

Geometrische Überlegungen bei der Addition von Drehimpulsen

bisher saloppe Vorstellung:

$$\vec{j} = \vec{\ell} \pm \vec{s} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \uparrow + \uparrow = \uparrow \\ \ell + s = j \\ \uparrow - \downarrow = \uparrow \end{array} \right.$$

ABER:

$$m_j = j, (j-1, j-2, \dots)$$

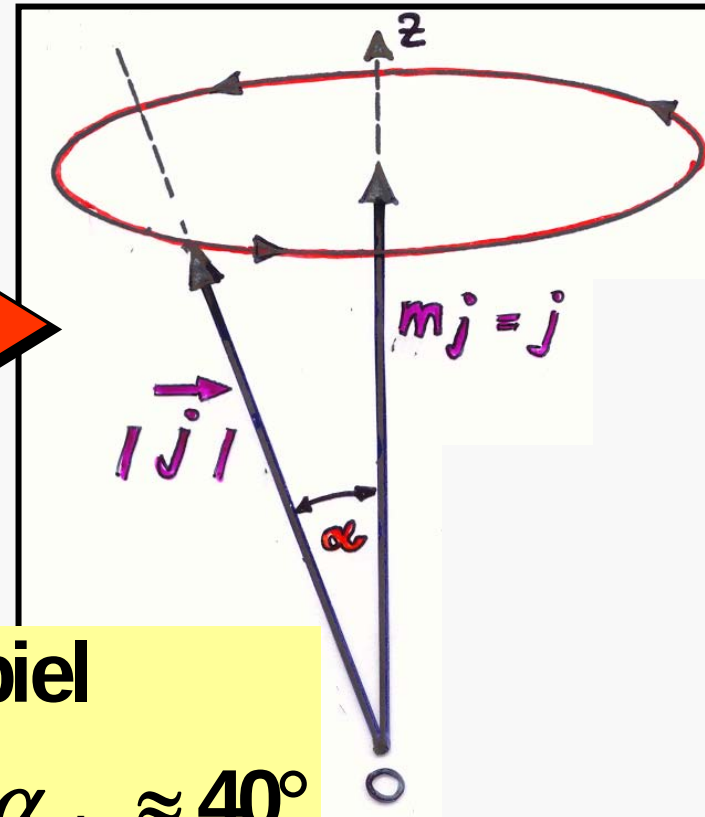
$$j = \sqrt{j(j+1)} > j$$

$$\cos \alpha = \frac{m_j}{|j|} = \frac{m_j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

$$\min(\cos \alpha) = \frac{j}{\sqrt{j+1}}$$

Beispiel

$$j = \frac{3}{2} \rightarrow \alpha_{\min} \approx 40^\circ$$



Frage:

Im SM sind j, l, s, m_j
gute Quantenzahlen mit

!

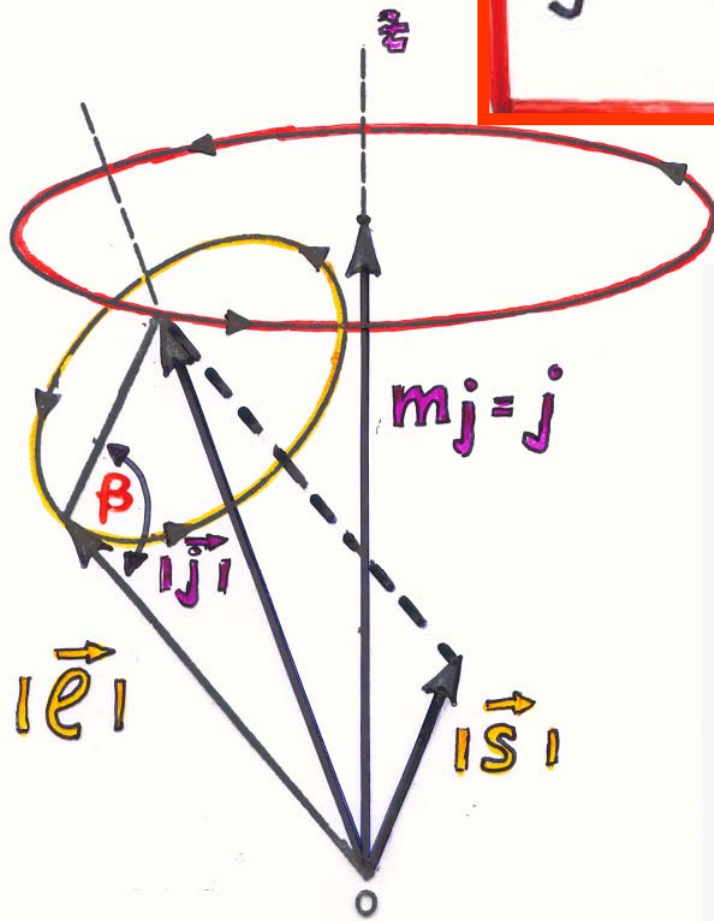
$$\begin{aligned}j^2 | \dots \rangle &= j(j+1) | \dots \rangle \\l^2 | \dots \rangle &= l(l+1) | \dots \rangle \\s^2 | \dots \rangle &= s(s+1) | \dots \rangle \\m_j | \dots \rangle &= j, (j-1), (j-2) \dots | \dots \rangle\end{aligned}$$

Wie orientieren sich $\vec{l}$, $\vec{s}$ und $\vec{j}$
für $\vec{j} = \vec{l} \pm \vec{s}$?

$$|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)} ; |\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)} \\ |\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}$$

$$|\vec{j}| = \sqrt{j(j+1)} ; |\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}$$



Siehe auch:
 m_l, m_s
 können keine
 guten Q.z.
 sein, da ihre
 Werte von der
 Größe & der
 Orientierung von
 $\vec{j}$ abhängen



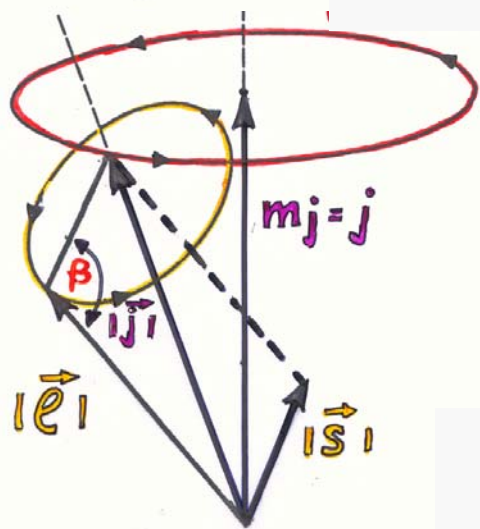
Wie groß ist β für $j = l + \frac{1}{2}$
 $j = l - \frac{1}{2}$.

Lösung

$$\vec{j}^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 - 2|\vec{l}||\vec{s}|\cos\beta$$

$$> j(j+1) = l(l+1) + s(s+1) - 2\sqrt{l(l+1)s(s+1)}\cos\beta$$

$$\cos\beta = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{l}{l+1}} & j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{l+1}{l}} & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$



Beispiel:

$$j = 3/2 ; l = 1$$

$$\beta = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{6}}) = \underline{114^\circ}$$

$$j = 1/2 ; l = 1$$

$$\beta = \arccos(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \underline{35^\circ}$$

Das magnetische Moment

Zur Erinnerung

In der E-Dynamik erzeugt ein rotierendes geladenes Teilchen ein magnetisches Dipolmoment, das mit dem Drehimpuls des Teilchens verknüpft ist



A diagram showing a circular loop with a counter-clockwise arrow indicating rotation. A central vector points to the right, representing the magnetic dipole moment $\vec{\mu}$. Below the diagram is the equation $\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \vec{J}$, where $\vec{J}$ is the angular momentum vector.

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \vec{J}$$

In der Kernphysik:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N c}$$

nuklear Magneton

$$\vec{\mu} = g \mu_N \vec{J}$$

g-Faktor
bereits eingeführt
beim Deuteron

Für einen rein orbitalen Strom ist:

$$g_e = \begin{cases} 1 & \text{für Proton} \\ 0 & \text{für Neutron} \end{cases}$$

ABER!

Nukleonen haben auch ein Spin magnetisches Moment

Das über den Spin des Nukleons gekoppelte magnetische Moment ist

$$\mu_p = g_s^p \mu_N \cdot S = 2.79 \mu_N$$

$$\mu_n = g_s^n \mu_N \cdot S = -1.91 \mu_N$$

$$> g_s^p = 5.58$$

$$> g_s^n = -3.82$$

Nach unserem Schalenmodell wird das magnetische Moment eines Kerns bestimmt durch das nicht spin-abgesättigte Leuchtnukleon

$$> \mu_{\text{kern}} = g_{\text{kern}} \mu_N \cdot J_z^{\text{max}}$$

maximale Ausrichtung
des Drehimpulses

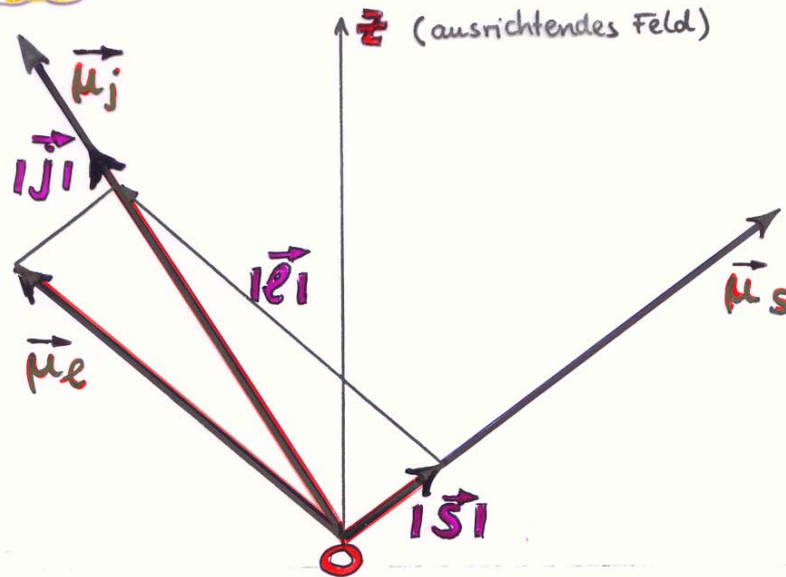
Da aber Spin- und orbitaler Drehimpuls beim magnetischen Moment verschieden gewichtet werden, und m_l, m_s keine guten Quantenzahlen sind, ist

$$\mu_{\text{kern}} \neq (g_l l_z^{\text{max}} + g_s s_z^{\text{max}}) \mu_N$$

geometrische Darstellung der
Verhältnisse bei der Addition
der magnetischen Momente

(klassisch
&
quantum.)

schematisch



① Wegen Präzession liefert nur die zu (Oz) parallele Komponente einen meßbaren Effekt

② Projektion auf die j -Achse liefert

$$\mu_j = g_e |\vec{l}| \cos(\vec{l}, \vec{j}) + g_s |\vec{s}| \cos(\vec{s}, \vec{j})$$

③ Projektion auf ausrichtende (Oz) -Achse liefert

$$\mu = [g_e |\vec{l}| \cos(\vec{l}, \vec{j}) + g_s |\vec{s}| \cos(\vec{s}, \vec{j})] \cos(\vec{j}, Oz)$$

in Einheiten von μ_N

Projektion auf die j -Achse liefert

$$\mu_j = g_e |\vec{\ell}| \cos(\vec{\ell}, \vec{j}) + g_s |\vec{s}| \cos(\vec{s}, \vec{j})$$

Projektion auf ausrichtende (Oz) -Achse liefert

$$\mu = [g_e |\vec{\ell}| \cos(\vec{\ell}, \vec{j}) + g_s |\vec{s}| \cos(\vec{s}, \vec{j})] \cos(\vec{j}, Oz)$$

↑ in Einheiten von μ_N

mit:

$$|\vec{s}|^2 = |\vec{j}|^2 + |\vec{\ell}|^2 - 2 \vec{j} \cdot \vec{\ell}$$

oder

$$s(s+1) = j(j+1) + \ell(\ell+1) - 2 |\vec{j}| |\vec{\ell}| \cos(\vec{j}, \vec{\ell})$$

$$> \underline{|\vec{\ell}| \cos(\vec{j}, \vec{\ell})} = \frac{1}{2 |\vec{j}|} (j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1))$$

entsprechend

$$> \underline{|\vec{s}| \cos(\vec{j}, \vec{s})} = \frac{1}{2 |\vec{j}|} (j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1))$$

$$> \underline{\cos(\vec{j}, Oz)} = \frac{j}{|\vec{j}|} = \frac{j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

insgesamt:

$$\mu = \frac{1}{2(j+1)} \left\{ g_e [l(l+1) + j(j+1) - s(s+1)] \right. \\ \left. + g_s [s(s+1) + j(j+1) - l(l+1)] \right\}$$

$$\text{für } j = l + \frac{1}{2} \quad \underline{\mu_{l+\frac{1}{2}} = l g_e + \frac{1}{2} g_s}$$

$$\text{für } j = l - \frac{1}{2} \quad \underline{\mu_{l-\frac{1}{2}} = \frac{j}{j+1} \left\{ (l+1) g_e - \frac{1}{2} g_s \right\}}$$



äquivalente q.m. Ableitung

$$\vec{\mu}_{op} = g_l \vec{l} + g_s \vec{s}$$

$$\mu = \langle j, m_j=j | \vec{\mu}_{op} | j, m_j=j \rangle$$

oder :

$$\vec{\mu} = \frac{(\vec{\mu}_{op} \cdot \vec{j})}{|\vec{j}|} \frac{\vec{j}_z}{|\vec{j}|}$$

↑
Projektion auf $\vec{j}$

↑
Projektion auf j_z

damit zu berechnen: $\underbrace{\vec{l} \cdot \vec{j}, \quad \vec{s} \cdot \vec{j}}_{\text{trivial}}, \text{ usw}$

Einsetzen von Werten führt zu den sogenannten Schmidt-Linien.

Für Valenznukleon = **PROTON**

$$g_e = 1$$

$$\mu = \begin{cases} (j - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} g_s & j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1} (j + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} g_s) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für Valenznukleon = **NEUTRON**

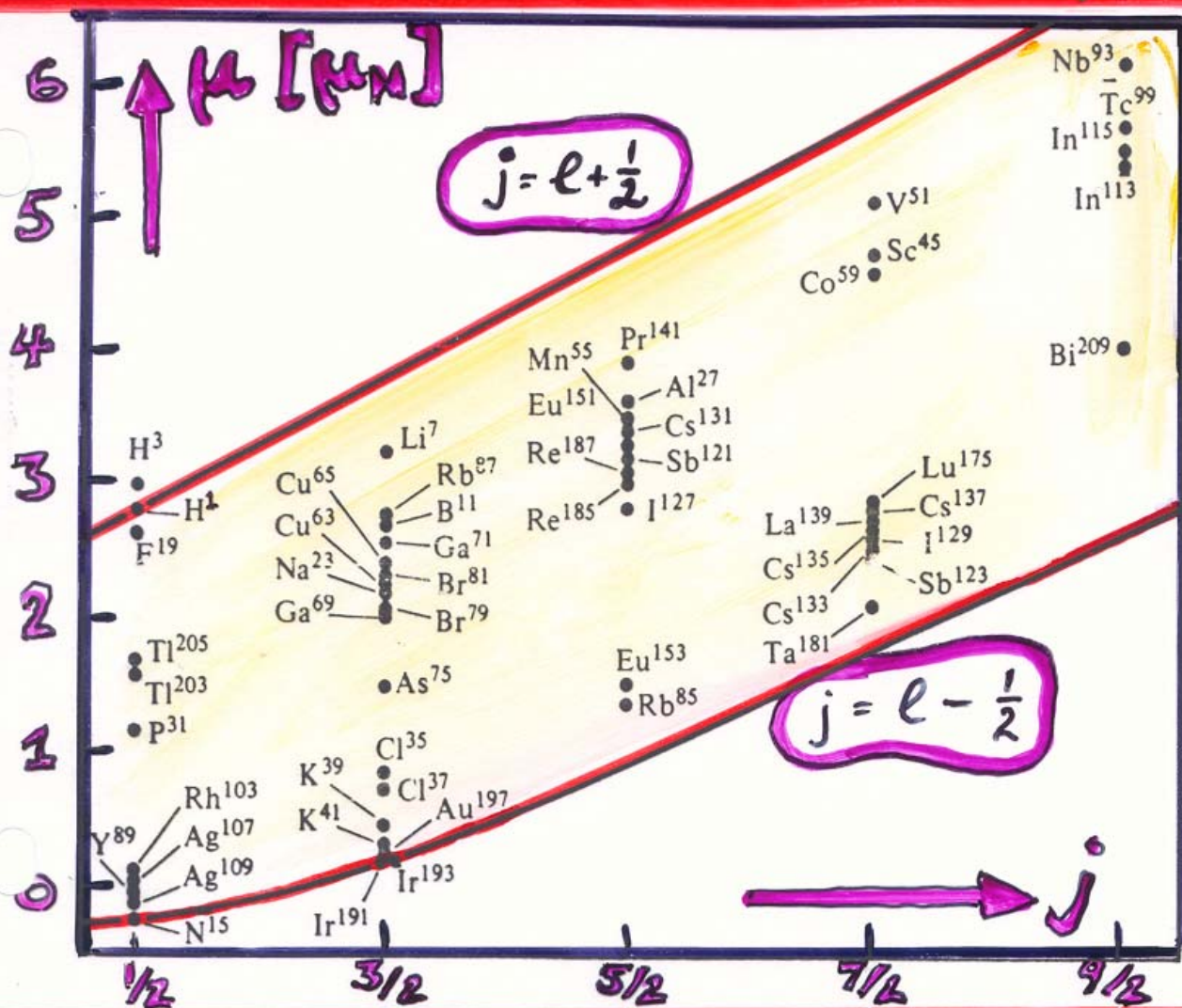
$$g_e = 0$$

$$\mu = \begin{cases} \frac{1}{2} g_s & j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1} \frac{g_s}{2} & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Proton :

$$g_e = 1$$

$$\mu = \begin{cases} (j - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} g_s & j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1} (j + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} g_s) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$



ungepaartes Proton

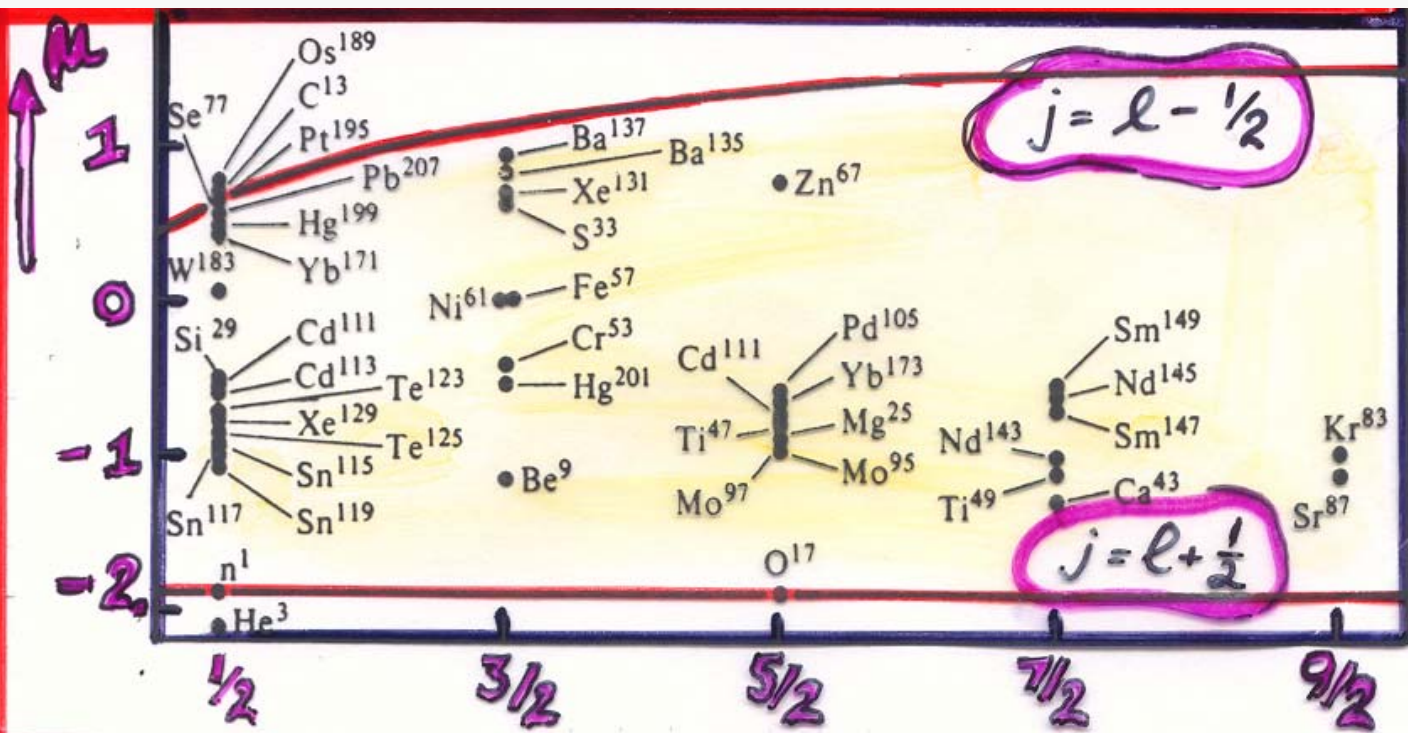
Schmidt-Linien

Neutron: $g_e = 0$

$$\mu = \begin{cases} \frac{1}{2} g_s & j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1} \frac{g_s}{2} & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$j = l + \frac{1}{2}$$

$$j = l - \frac{1}{2}$$



ungepaartes
Neutron

Beobachtung

1 Für kaum einen Kern wird das magnetische Moment durch die Schmidt-Linien richtig beschrieben.

Gründe? wahrscheinlich gibt es viele

● ein möglicher Grund: Konfigurationsmischung

○ selbst bei kleinen Konfigurationsmischungen können Abweichungen groß sein

Beispiel:

$$\Psi = c_0 |0\rangle + \sum_i c_i |i\rangle$$

$$\begin{aligned}\langle \mu \rangle &= \langle \Psi | \mu | \Psi \rangle \\ &= c_0^2 \langle 0 | \mu | 0 \rangle + c_0 \sum_i \langle 0 | \mu | i \rangle \\ &\quad + c_0 \sum_i \langle i | \mu | 0 \rangle + \sum_{i,j} \langle i | \mu | j \rangle \\ &= c_0^2 \mu_{00} + c_0 \sum_i c_i (\mu_{0i} + \mu_{i0}) + \dots\end{aligned}$$

Annahme: ● $c_0^2 = 0.8$ > $c_0 \approx 0.9$

● 20 Konfigurationen mit $c_i = 0.1$
> $\sum_{i=0}^{20} c_i^2 = 1$

$$> \langle \mu \rangle = 0.8 \mu_{00} + 1.8 \mu_{ab}$$

Starke Abweichung möglich

2

ABER

fast alle experimentellen Werte der μ -Kern liegen innerhalb der $j \pm \frac{1}{2}$ Begrenzungslinien

UND

sie sind jeweils nah der einen oder der anderen Begrenzungslinie

UND

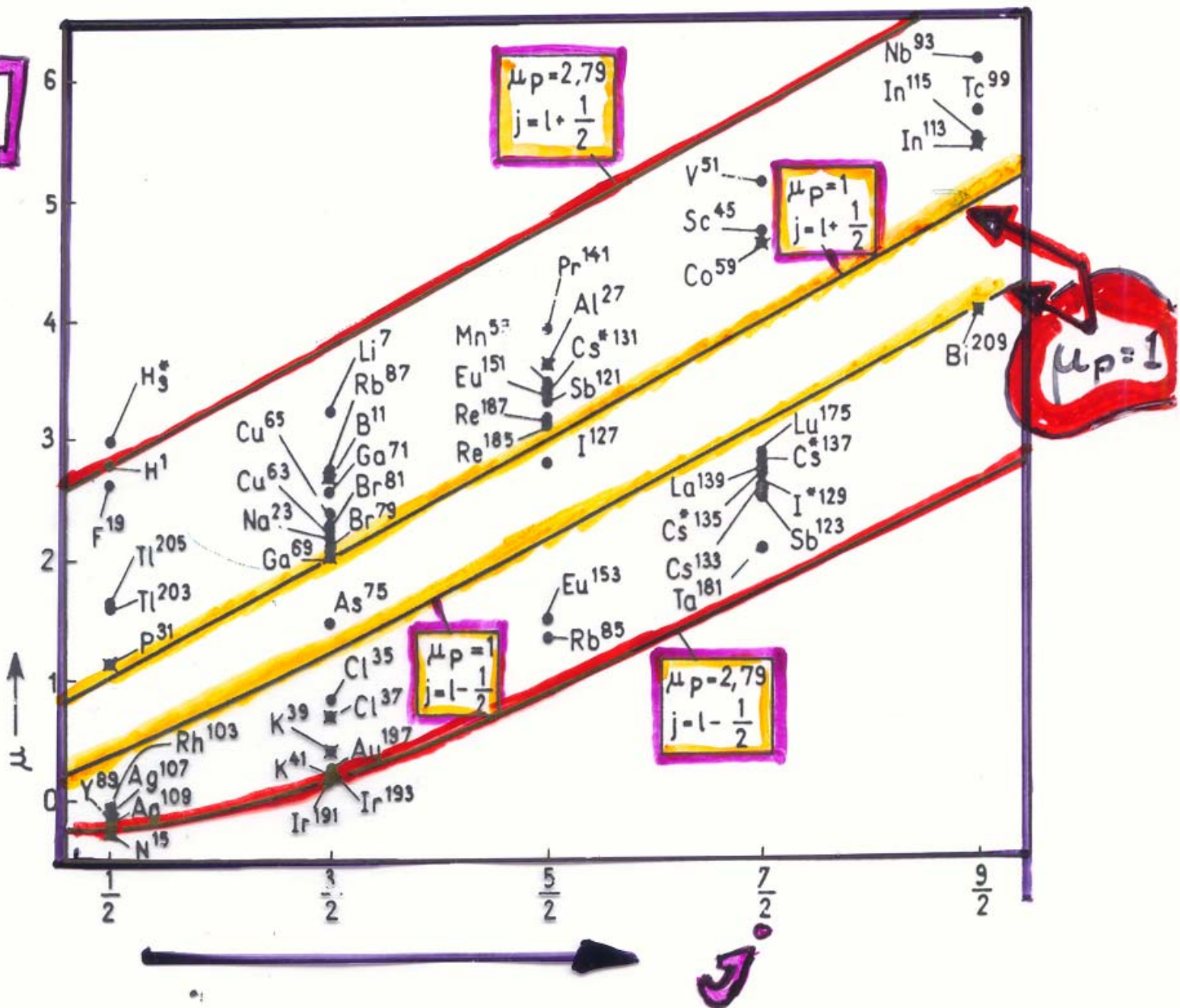
sie liegen (bei Protonen) deutlich zwischen $\mu(\text{Proton}) \sim 1$ und $\mu(\text{Proton}) = 2.79$

d.h.:

Spin- g -Faktor innerhalb des Kerns verschieden ??

Möglich, da Ursache für g_s unbekannt.

μ $[\mu_N]$



Meßmethoden zur Bestimmung magnetischer Kernmomente

Grundlage: W.W. mit magn. Feld

$$E_{\text{mag}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \text{ (Kernort)}$$



Stabile (bzw. langlebige) Isotope



1. Hyperfeinaufspaltung atomarer Spektrallinien

Erinnere:

H.F. A. = W.W. des kernmagnetischen Moments mit magnet. Moment der Hülle

$$E_{\text{HFS}} = -\vec{\mu}_{\text{Kern}} \cdot \vec{B}_0$$



$$\mu_{\text{Kern}} = g_{\text{Kern}} \mu_N \cdot I$$

$$\mu_N = 3.15 \cdot 10^{-12} \text{ eV/G} \quad (\sim 760 \text{ Hz})$$

im einfachen Fall eines **S-Atoms** läßt sich $\vec{B}_0$ bestimmen

$$\vec{B}_0(0) = -\frac{8}{3\pi} \mu_B |\psi(0)|^2$$

$$\approx -\frac{8}{3\pi} \frac{\mu_B}{a_0^3} \frac{Z(1+Z_i)^2}{n_{\text{eff}}^2}$$

a_0 Bohr-Radius

Z - Kernladung

Z_i - Ionisationszustand

n_{eff} - eff. Q.Z.

Eingesetzte Werte:

$$B_0(0) \sim 1.68 \cdot 10^5 \frac{z(1+z_i)^2}{n_{\text{eff}}^2} \quad [\text{G}]$$

Beispiel: (Alkaliatome)

Atom	S-Orbit n_{eff}	$B_0(0) [\text{G}]$
H	1	$1.65 \cdot 10^5$
Li	2	$1.26 \cdot 10^5$
Na	3	$4.4 \cdot 10^5$
K	4	$6.3 \cdot 10^5$
Rb	5	$1.3 \cdot 10^6$
Cs	6	$2.1 \cdot 10^6$
O^{7+}	1 ($z=8, z_i=7$)	$8.6 \cdot 10^7$

Vergleich:

maximale Felder mit supraleit. Spulen:
 $\approx 10^5 \text{ G}$ (10 T)

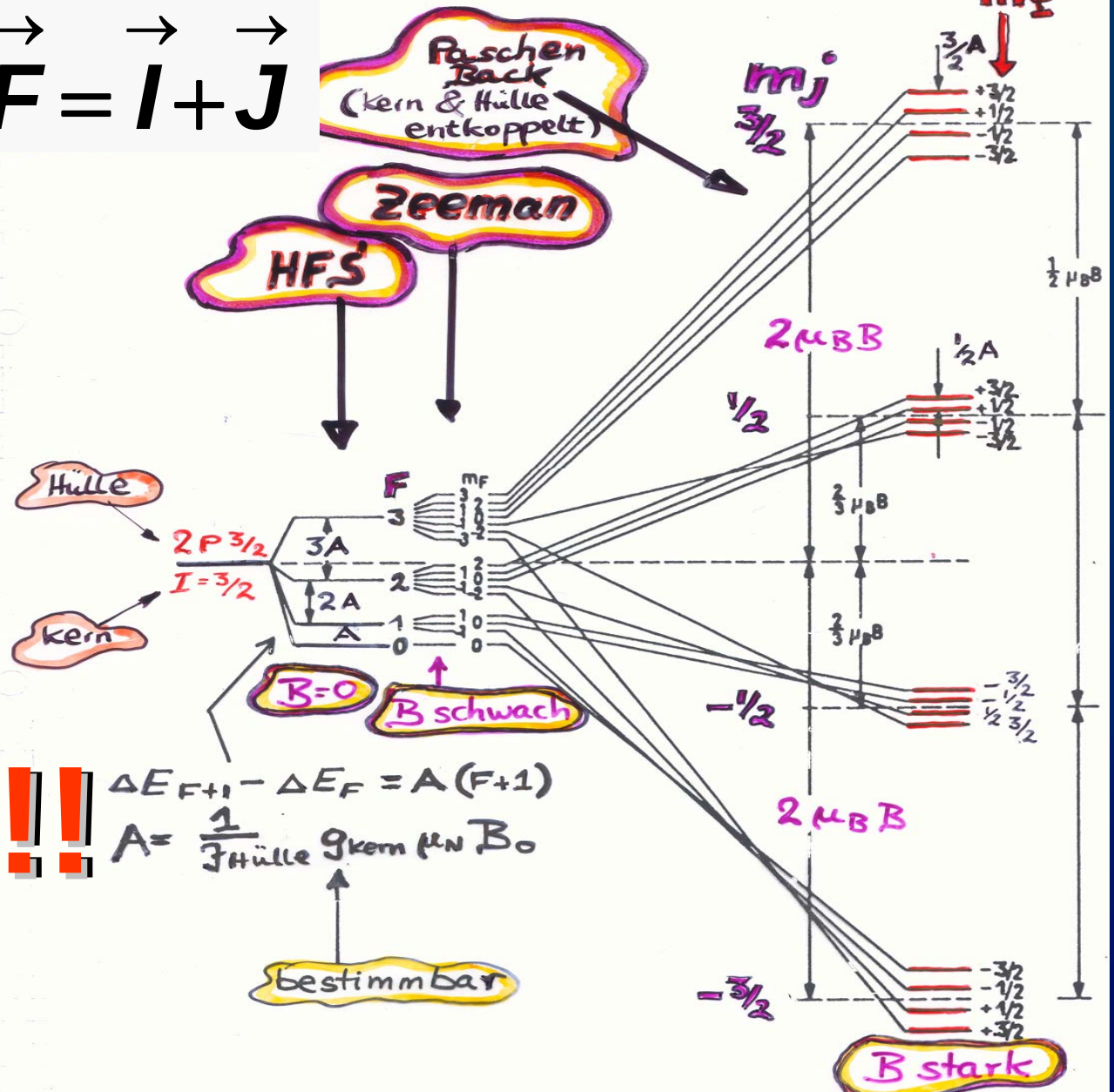
maximale Felder in großen Magnetspektrometern:
 $\sim 2-3 \cdot 10^4 \text{ G}$

$> E_{\text{HFS}} \approx 10^{-5} \text{ eV}$! ($\approx 2.5 \text{ GHz}$)

HFS-Aufspaltung:

$$J_{\text{Hülle}} = 3/2, \quad I_{\text{kern}} = 3/2$$

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$$



$$\Delta E_{F+1} - \Delta E_F = A(F+1)$$

$$A = \frac{1}{J_{\text{Hülle}}} g_{\text{kern}} \mu_N B_0$$

bestimmbar

a. zunächst

Bestimmung des Kerndrehimpulses aus der Zahl der HFS'-Komponenten

Gesamtspin: $\vec{F} = \vec{I}_{\text{kern}} + \vec{J}_{\text{Hülle}}$

• äußeres $\vec{B}$ -Feld = 0
➤ Entartung der HFS'-Niveaus bzgl. F_z

• bei $\vec{B}$ -Feld schwach (gegen $E_{\text{L.S.}}$)
➤ I, J bleiben zu F gekoppelt

Aufspaltung in $(2F+1)$ Komponenten
(Zeeman-Effekt der HFS')

• bei $\vec{B}$ -Feld stark (gegen $E_{\text{L.S.}}$)
➤ I, J entkoppeln
Aufspaltung der $(2J+1)$ Unterniveaus in weitere $(2I+1)$ Unterniveaus
(HFS' des "Zeeman-Effekts der HFS"
oder "Paschen-Back-Effekt")

I_{kern} direkt ablesbar

b. Bestimmung von μ_{kern} :

Bestimmung von I_{kern}

Bestimmung des HFS'-Aufspaltungsfkts A

➤ $\mu_{\text{kern}} = g_{\text{kern}} I_{\text{kern}}$



Die Aufspaltungsenergie im Übergangsgebiet zwischen schwachem & starkem Feld lässt sich für

$$F = I_{\text{kern}} + \frac{1}{2}$$

in geschlossener Form angeben

$$\Delta E_B^{\text{HFS}} = -\frac{A}{4} + g_{\text{kern}} \mu_N m_F B$$

$$\pm \frac{A}{4} (2I_{\text{kern}} + 1) \sqrt{1 + \frac{4m_F X}{2I_{\text{kern}} + 1} + X^2}$$

Breit-Rabi-Formel

$$A = -\frac{1}{f_{\text{Hülle}}} g_{\text{kern}} \mu_N B_0$$

$$X = 2 \frac{g_{\text{Hülle}} \mu_B - g_{\text{kern}} \mu_N}{A (2I_{\text{kern}} + 1)} B$$

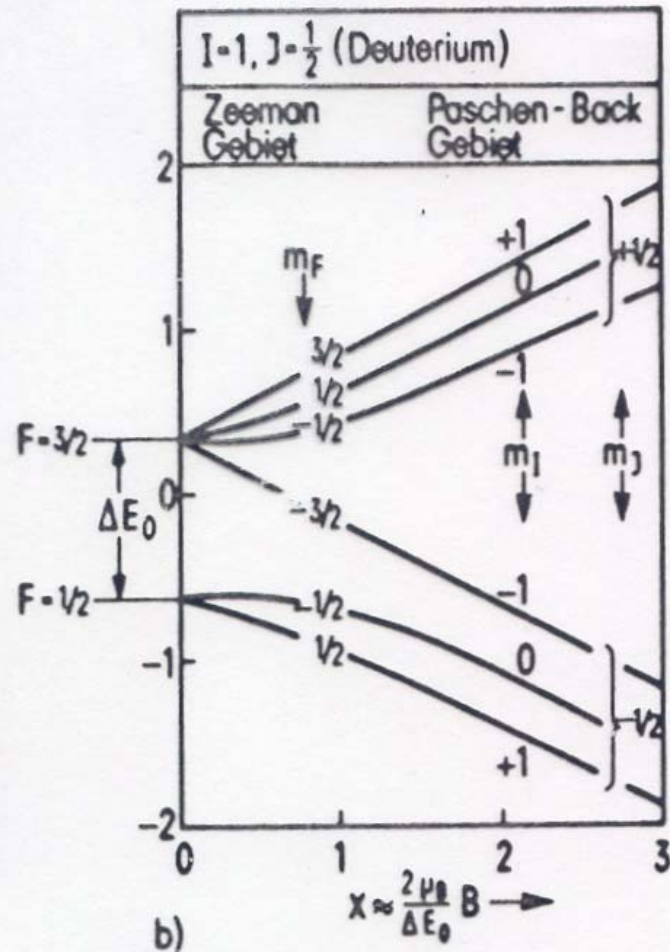
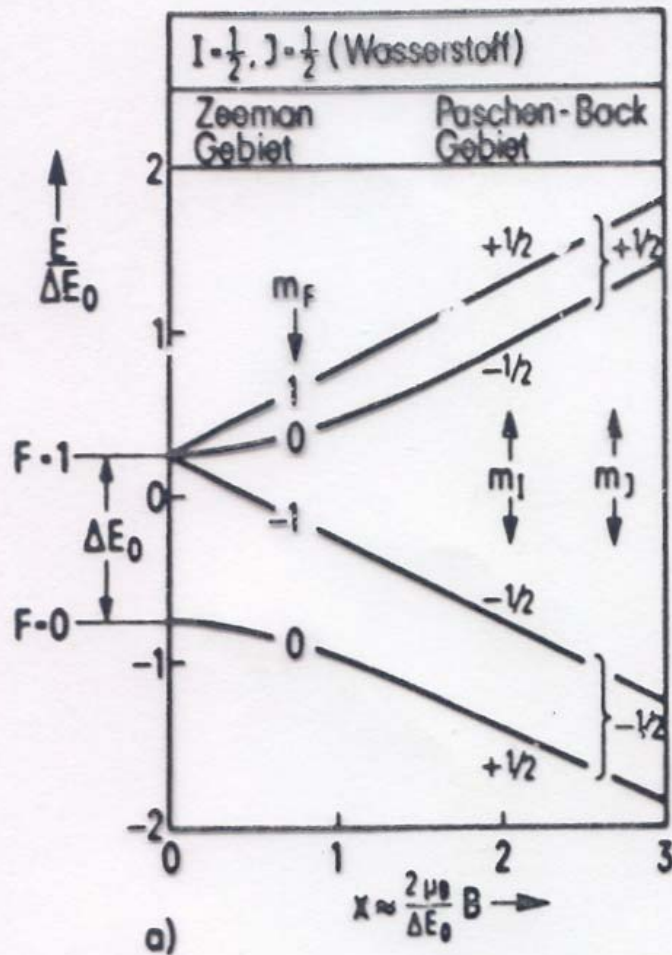


Fig. 102 Feldabhängigkeit der HFS-Aufspaltung nach der Breit-Rabi-Formel für $I = 1/2$ und $I = 1$

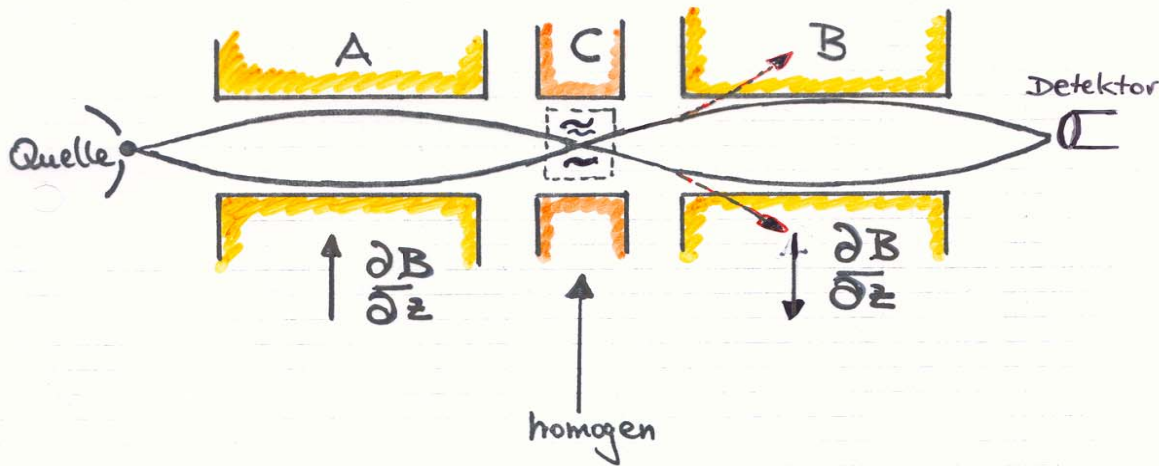
HFS'

1420 MHz (21cm-Linie) im Wasserstoff.

weitere Möglichkeiten zur Bestimmung magnetischer Momente (f.f.)

2.)

Atomstrahlresonanz nach Rabi



Kraft: $F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$ $\mu_z = g_K \mu_N I_z$

Umkehrung des magn. Moments im homogenen Feld von G über HF.

$$\Delta E_{\text{mag}} = g_K \mu_N \Delta I_z \cdot B_G$$

$$= \hbar \omega_L$$

Energie aus dem HF-Kreis

$$\omega_L = \frac{1}{\hbar} g_K \mu_N B_G \Delta I_z$$

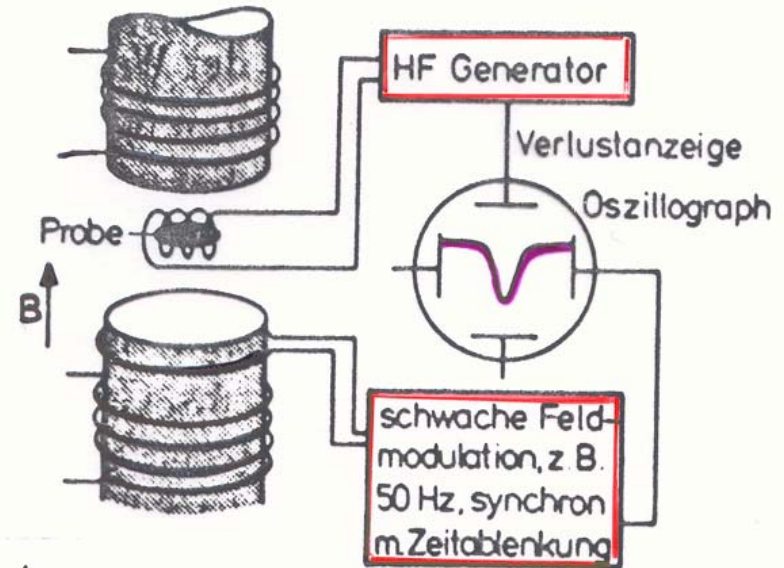
Auswahlregeln sind zu beachten

Nobelpreis 1944

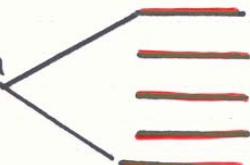


3. Kernspin - Resonanz (Anwendungsgebiet !!)

NMR / MRS / MRT



Aufspaltung der Kernniveaus über magn. WW

I_{Kern}, m  $\Delta E = g_{\text{Kern}} \mu_N \cdot B_0$
($\Delta I_z = \Delta m = 1$)

$\omega_L = \text{kHz} - \text{GHz}$

$= \hbar \omega_L$

↑
Larmor-Frequenz

Bei Kenntnis des
g-Faktors (Beisp. Wasserstoff)
läßt sich B_0 bestimmen

Wichtig für Fragen der Festkörperphysik !

Isotop	Natürliche Häufigkeit in %	NMR-Frequenz in MHz pro 10 kG τ	Magnetisches Moment μ , in Einheiten von $eh/2M_p c$	Spin I
H ¹	99,984	42,576	2,793	$\frac{1}{2}$
H ²	0,016	6,536	0,857	1
Li ⁷	92,57	16,55	3,256	$\frac{3}{2}$
C ¹³	1,11	10,71	0,702	$\frac{1}{2}$
F ¹⁹	100	40,06	2,63	$\frac{1}{2}$
Na ²³	100	11,26	2,216	$\frac{3}{2}$
Si ²⁹	4,70	8,46	-0,555	$\frac{1}{2}$
Cl ³⁵	75,4	4,17	0,821	$\frac{3}{2}$
K ³⁹	93,08	1,99	0,391	$\frac{3}{2}$
K ⁴¹	6,91	1,09	0,215	$\frac{3}{2}$
J ¹²⁷	100,0	8,52	2,79	$\frac{5}{2}$

Tabelle von NMR- Frequenzen

Die verschiedenen m_I - Unterzustände sind im thermodynamischen Gleichgewicht unterschiedlich besetzt:

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} = e^{-\Delta E / kT} (\sim 1)$$

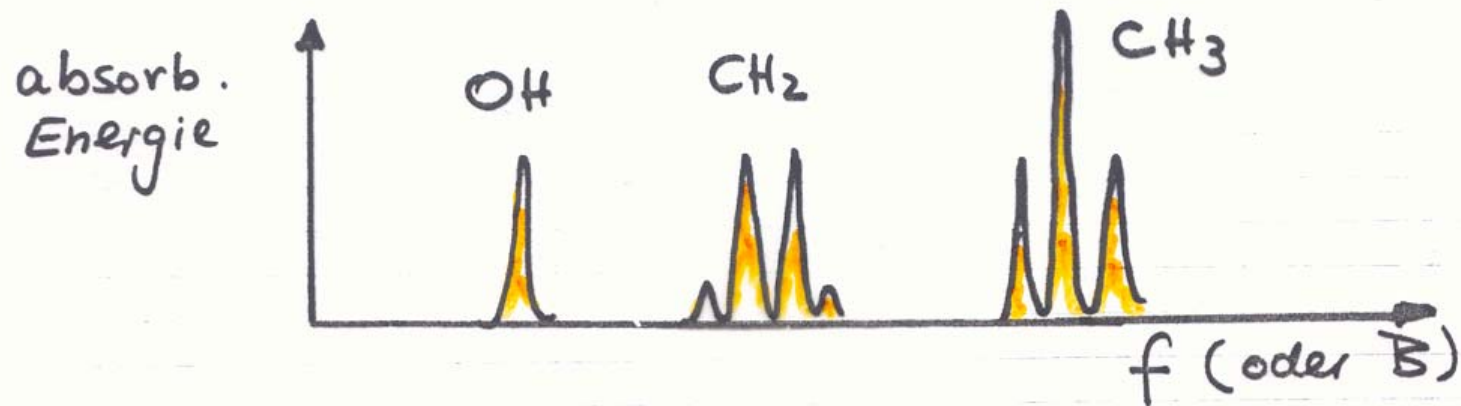
Durch die Energieabsorption wird Besetzung geändert und erreicht Gleichbesetzung ($T = \infty$)
Spin-Gitter-Relaxationsphänomene verhindern diese Situation

> d.h. Spin-Gitter-Relaxation ist meßbar !!



weiteres Gebiet : NMR-Spektroskopie

Beispiel: $\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{OH}$



$$I(\text{CH}_3) : I(\text{CH}_2) : I(\text{OH}) = 3 : 2 : 1$$

! Aufspaltung durch induzierte intra-molekulare Felder!



Kernmomente von angeregten (instabilen) Systemen

1.)

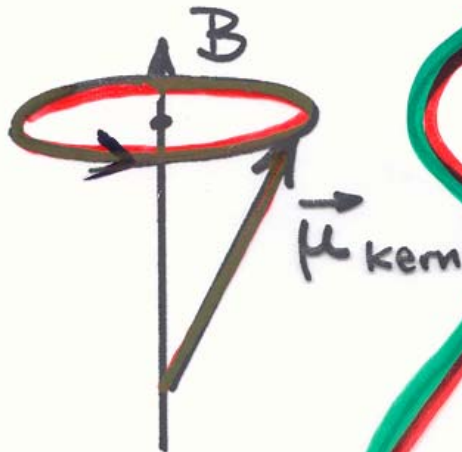
Mößbauereffekt



2.)

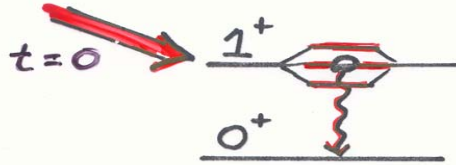
Technik der gestörten Winkelverteilung

Idee von Brady & Deutsch (1950)

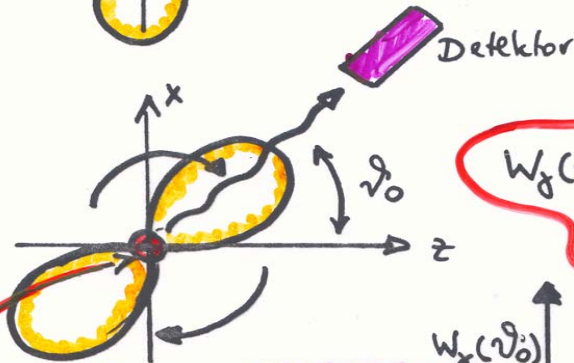
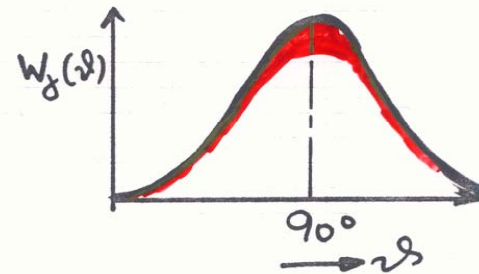
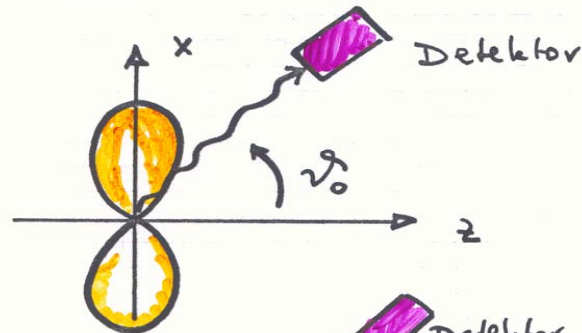


die Larmorpräzession des magn. Momentes eines kurzlebigen Kernniveaus sollte sich bemerkbar machen durch eine Drehung der Winkelverteilung der emittierten γ -Strahlung

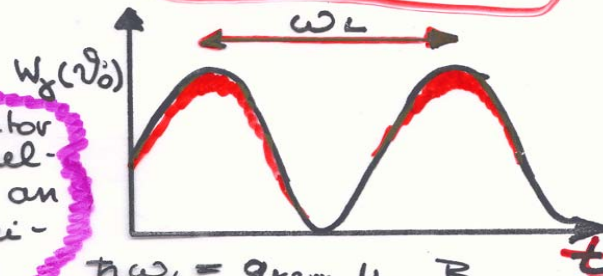
Sei beispielsweise ein angeregter Zustand durch ein exp. Verfahren in bestimmter Weise populiert, z.B.



$$W_g(\vartheta) = 1 + a_2 P_2(\cos \vartheta) \sim \sin^2 \vartheta$$



$$W_g(\vartheta) = 1 + a_2 P_2(\cos(\vartheta - \omega_L t)) \sim \sin^2(\vartheta - \omega_L t)$$



B-Feld senkrecht auf x-z Ebene

der Detektor sieht Winkelverteilung an sich vorbeidrehen