoretikers) ergibt sich

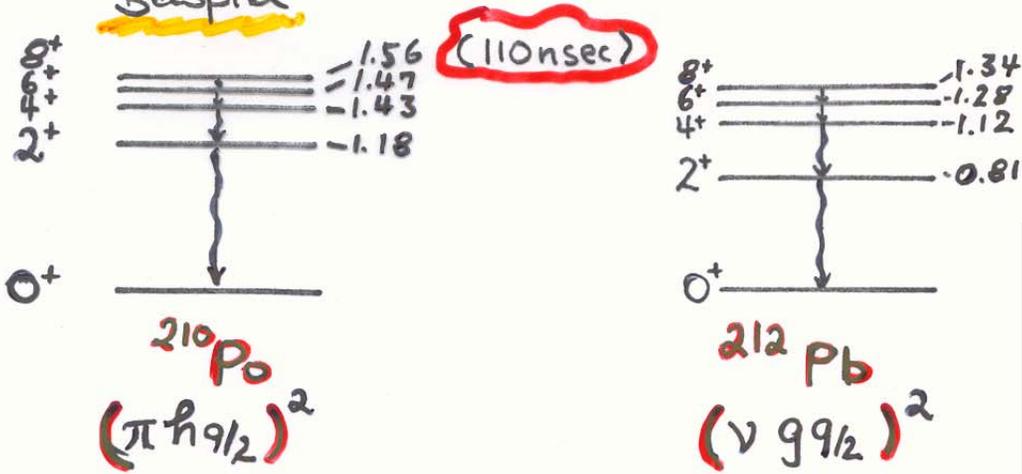


Absenkung des $I=0$ Niveaus
(exp.-Wert ~ 1.5 MeV)

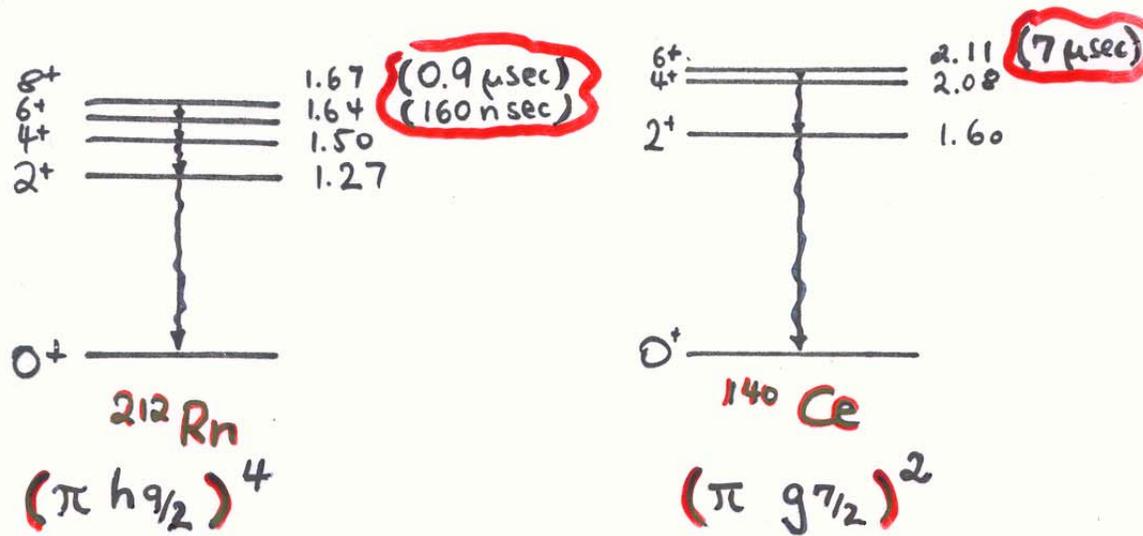
- Die Entartung der $I > 2$ -Zustände wird durch andere (allerdings dann sehr kleine)
- Restwechselwirkungsterme aufgehoben.

- Absenkung des 0^+ -Niveaus und die verbleibende "Beinah-Entartung" der $2^+, 4^+ \dots$ -Zustände ist besonders auffällig bei hohen j -Schalen

Beispiel



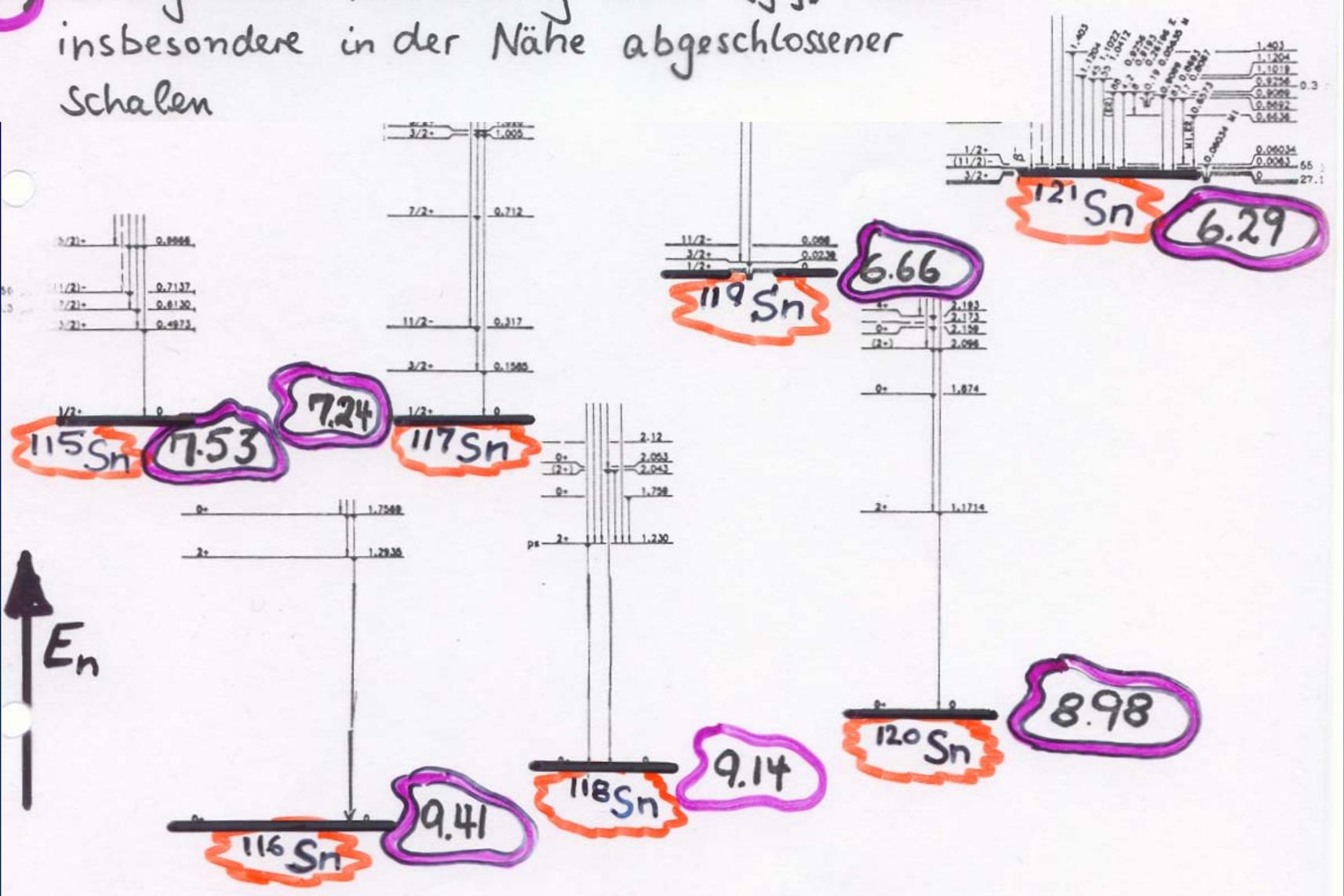
**Energielücke
ca. 1 – 2 MeV**



Weitere Manifestationen der Paarkraft

- 1.) energetische Absenkung aller (gg) -kerne insbesondere in der Nähe abgeschlossener Schalen
- 2.) Niedrig liegende 2^+ -Zustände, die nicht kollektiv sind und nicht Ein-Teilchen-Struktur haben im Sinne des Schalenmodells

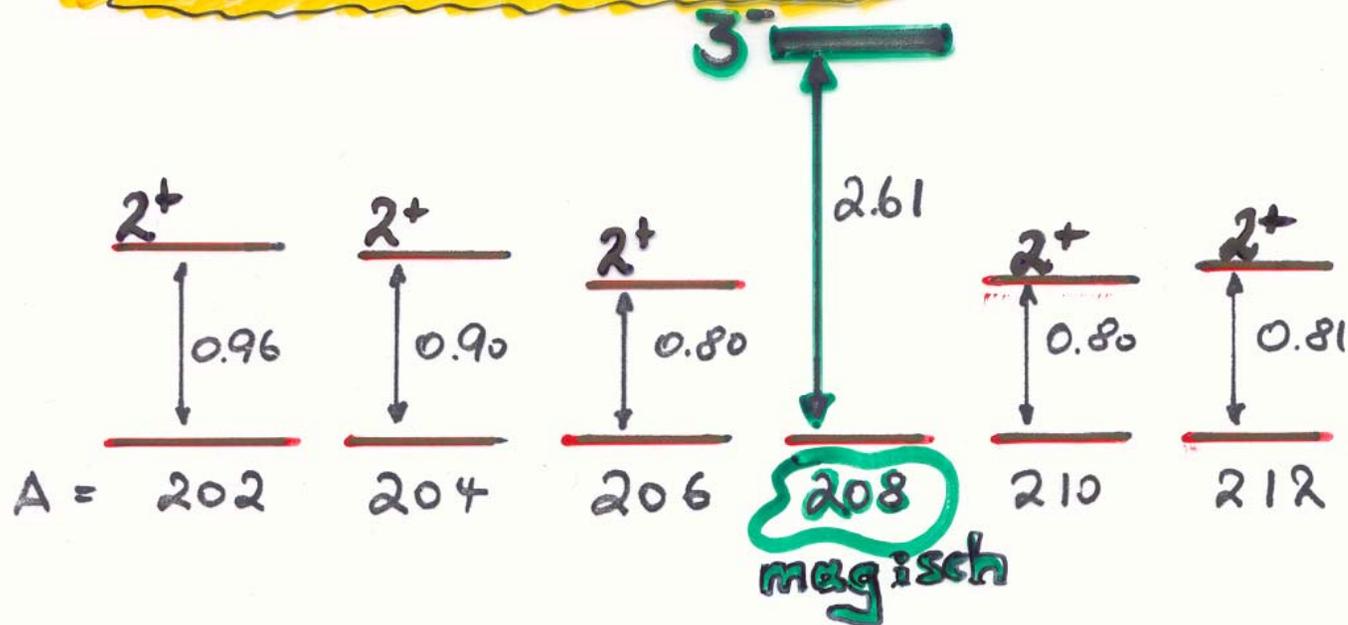
1. energetische Absenkung aller (gg)-kerne insbesondere in der Nähe abgeschlossener Schalen



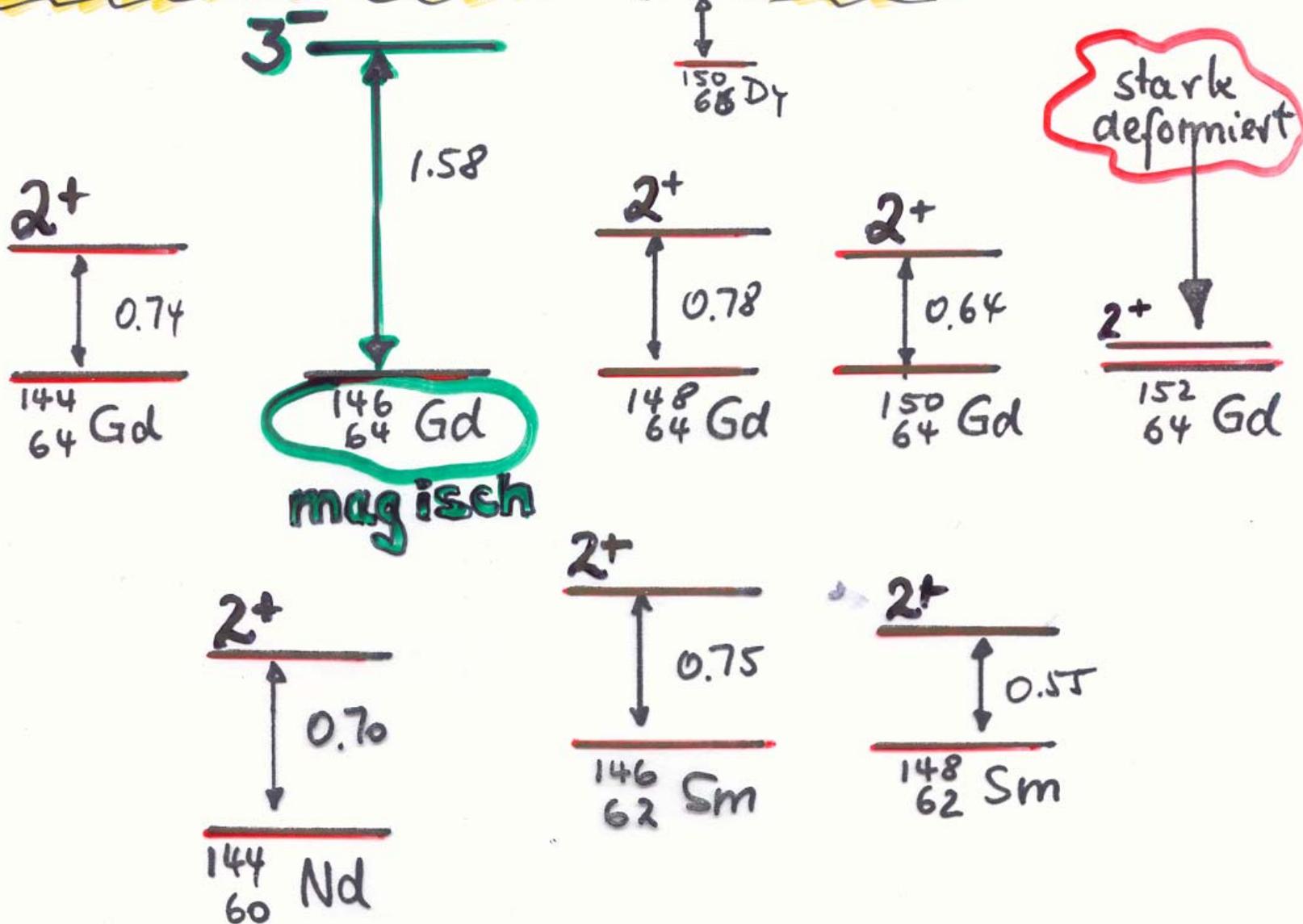
Beispiel: Neutronen - Separationsenergie bei Sn - Isotopen.

2.) Niedrig liegende 2^+ -Zustände, die nicht kollektiv sind und nicht Ein-Teilchen-Struktur haben im Sinne des Schalenmodells

Beispiel: Pb-Isotope

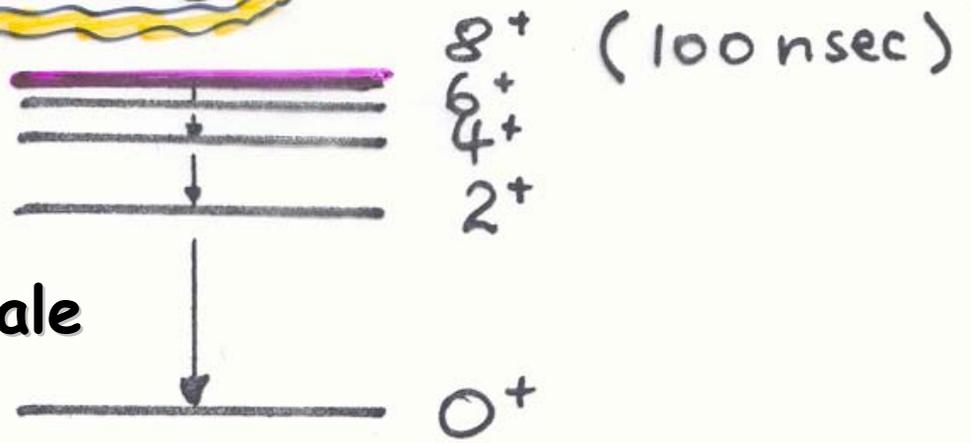


Beispiel : $^{146}_{64}\text{Gd}$ und Umgebung



3) Häufiges Auftreten von isomeren Zuständen bei parallel gekoppeltem Spin mit $|j_1 + j_2|$ groß.
 (Folge der Beinahentartung)

Beispiel: ^{210}Po



$(^{208}\text{Pb} + 2p \text{ in } h_{9/2} \text{ Schale})$

4. Plötzlicher Übergang zu starker Deformation als Funktion der Nukleonenzahl, nachdem zunächst runde Konfiguration lange beibehalten wird
d.h. Gegenspieler der Paarung ist die zunehmende Tendenz zur Deformation

5. Plötzlicher Aufbruch von Paaren unter dem Einfluß starker Rotation (Backbending)
(Folge von Corioliskräften)



Auffüllen der j -Schalen im sphärischen Schalenmodell.

Beispiel: 2 Teilchen

$$\Psi_M^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1} \sum_{m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | I M) *$$

$$* \left[\varphi_{m_1}^{j_1}(1) \varphi_{m_2}^{j_2}(2) - \varphi_{m_1}^{j_1}(2) \varphi_{m_2}^{j_2}(1) \right]$$

Zur Wiederholung

$$= \det \begin{pmatrix} \varphi^{(1)}(1) & \varphi^{(1)}(2) \\ \varphi^{(2)}(1) & \varphi^{(2)}(2) \end{pmatrix}$$

Determinanten-Schreibweise
sichert korrekte Anti-Symmetrie
auch für $N > 2$

• Für $j_1 = j_2 = j$

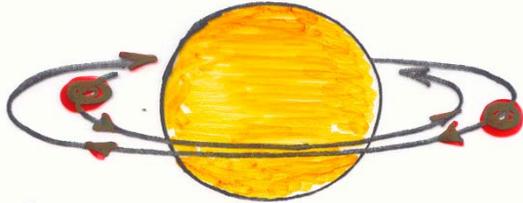
$$> I = 0, 2, 4 \dots 2j-1$$

• Alle I -Zustände sind entartet da

$$h_j \varphi_j = \epsilon_j \varphi_j ; \epsilon_{j_1} = \epsilon_{j_2} = \epsilon_j$$

2. Aufhebung der Entartung durch Restwechselwirkung.

- kurzreichweitige Paarkraft



$$I_{\text{ges}} = 0 !!$$

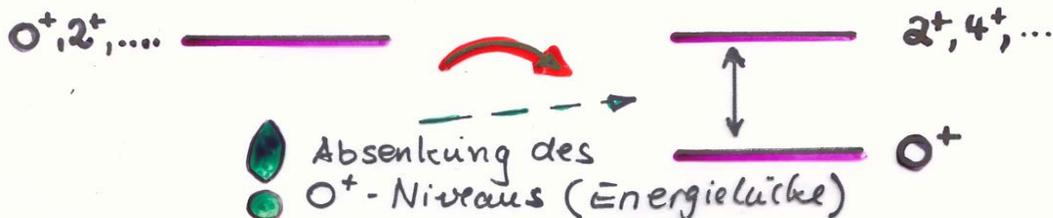
Grund: Minimierung der räumlichen Ausdehnung der Wellenfunktn.

Experimentelle Hinweise:

- ① Absenkung der $I=0$ Niveaus (hier bei gg -Kernen)
- ② niedrig-liegende 2^+ -Zustände für Kerne in der Nähe abgeschlossener Schalen, die als Paar-Aufbrüche interpretiert werden.

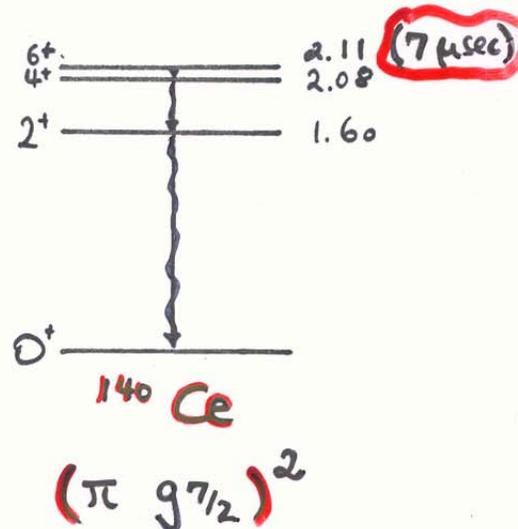
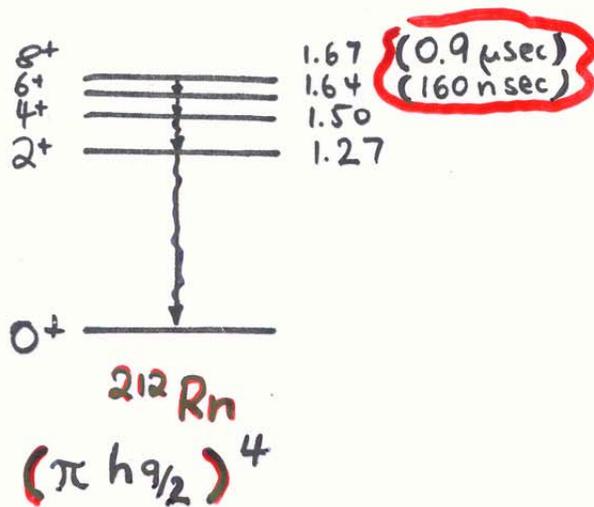
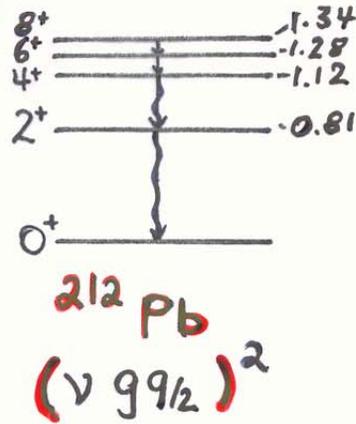
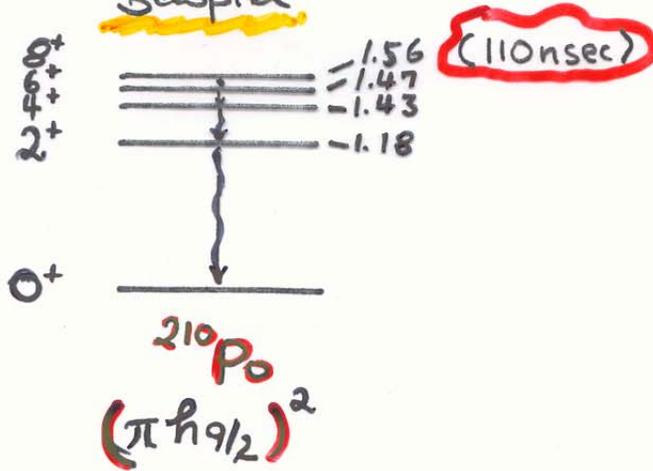
- einfachster Ansatz für Paarkraft

$$V = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$



● Absenkung des 0^+ -Niveaus und die verbleibende "Beinah-Entartung" der $2^+, 4^+ \dots$ -Zustände ist besonders auffällig bei hohen j -Schalen

Beispiel



Weiterer Effekt der Paarkraft

- Nach einfacher Vorstellung im Rahmen des S.M., sollte ein Hinzufügen von Nukleonen in Bahnen außerhalb abgeschlossener Schalen zu einem sukzessiven Abweichen von einer kugelsymmetrischen Massenverteilung führen (insbesondere wenn j groß)

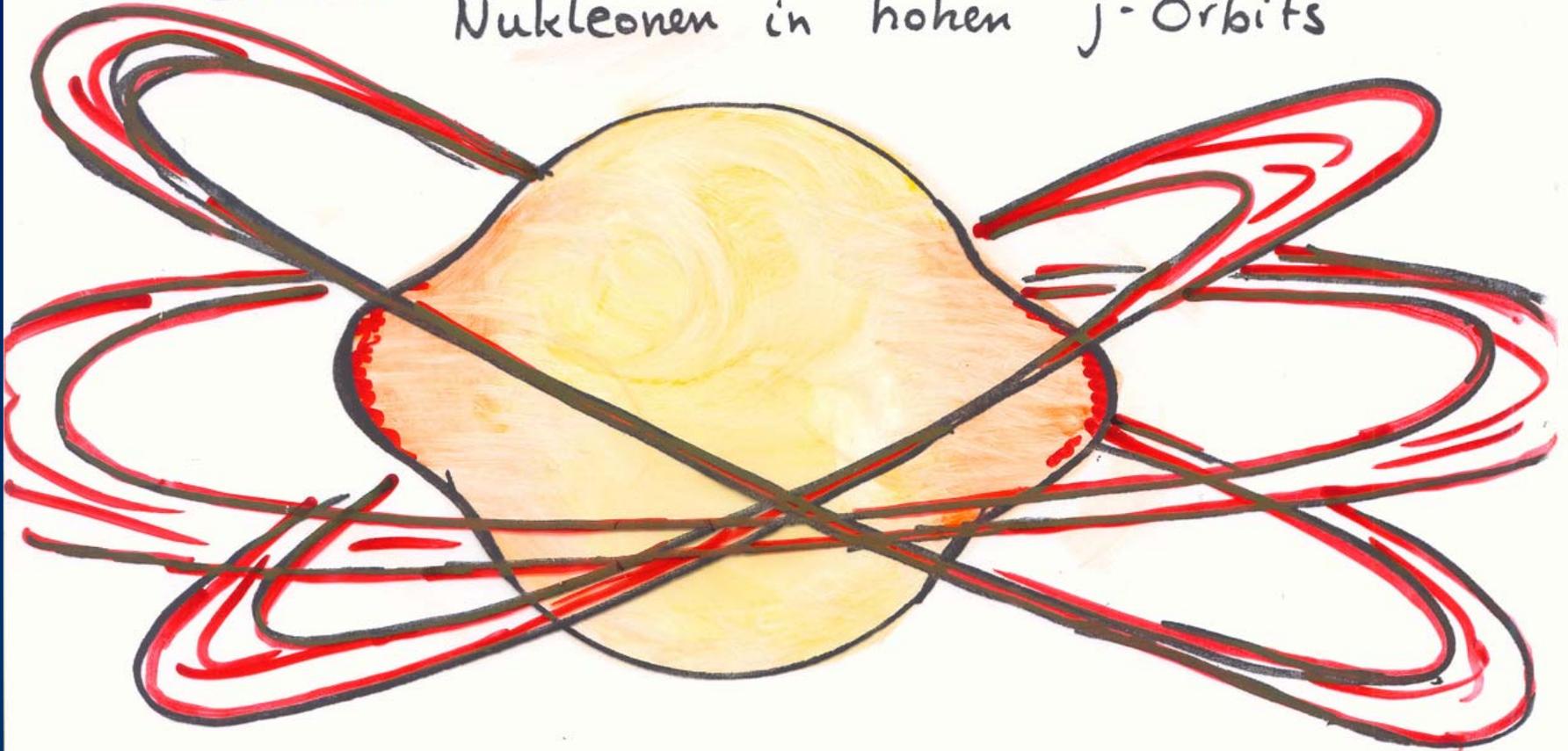
Die Paarkraft favorisiert jedoch zunächst die Kugelsymmetrie (zumindest in der Nähe von magischen Konfigurationen)

ABER DANN

rascher Übergang in Konfigurationen mit starker
und stabiler

DEFORMATION

Grund: Rumpf-Polarisation aufgrund von
Nukleonen in hohen j -Orbits



Diese Vorstellung ist:

qualitativ richtig

da sie die großen experimentellen **Quadrupol-Momente** erklärt.

Beispiel:

175 Lu: $N = 104$, $Z = 71$ Schalenmitte

$$Q_{\text{exp}} := +560 \text{ fm}^2$$

$$Q_{\text{s.m.}} := -25 \text{ fm}^2$$

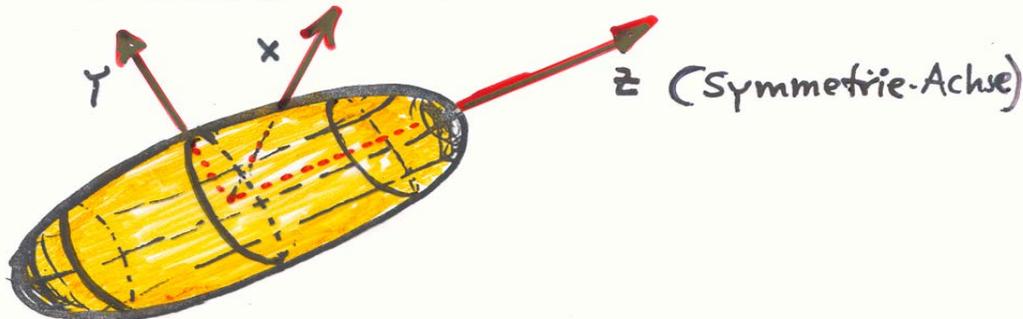
209 Bi: $N = 126$, $Z = 83$ magisch!

$$Q_{\text{exp}} := -35 \text{ fm}^2$$

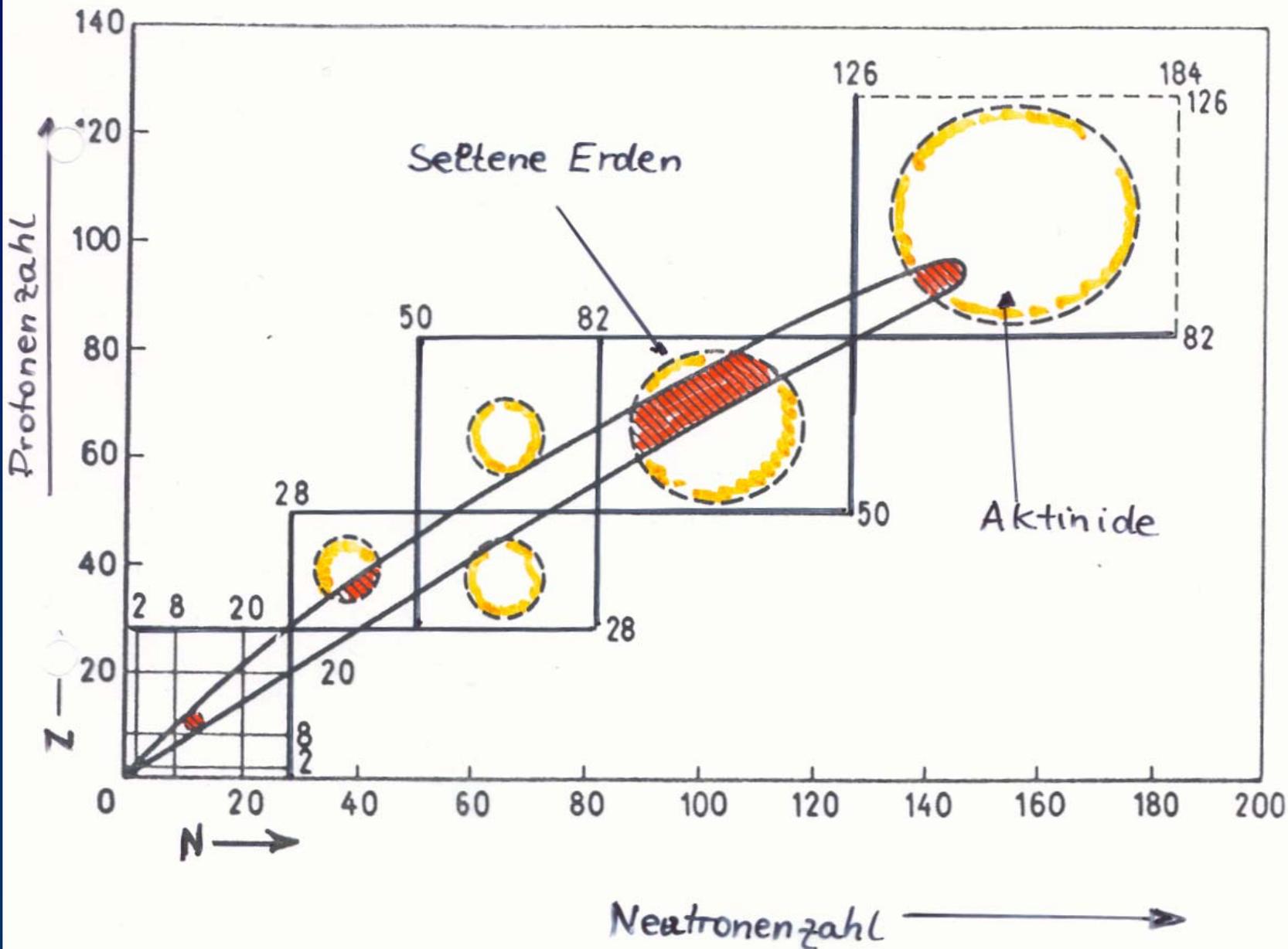
$$Q_{\text{s.m.}} = -30 \text{ fm}^2$$

quantitativ unvollständig

da fast alle stark deformierten Kerne im Grundzustand **PROLAT** sind



Gebiete starker Kerndeformationen



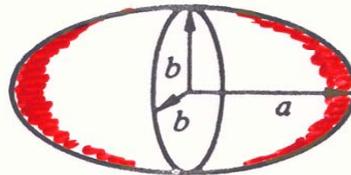
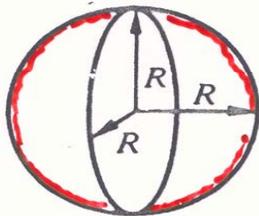
Phänomenologische Formulierung innerhalb
eines modifizierten Schalenmodells

Nilsson-Modell (1955)

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x, y, z) - \zeta \vec{L} \cdot \vec{S} - D \vec{L}^2$$

$V(x, y, z)$ - deformiertes Oszillator-Potential.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$



$$a = R(1 + \epsilon)$$

$$b = R/(1 + \epsilon)^{1/2}$$

$$\text{Vol.} = \frac{4\pi}{3} ab^2$$

ϵ klein

$$\omega_x = \omega_y = \omega_0 \sqrt{1 + \epsilon} \quad (= \omega_0 R/b)$$

$$\omega_z = \omega_0 \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right) \quad (= \omega_0 R/a)$$

häufig auch ($\delta \sim \frac{3}{2} \epsilon$)

$$\omega_x = \omega_y = \omega_0(\delta) \left(1 + \frac{1}{3} \delta \right)$$

$$\omega_z = \omega_0(\delta) \left(1 - \frac{2}{3} \delta \right)$$

$$\omega_0(\delta) = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{9} \delta^2 \right)$$

$$\omega_x \omega_y \omega_z = \omega_0^3$$

Inkompressibilitätsbedingung

$$\zeta \vec{L} \cdot \vec{S}$$

Spin · Orbit Kraft (wie im sphär. S.M.)

$$D \cdot \vec{L}^2$$

phänomenologische Begründung:

hohe L-Orbits sind nahe der Oberfläche

- > Erhöhung der nuklearen Dichte in der Nähe der Oberfläche
- > zusätzliche Attraktivität

$$D = 0 \text{ für Schalen } N = 0, 1, 2$$
$$\approx \text{const für Schalen } N \geq 3$$

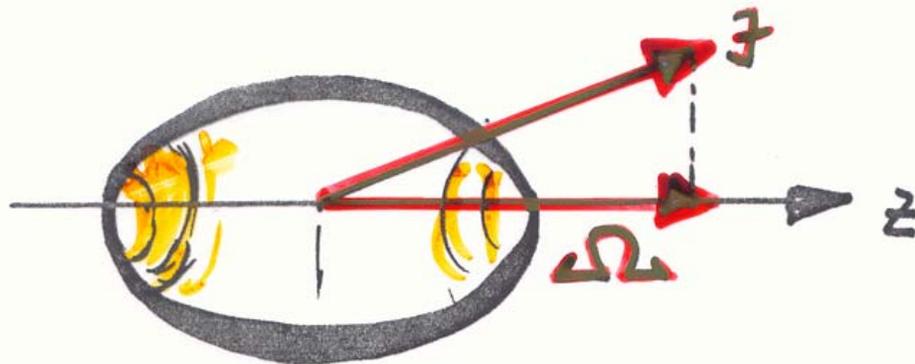
Details des Nilsson-Modells nur im Rahmen einer Kerntheorie Vorlesung behandelbar

Hier nur die Ergebnisse:

① die j -Schalen Entartung des sphärischen S.M. wird aufgehoben

② im Nilsson-Modell gibt es nur noch zwei gute Quantenzahlen:

- Ω - Projektion von j_z auf die innere Achse
- π - Parität



③ bei kleinen Deformationen lassen sich die Niveaus weiterhin mit den Quantenzahlen l, j des isotropen harmonischen Oszillators numerieren.

④ bei großen Deformationen ($\delta \geq 0.3$) lassen sich die Niveaus mit den ("guten") Quantenzahlen des anisotropen harmonischen Oszillators klassifizieren.
(asymptotische Quantenzahlen)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(n_z, n_\rho, m) &= \hbar \omega_z (n_z + \frac{1}{2}) \\ &\quad + \hbar \omega_x (2n_\rho + m + 1) \end{aligned}$$

$$N = n_z + 2n_\rho + m$$

Nilsson-Niveau:

$$\Omega^\pi [N n_z m]$$

Osz. Q. Z.

5

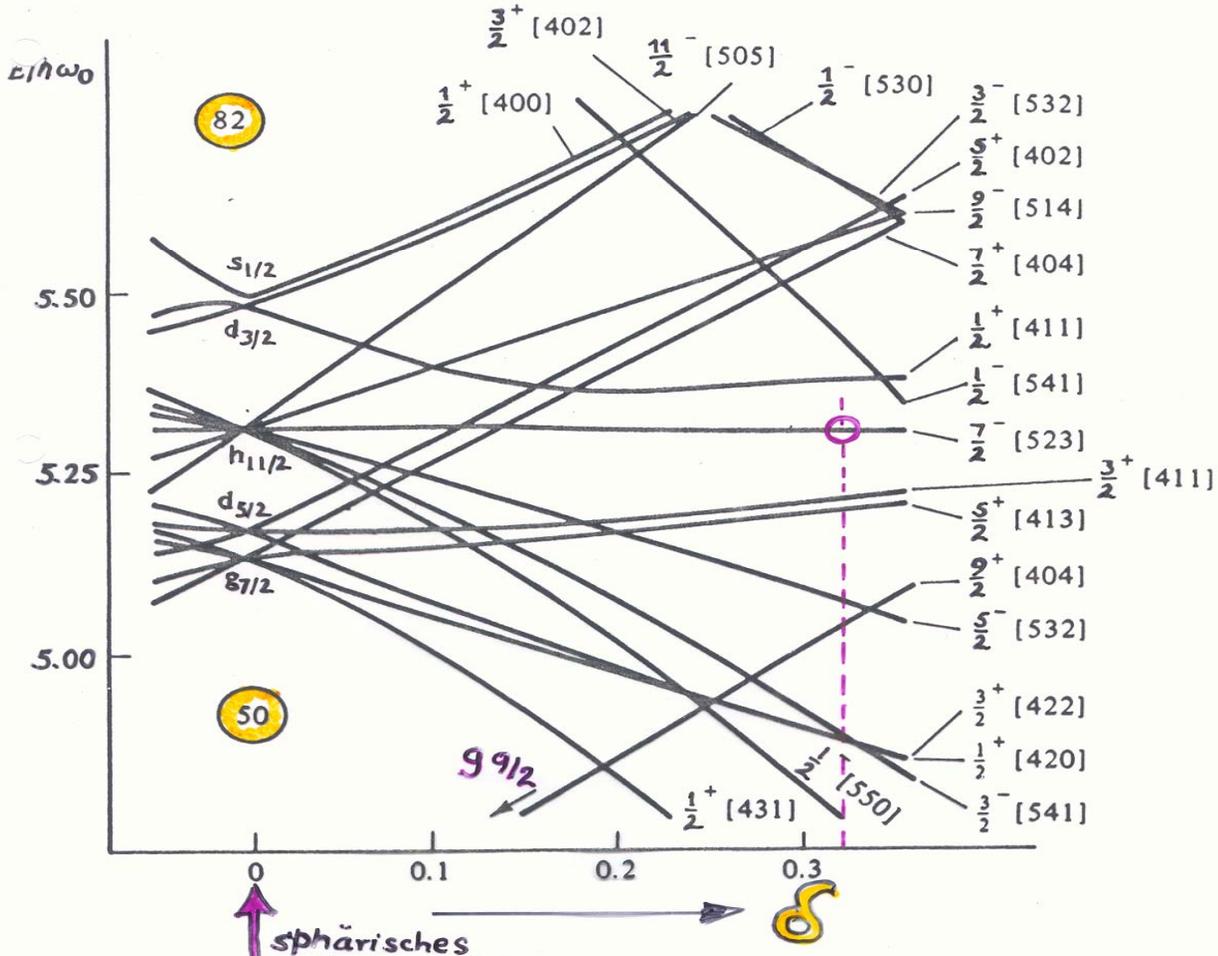
Das Nilsson-Modell sagt richtige Grundzustands - Spinwerte voraus, insbesondere bei kernen zwischen abgeschlossenen Schalen

Hier versagte das einfache Schalenmodell

Beispiel:

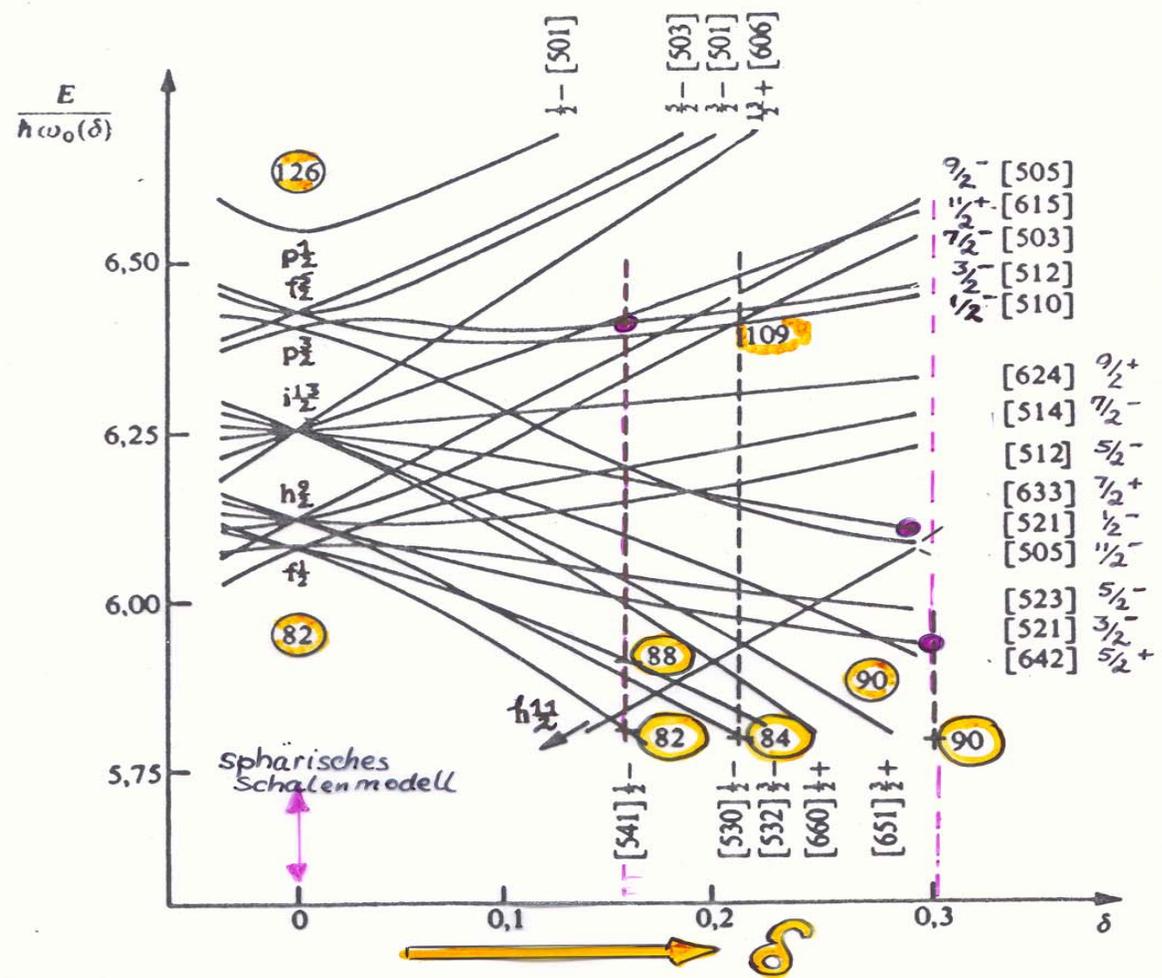
${}_{67}^{165}\text{Ho} : Q = 350 \text{ fm}^2$
 $> \delta = 0.32$

$I_{g.s.} = 7/2^- [523]$



Weitere Beispiele:

- $^{189}\text{Os}_{113}$: $\delta = 0.16$ $I_{\text{exp}} = \frac{3}{2}^- [512]$
- $^{155}_{64}\text{Gd}_{91}$: $\delta = 0.31$ $I_{\text{exp}} = \frac{3}{2}^- [521]$
- $^{171}\text{Yb}_{101}$: $\delta = 0.29$ $I_{\text{exp}} = \frac{1}{2}^- [521]$





Das Nilsson-Modell gibt eine gute Beschreibung der Grundzustandsdeformationen (Q-Momente)

