

Wiederholung

Isospin

1

Isospin zur Formulierung des Pauli-Prinzips auf N -Basis

2

$$[H_{\text{nadr}}, T] = 0$$



➤ Isospin ist Erhaltungsgröße

➤ Ladungsunabhängigkeit der Kern-WW innerhalb eines **T -Multiplikts**

3

Isospin ist verknüpft mit Symmetrie der Wellenfktn im Orts- und Spinraum (Beispiel: $2N$ -System; ^{14}N)

4

$$T_{\text{g.s.}} = T_{\text{min}} = \left| \frac{N-Z}{2} \right|$$

5

Isospin Brechung durch:

● $p-n$ Massenunterschied

● Coulomb -WW

6

$N \approx Z$ Kerne; I-Spin Brechung **groß**
 $N \gg Z$ Kerne; I-Spin Brechung **klein**

7

Isospin in der Teilchenphysik

→  (u, d) - Quark → I-Spin Dublett

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ T = \frac{1}{2} & ; \frac{1}{2} \\ T_z = +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

→  π $\begin{matrix} \rightarrow (u\bar{d}) & "+" \\ \rightarrow (u\bar{u} + d\bar{d}) & "0" \\ \rightarrow (\bar{u}d) & "-" \end{matrix}$ I-Spin Triplet

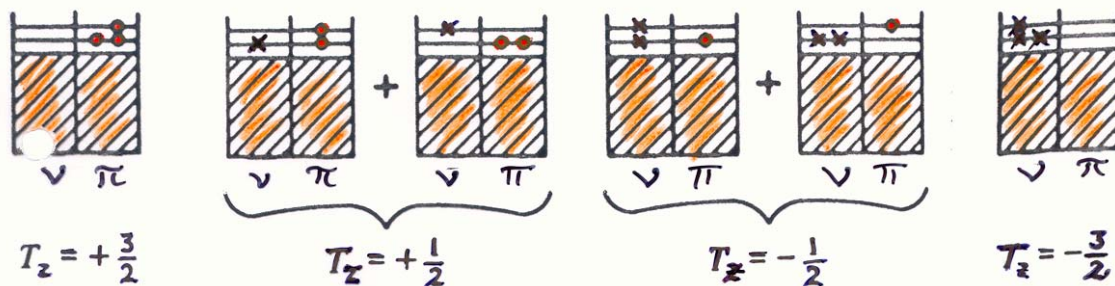
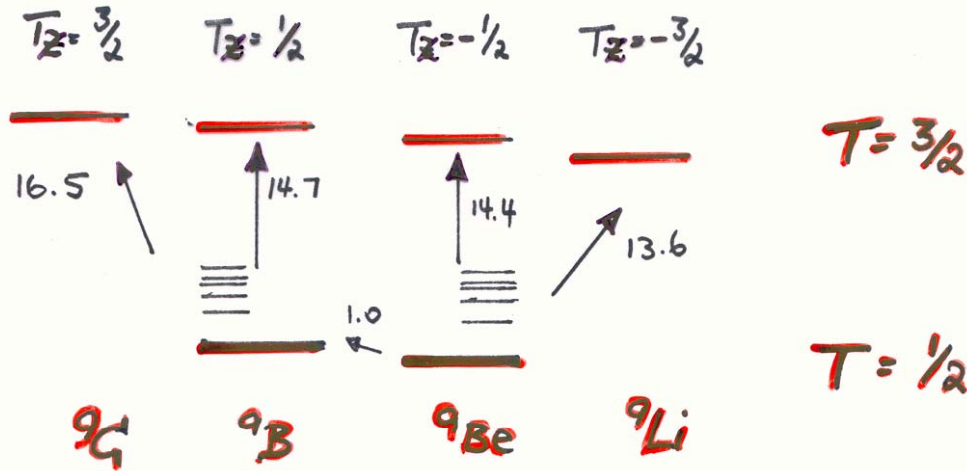
→  K $\begin{matrix} (u\bar{s}) & "+" \\ (d\bar{s}) & "0" \end{matrix}$ I-Spin Dublett

→  $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$ kein I-Spin; $I=0$

→  $e^+, \mu^+, \gamma, \dots$ I-Spin **NICHT** definiert

→  Isospin definiert eine **SU(2)** - Symmetrie

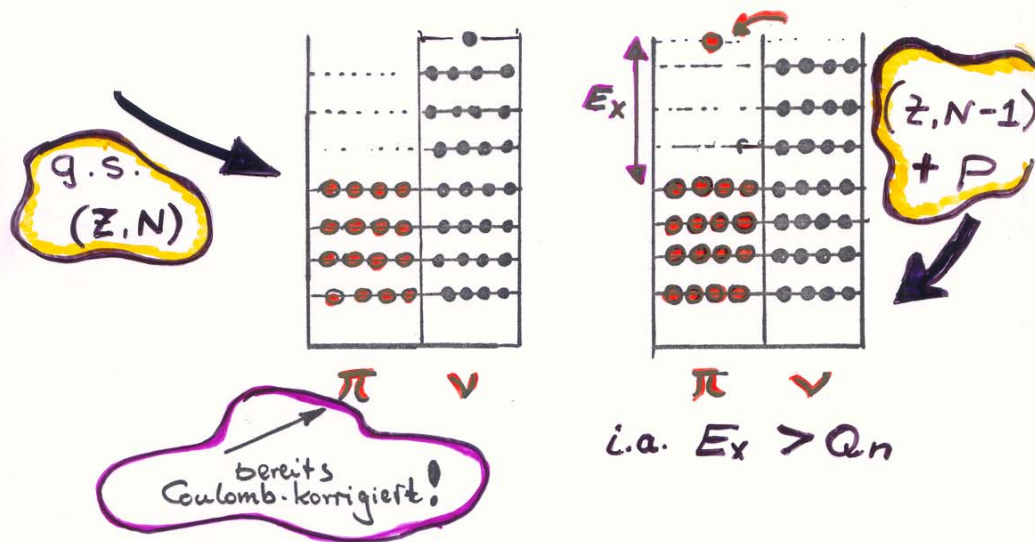
- ⑥ Für $N \sim Z$ Kerne (leichte bis mittelschwere)
sind die T-Multipletts leicht identifizierbar im diskreten Spektrum
(s.a. $A = 12, 22$, usw.)



Aber:

I-Spin Unreinheit für $N \sim Z$ Kerne
sehr groß. !!

- ⑦. Bei $N \gg Z$ Kernen ($A > 100$)
 liegen die Isospinanzregungen im
 Kontinuum. Aber I-Spin ist sehr rein
 > schmale "Analogzustände"



- ⑧. Die volle Bedeutung des I-Spins wird
 besonders in der Teilchenphysik deutlich

Beispiel ①: **Pion**

$$\underline{\pi^+} \quad \underline{\pi^0} \quad \underline{\pi^-} \quad T=1$$

$$T_z=1 \quad T_z=0 \quad T_z=-1$$

Triplet

$$m(\pi^+) \equiv m(\pi^-) = 139.56755$$

$$m(\pi^0) = m(\pi^+) - 4.5942 \text{ MeV}$$

Schalenmodell der Kerne

Beobachtung

Für bestimmte Werte von N , Z , $N+Z$ beobachtet man ausgeprägte Besonderheiten wie z.B.:

- hohe Stabilität (s. B/A % A Diagramm)
- hohe Stabilität entlang Isotopen - bzw. Isotonen-Reihe
- hohe Anregungsenergien für ersten angeregten Zustand
- sphärische Symmetrie
- usw. usw.

Die Zahlen, bei denen diese Besonderheiten auftreten, heißen **MAGISCHE ZAHLEN**

Kerne heißen **MAGISCH** bzw. **DOPPELT-MAGISCH** wenn N, Z magisch bzw. $N \& Z$ magisch

Diese Besonderheiten zeugen von einer **Schalenstruktur** der Kerne

magische Zahlen

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

${}^4_2\text{He}$ ** $E^*_{(1)} = 20 \text{ MeV}$

${}^{10}_2\text{He}$ ** nicht bekannt ob
stabil gegen n-Zerfall

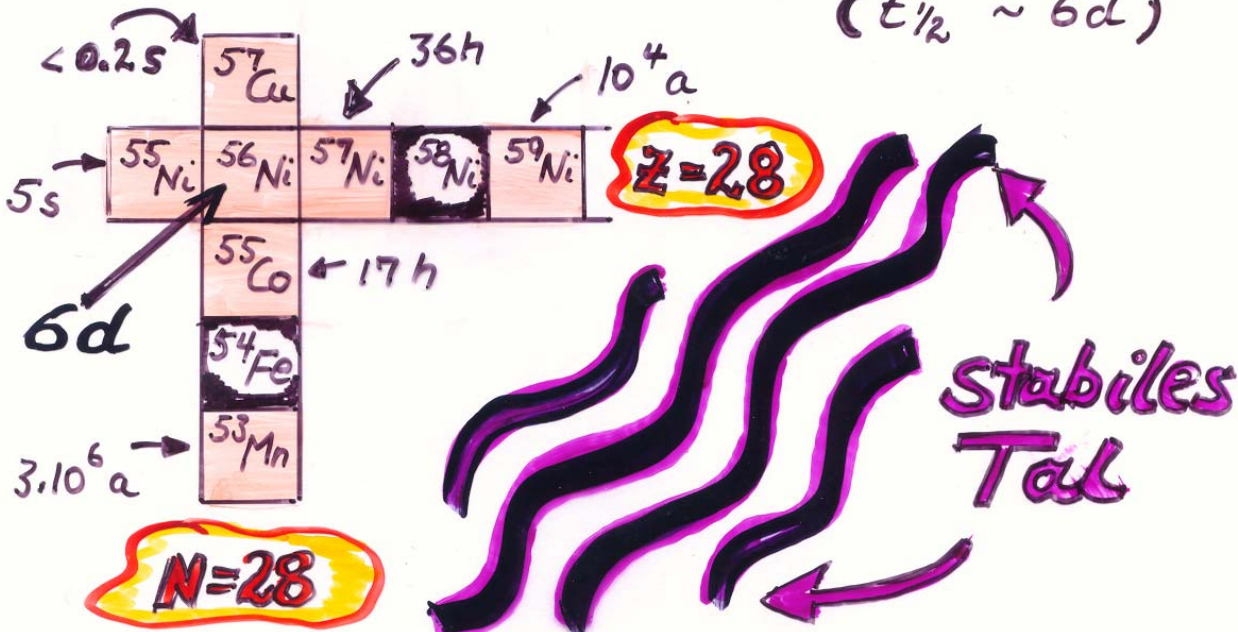
${}^{16}_8\text{O}$ **

${}^{40}_{20}\text{Ca}$ **, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ **

Beispiele
magischer
&
doppelt
magischer
Kerne

${}^{56}_{28}\text{Ni}$ **

β^+ -instabil
ABER: langlebig !!
($t_{1/2} \sim 6 \text{ d}$)



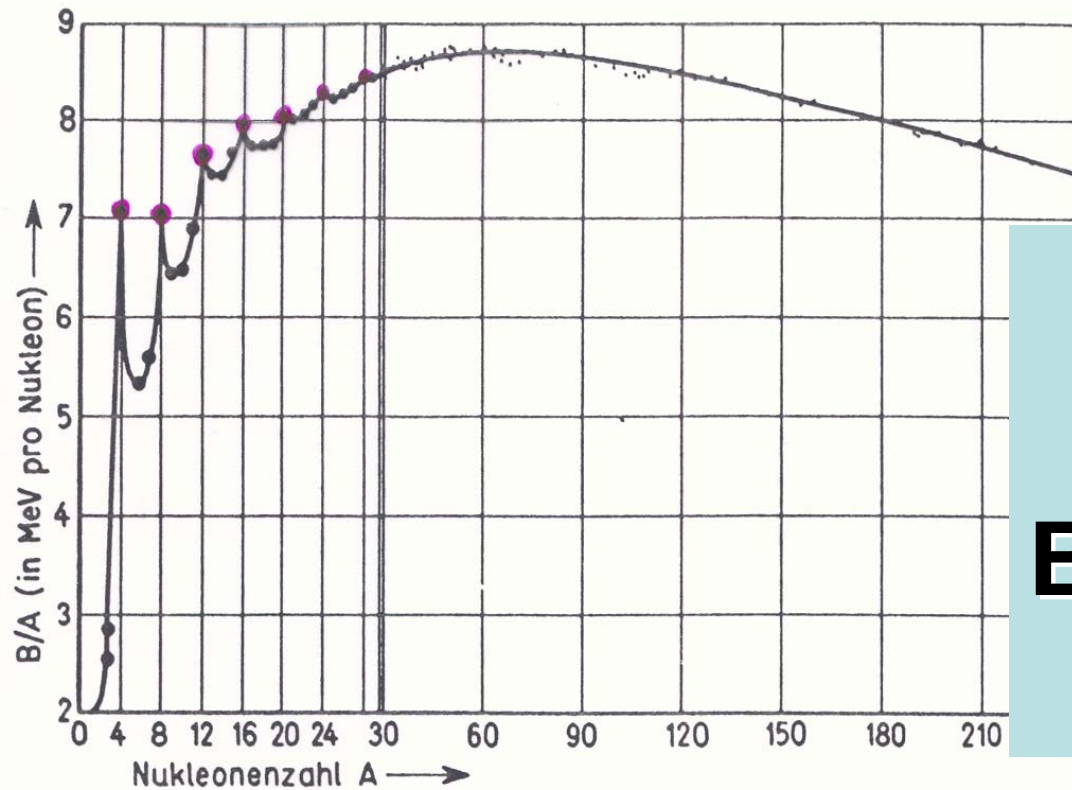


Fig. 10 Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion von A für stabile Kerne; nach [Eva 55]. Abszisse bis $A = 30$ gespreizt

Beispiel 1

B/A als Funktion von A

Beispiel 2

Isotonen-Zahl Isotopen-Zahl

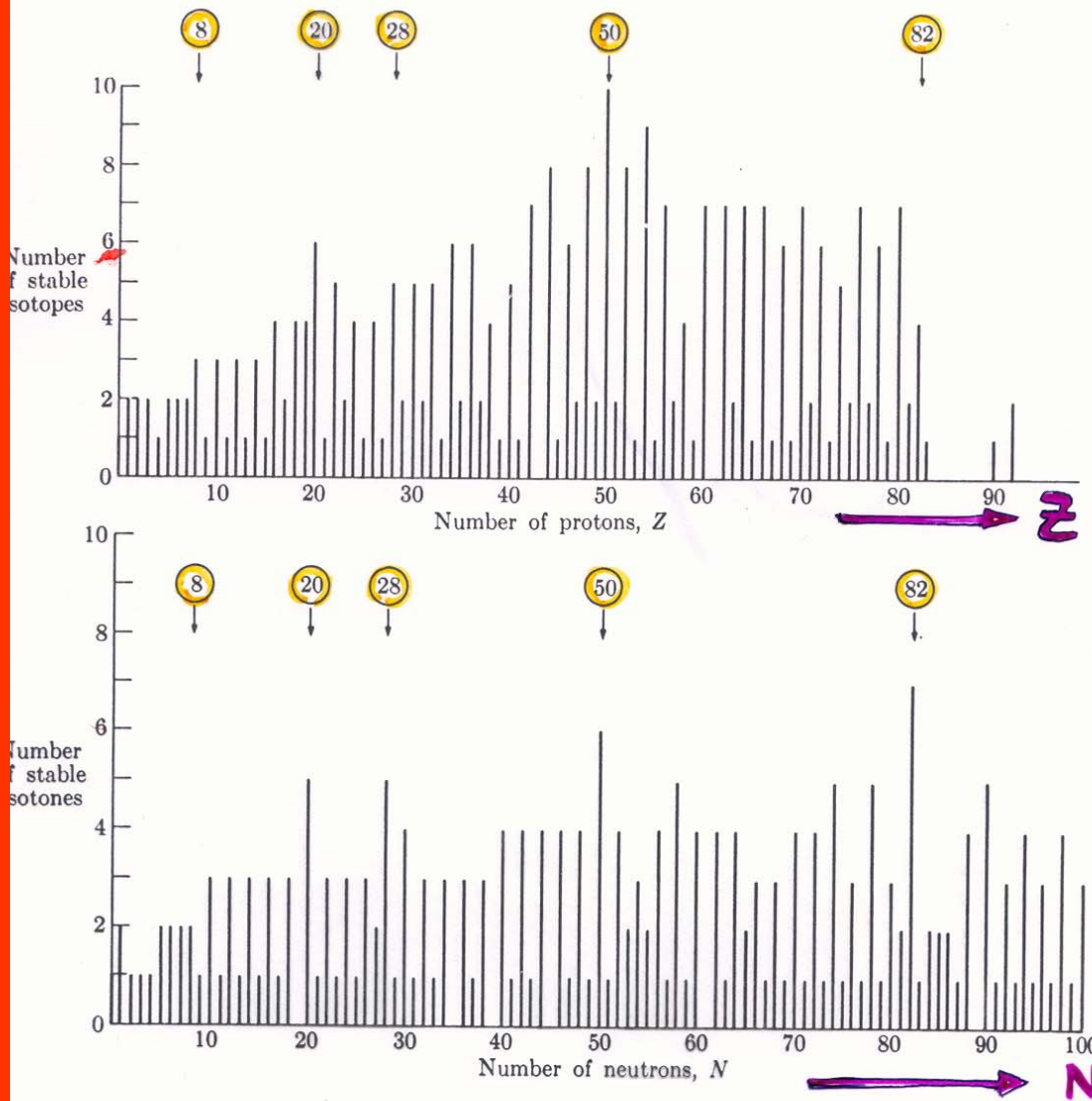
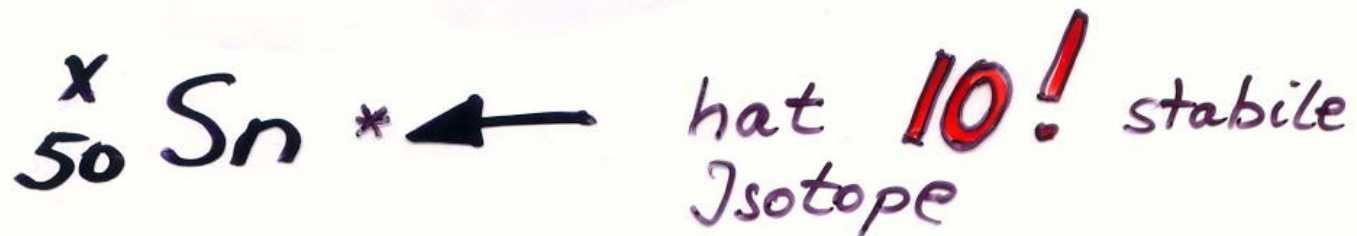
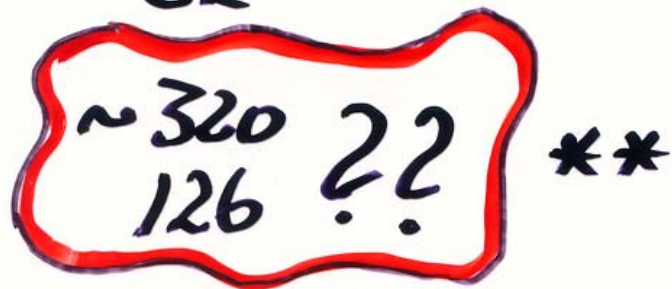


Fig. 7-14. Number of stable nuclides as a function of (a) the atomic number, (b) the neutron number.



letzte doppelt magischer kern



nichts bekannt

Beispiel 3

Lage des 1. angeregten Niveaus (gefittet über alle exp. Daten)

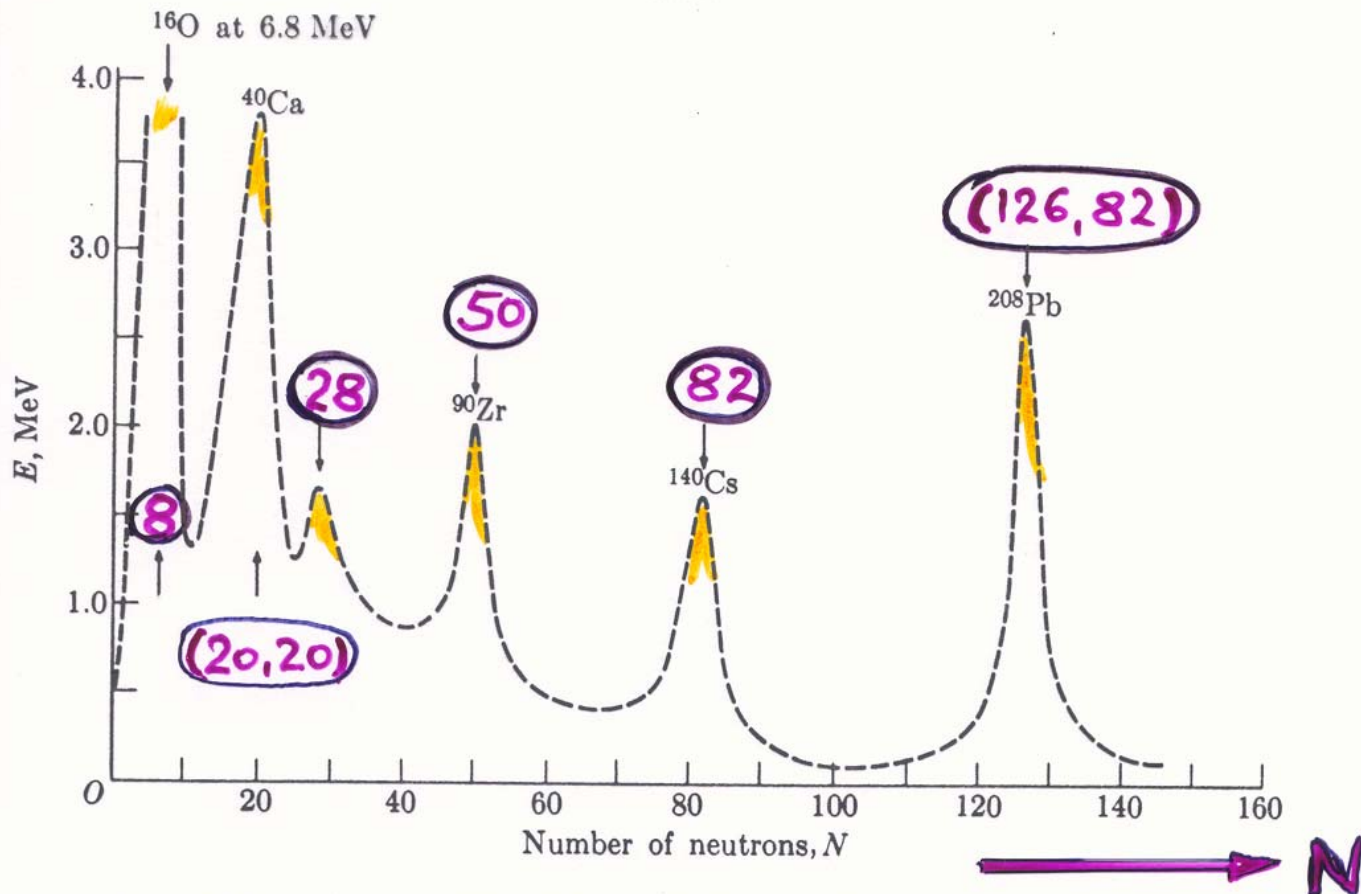


Fig. 7-13. Energy of the first excited state for even-even nuclei.

Beispiel 4

relative Element-Häufigkeiten

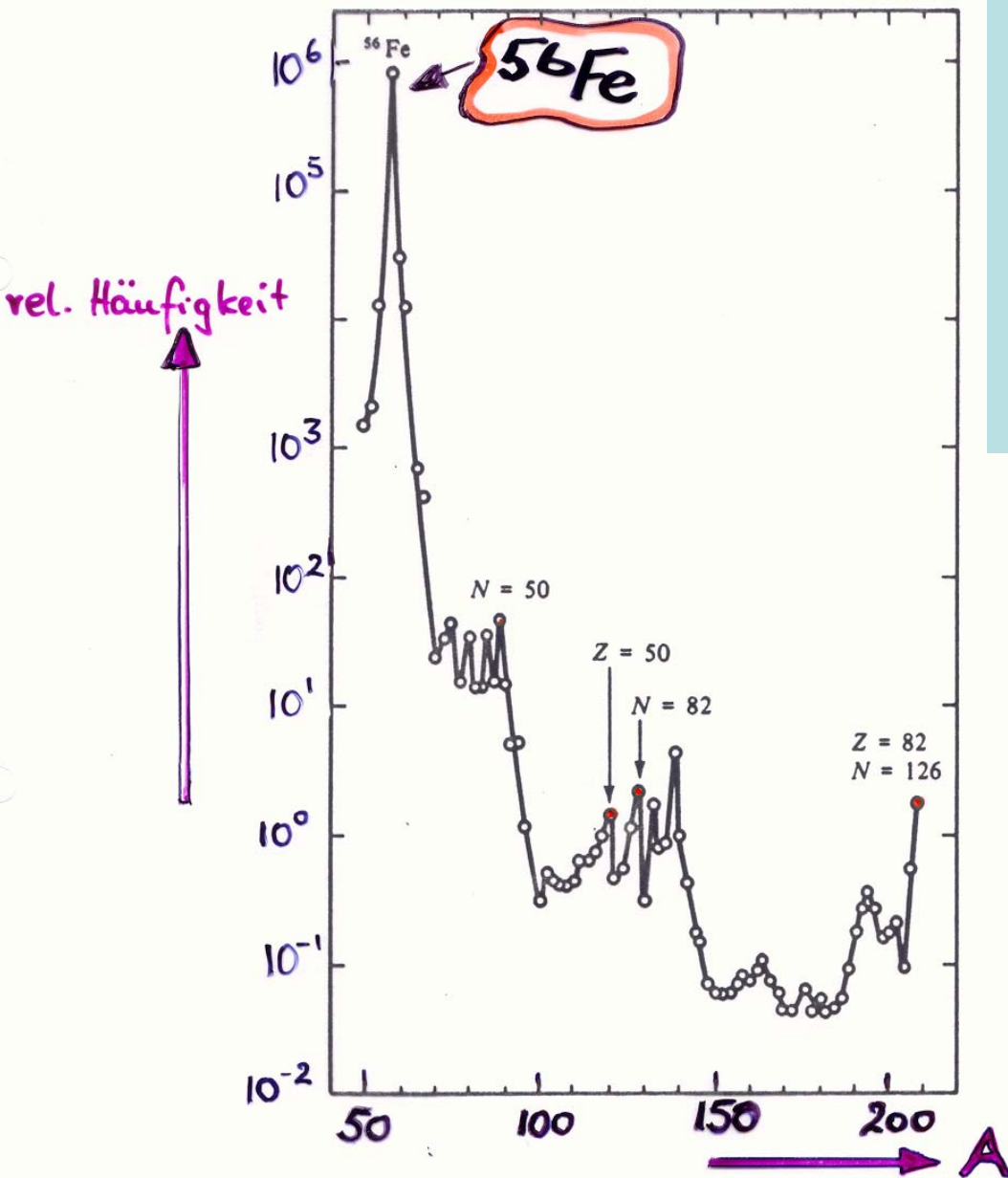
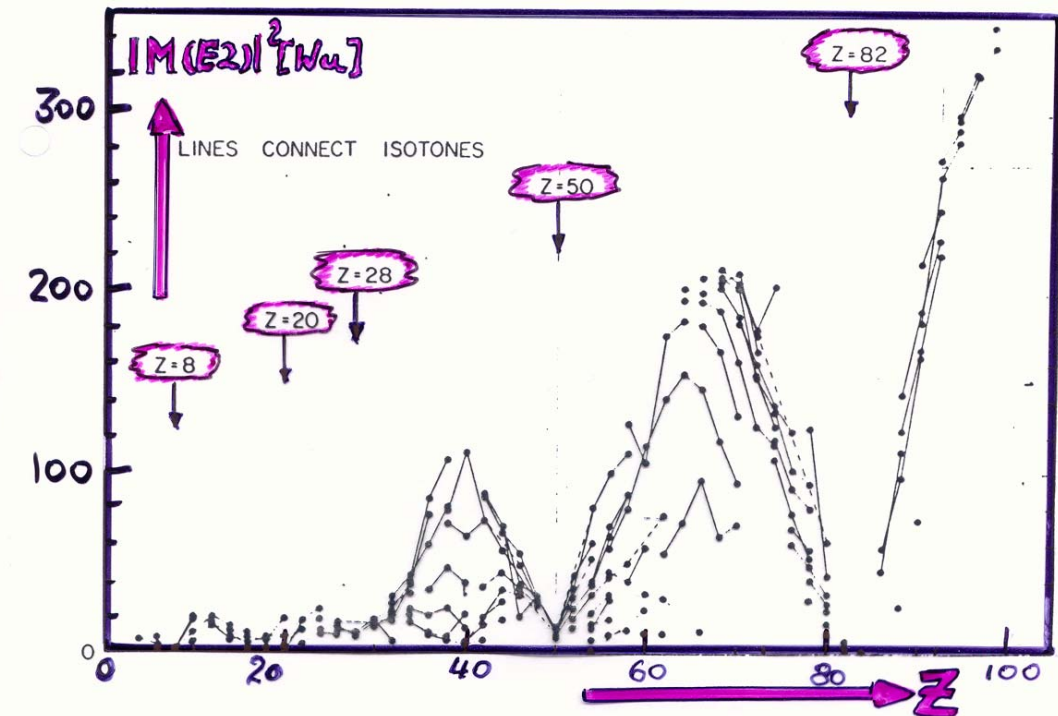
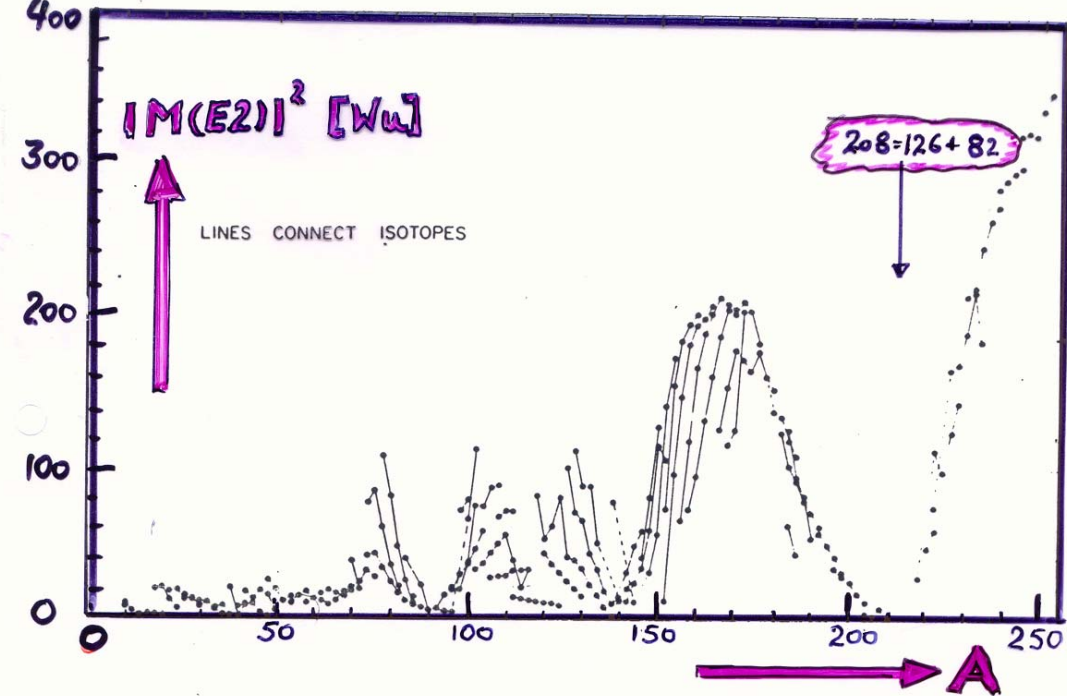


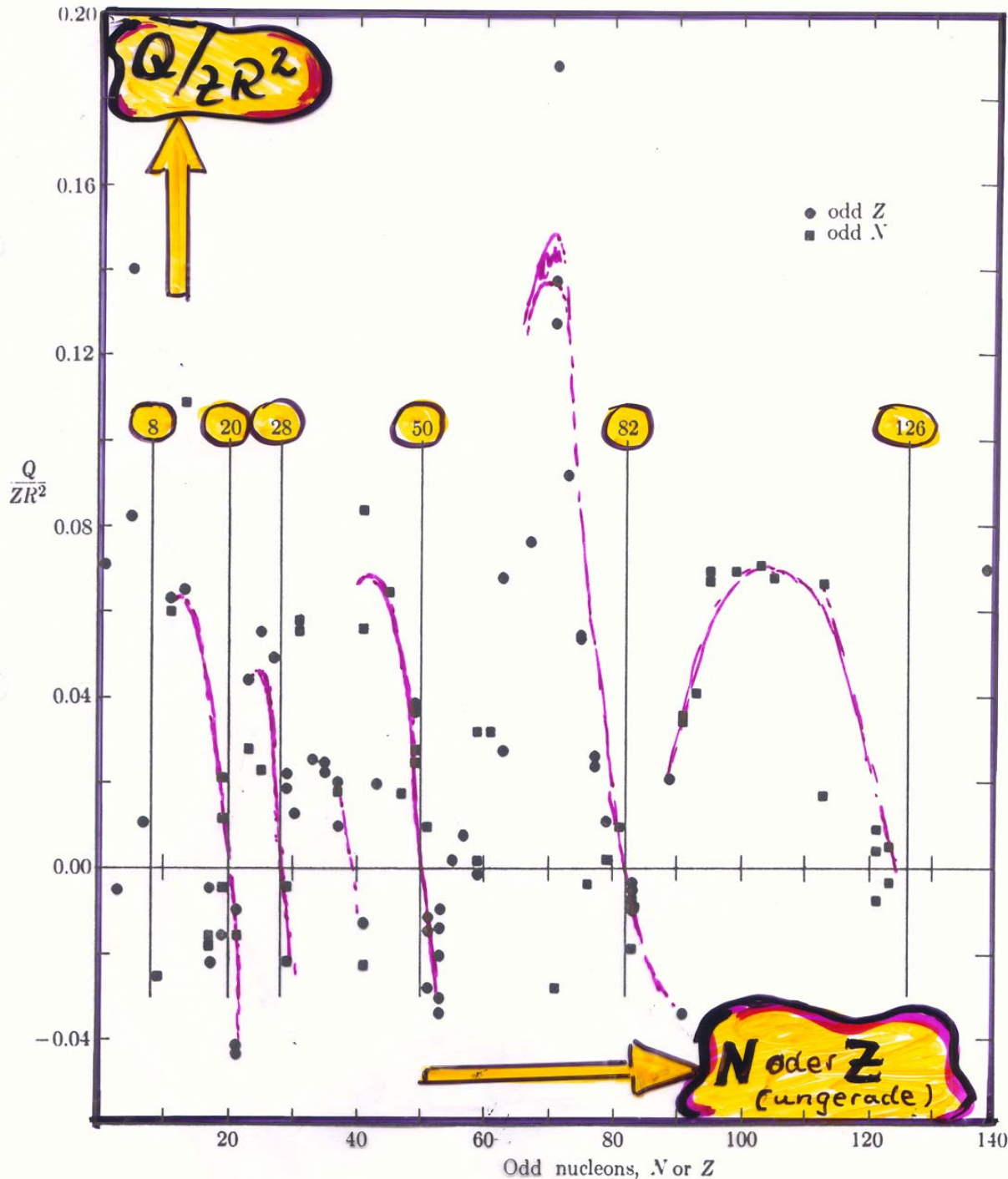
Bild 15.1 Relative Häufigkeit H verschiedener g - g -Kerne als Funktion von A . Die Häufigkeiten sind relativ zu Si gemessen, wobei $H(\text{Si}) = 10^6$ ist. [Nach A. G. W. Cameron, „A New Table of Abundance of the Elements in the Solar System“, *Origin and Distribution of the Elements* (L. H. Arens, ed.), Pergamon Press, New York, 1968, p. 125.]

Beispiel 5

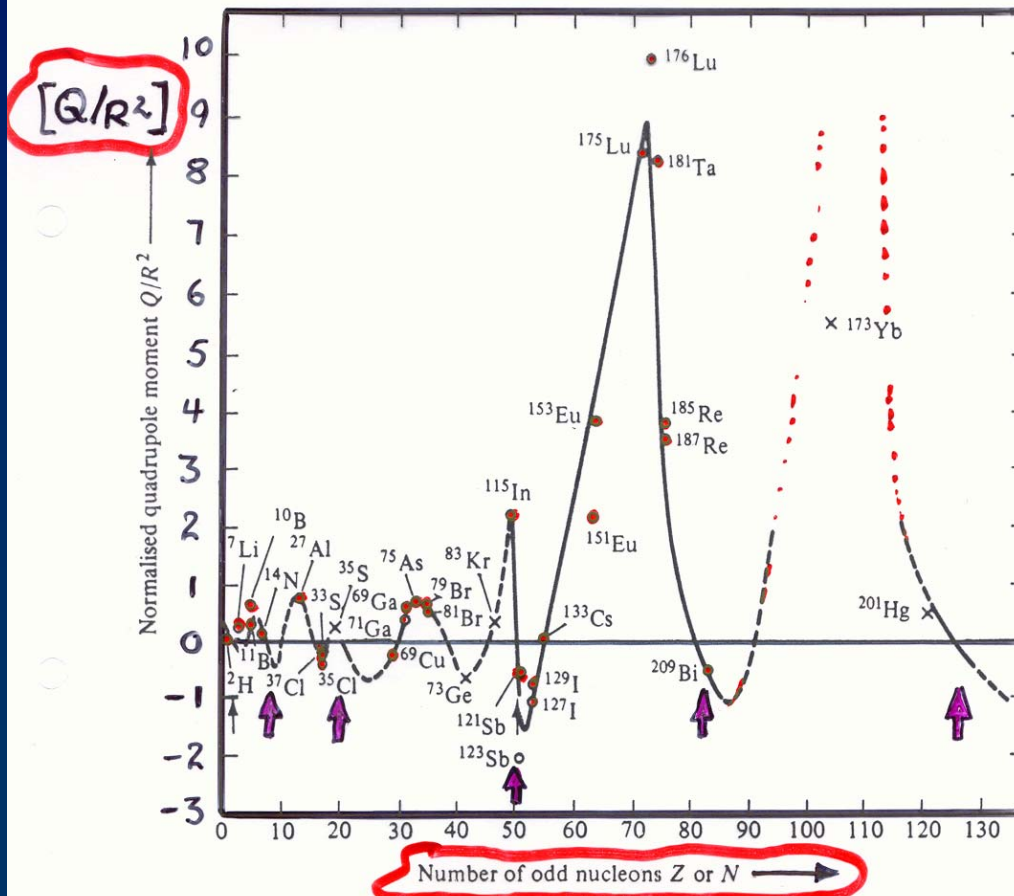
E2- Übergangs stärken



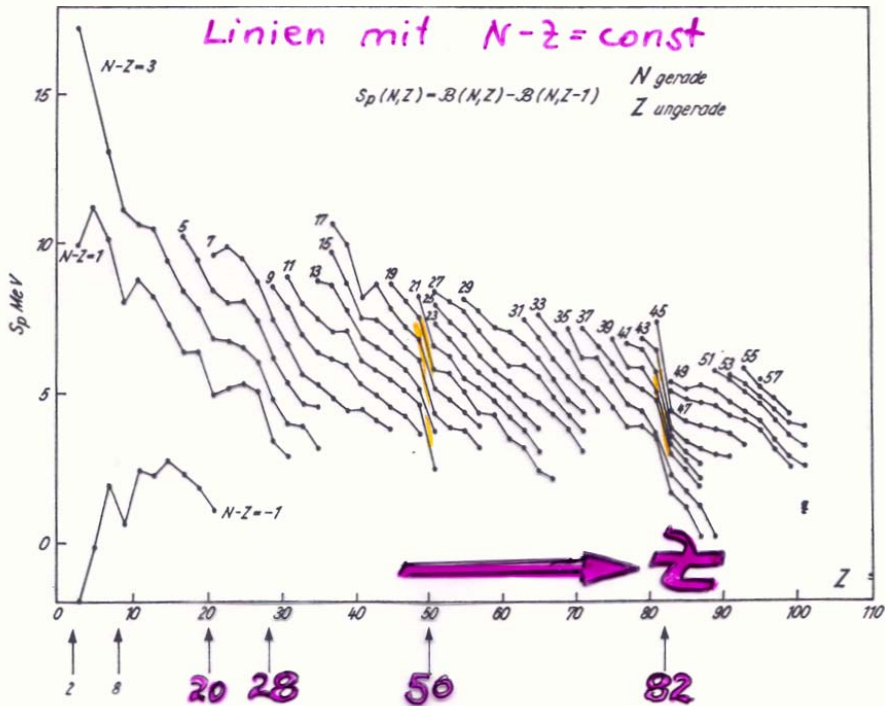
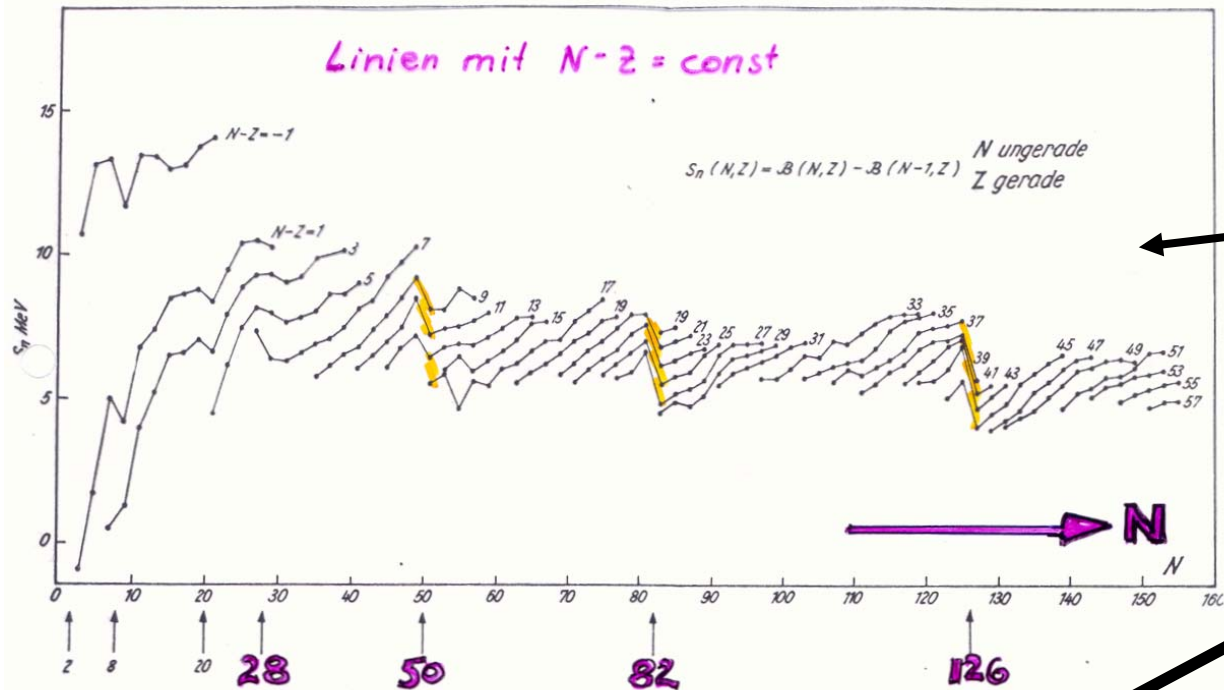
Nulldurchgang statischer Quadrupol- momente



kerndeformationen für (ug) und (gu) - kerne



2.14. Measured quadrupole moments Q (expressed in units of the square of the nuclear radius, $R^2 \equiv (1.5 \times 10^{-13} A^{1/3})^2 \text{ cm}^2$) of odd-proton nuclei (excepting ^6Li and ^{36}Cl) plotted as circles against the number of protons Z , and odd-neutron nuclei, plotted as crosses against the number of neutrons N . Arrows indicate the closure of major shells. The solid curve represents the regions where the quadrupole data appear to be well established, the dashed part indicates more doubtful regions. (From Townes, C. H., Foley, H. M. and Low, W., *Phys. Rev.* 76 (1949) 1415.)



Beispiel 6

Neutron / Proton
Separations-
energien

Separationsenergien

Eigenschaften:



S_n, S_p groß bei N, Z magisch
klein bei $N'=N+1, Z'=Z+1$

$$S_n(^{16}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{O} + n) = 15.66 \text{ MeV}$$

$$S_n(^{17}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{O} + n) = 4.1 \text{ MeV}$$

$$S_p(^{16}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + p) = 12.13 \text{ MeV}$$

$$S_p(^{17}\text{F} \rightarrow ^{16}\text{O} + p) = 0.60 \text{ MeV}$$

$$S_n(^{208}\text{Pb} \rightarrow ^{207}\text{Pb} + n) = 7.37 \text{ MeV}$$

$$S_n(^{209}\text{Pb} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + n) = 3.93 \text{ MeV}$$

Zu merken !!

Schalenmodell der Kerne

magische Zahlen

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

experimentelle Hinweise auf Existenz von "Schalenabschlüssen" (magische Zahlen)

1. besondere Stabilität
 S_n, S_p — Separationsenergie
groß : N, Z magisch
klein : $N' = N + 1, Z' = Z + 1$

2. $(E_x' - E_{g.s.})$ — groß bei N, Z magisch

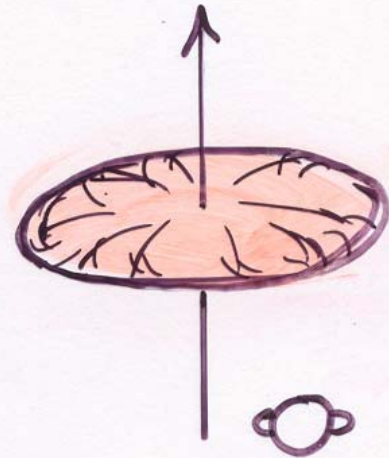
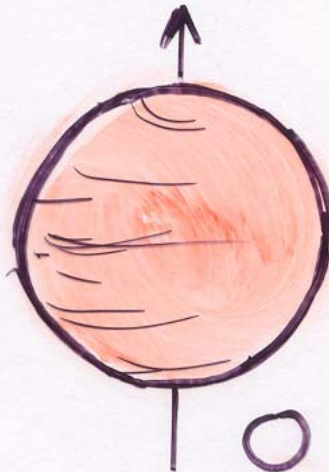
3. $\delta(n, \gamma)$ — klein bei N, Z magisch

4. $Q > 0 \rightarrow Q < 0$ — Vorzeichenwechsel im Quadrupolmoment





alle doppelt magischen kerne
haben eine stabile ("harte")
runde Oberfläche



← -1

→ +1

prolat

$$Q > 0$$

rund

$$Q = 0$$

oblat

$$Q < 0$$

5

stabile, runde Oberfläche bei
N, Z magisch

"**deformierte**" Oberfläche (leicht deformierbar)
 $\hat{=}$ **B(E2) groß** für N, Z weit weg von
Schalenabschlüssen

Nachtrag

$\sigma(n, \gamma)$

klein bei N, Z magisch
groß bei $N' = N - 1$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma(n, \gamma)({}^3\text{He}) &= 5327 \text{ barn} \\ \sigma(n, \gamma)({}^4\text{He}) &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma(n, \gamma)({}^{87}\text{Sr}) &= 16 \text{ barn} \\ \sigma(n, \gamma)({}^{88}\text{Sr}) &= 5.8 \cdot 10^{-3} \text{ barn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma(n, \gamma)({}^{207}\text{Pb}) &= 0.71 \text{ barn} \\ \sigma(n, \gamma)({}^{208}\text{Pb}) &= 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ barn} \end{aligned}$$

Versuch einer mikroskopischen Beschreibung

Problem: Es gibt zunächst kein ad-hoc Potential, das mit Zuständen (Teilchen) aufzufüllen wäre

Lösungsansatz: Die WW der n Nukleonen im Kern soll so beschaffen sein, daß die Wirkung der $(n-1)$ Nukleonen auf das Nukleon n der eines mittleren Potentials gleichkommt.
oder:

1

2

3

Teilchen n bewegt sich unabhängig in einem mittleren Kernpotential

Was für Teilchen n gilt, soll für alle anderen Teilchen k ebenfalls gelten.

(wichtig für Besetzung der Zustände)

"Schalenmodell" oder

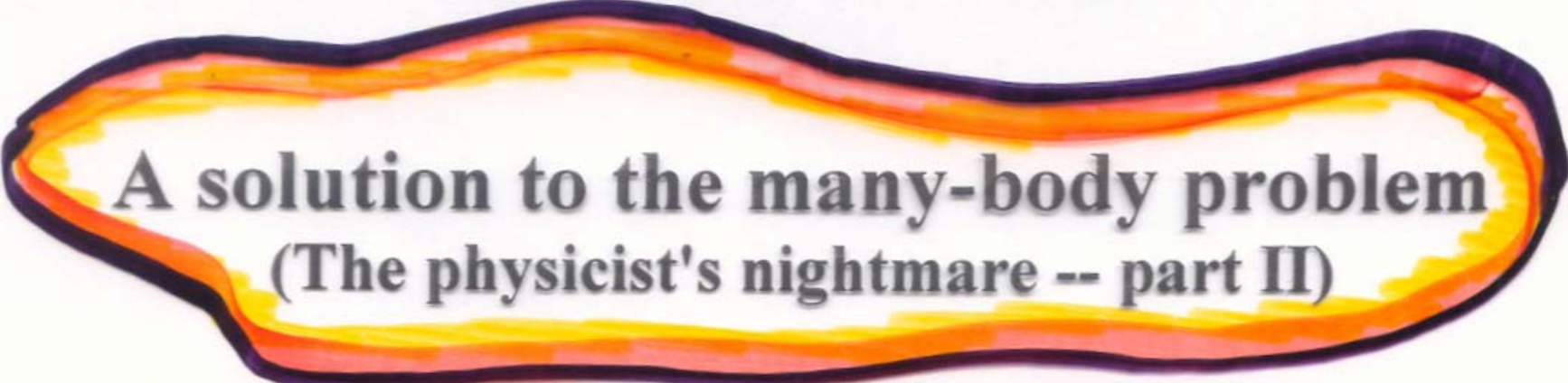
"independent particle shell model"

erklärbar als Folge des Pauliprinzip

**How many bodies are required
before we have a MANY BODY
problem**

(The physicist's nightmare)

G.E. Brown points out that this can be answered by a look at history. In 18th century NEWTONIAN MECHANICS, the three-body problem was insoluble. With the birth of GENERAL RELATIVITY around 1910 and QUANTUM MECHANICS AND QED in 1930, the two- and one-body problem became insoluble. And with modern QUANTUM FIELD THEORY, the problem of zero bodies (vacuum) is insoluble. So, if we are out for exact solutions, no bodies at all is already too many.



A solution to the many-body problem **(The physicist's nightmare -- part II)**

Because of the complexity of the MANY-BODY PROBLEM, one of the preferred methods for solving it was simply to ignore it, i.e. pretend there wasn't any interaction present.

Surprisingly enough, in some cases this METHOD produced good results anyway, and one of the great mysteries was how this could be possible

d.h.:

$$\left\{ \sum_{i=1}^A h_i \right\} \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \sum_{i=1}^A \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i + V(\vec{r}_i) \right\} \Psi(\dots)$$

$$= E \Psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$$

$$\Psi = A \left\{ \prod_j \varphi_j(r_i) \right\}$$

mit $h_i \varphi_j(\vec{r}_i) = \epsilon_j \varphi_j(\vec{r}_i)$

Ein-Teilchen
Wellenfktn.

4

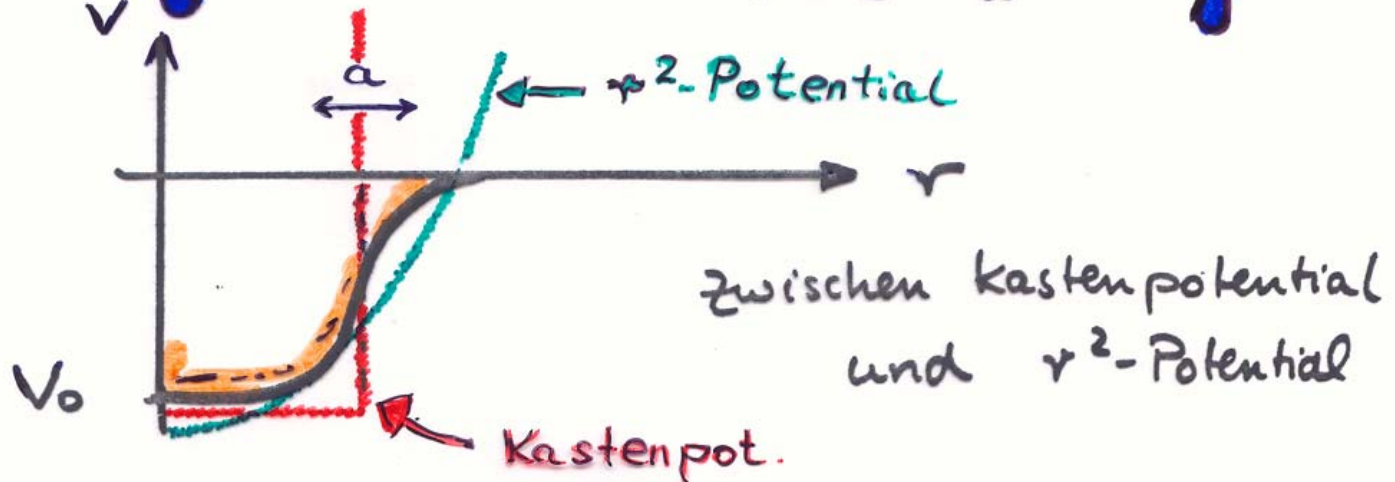
das Potential $V(\vec{r})$:

5

- a.) kurzreichweitig
- b.) $\sim 50-60 \text{ MeV}$ tief
- c.) endlich tief mit
 $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$

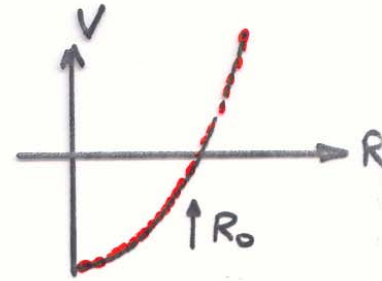
> Woods-Saxon Typ

$$V(r) = -V_0 \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}}$$



1. Ansatz:

$$V(r) = -V_0 \left[1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right]$$



$$= \frac{m}{2} \omega^2 (r^2 - R_0^2)$$

$$> \quad \varepsilon_N = \hbar \omega \left(N + \frac{3}{2} \right) - V_0$$

$$N = 2(n-1) + l$$

$$n = 1 \dots \dots \infty$$

$$l = 0 \dots \dots \infty$$

entartet in n, l

Entartungsgrad: $D(N) = \frac{1}{2} (N+1)(N+2)$

N

- Oszillatorquantenzahl

n

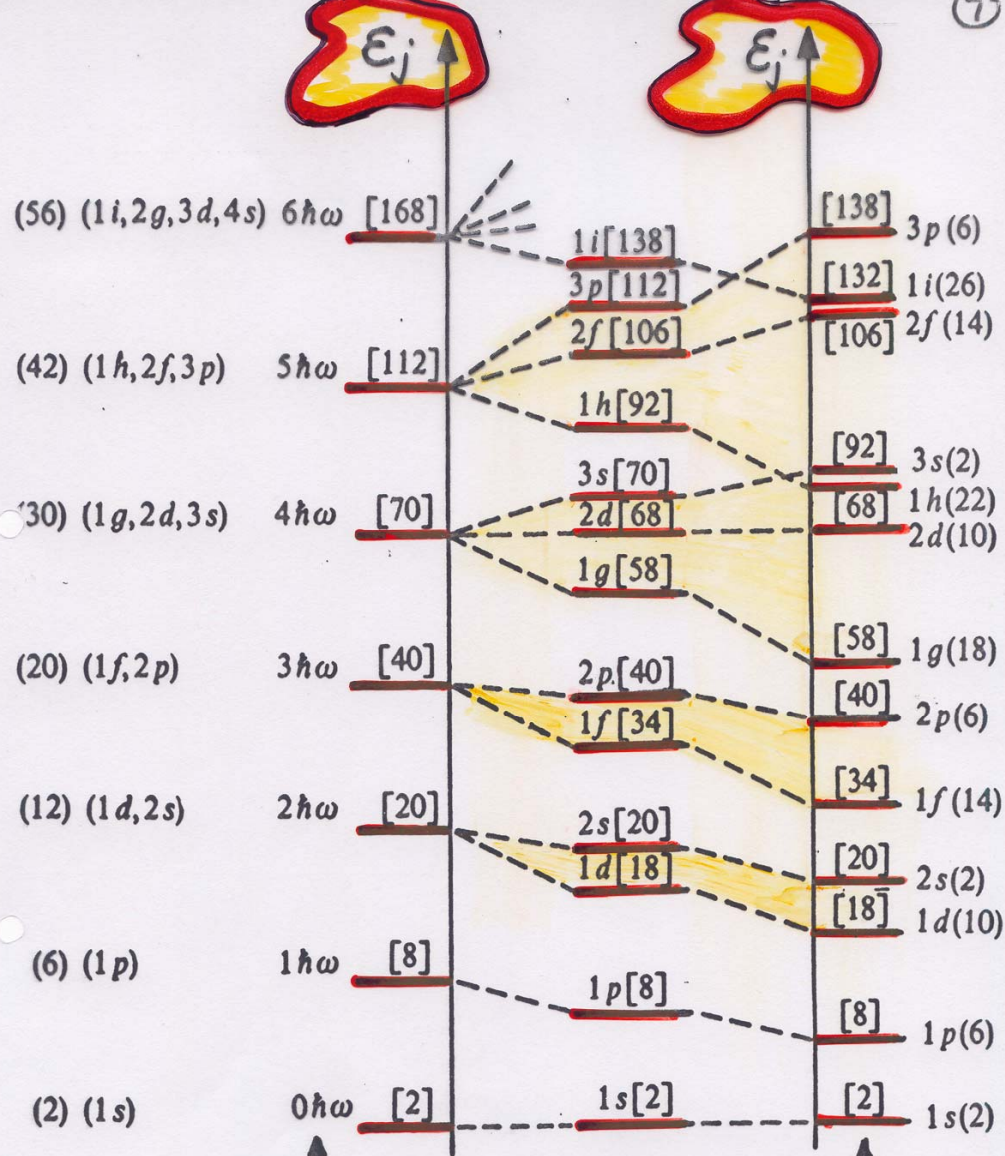
- Radialquantenzahl

l

- Drehimpulsquantenzahl



Wegen Spin !! kann jedes Oszillatorniveau mit $2 \cdot D(N)$ Protonen und $2 \cdot D(N)$ Neutronen besetzt werden.



$N\hbar\omega$
 (0 s.z. Pot.)

W.S. Pot.

Kastenpotential

Spin-Bahn-Kopplung

1949

Mayer, Haxel
Jensen, Suess

$$V_{es} = V_{es}(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$$

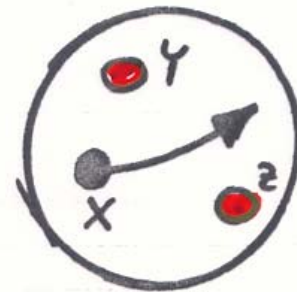
naive Vorstellung

im kerninnern: $\ell_x[Y] = -\ell_x[Z]$

> kein Nettoeffekt

aber:

positiver Effekt wenn x
an der Oberfläche



$$> V_{es}(r) \sim \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \sim \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Effekt der $\ell \cdot s$ -Kopplung:

1.) Aufhebung der Entartung $\ell \rightarrow \ell \pm \frac{1}{2}$

2.) mit $j = \ell + s$ $\pi(j) = \pi(\ell)$

$$> \ell \cdot s = \frac{1}{2} (j^2 - \ell^2 - s^2)$$

$$> \vec{\ell} \cdot \vec{s} |\varphi_{j\ell s}\rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] |\varphi_{j\ell s}\rangle$$

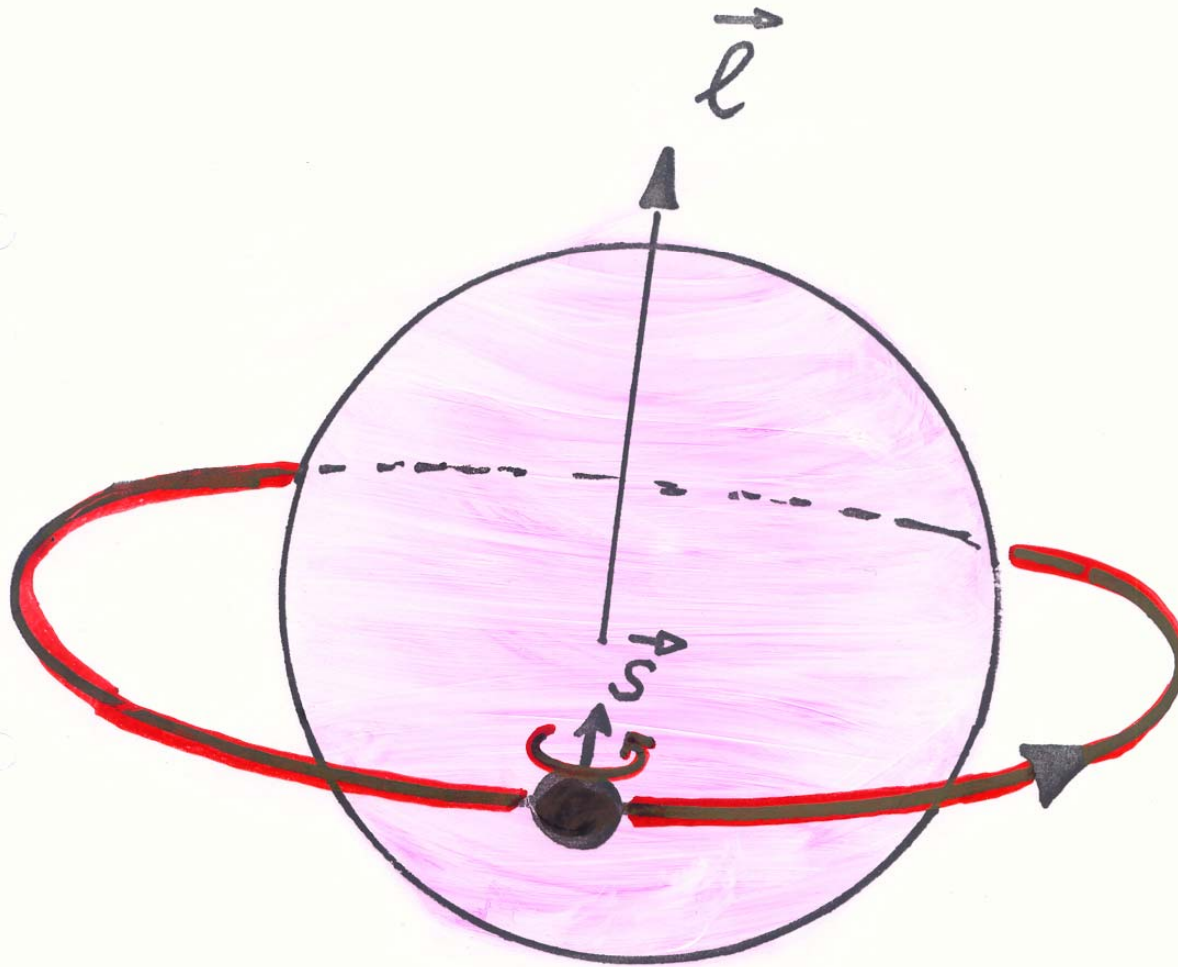
$$= \begin{cases} \ell/2 |\varphi_{j\ell s}\rangle & j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{(\ell+1)}{2} |\varphi_{j\ell s}\rangle & j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Delta E_{\ell s} \sim \ell + \frac{1}{2} \quad !! \text{ wichtig wenn } A \text{ groß}$$

3. $|j = \ell + \frac{1}{2}\rangle$ energetisch tiefer als $|j = \ell - \frac{1}{2}\rangle$

4. Entartung: $2j+1$

Illustration der $\vec{L} \cdot \vec{S}$ - Kopplung



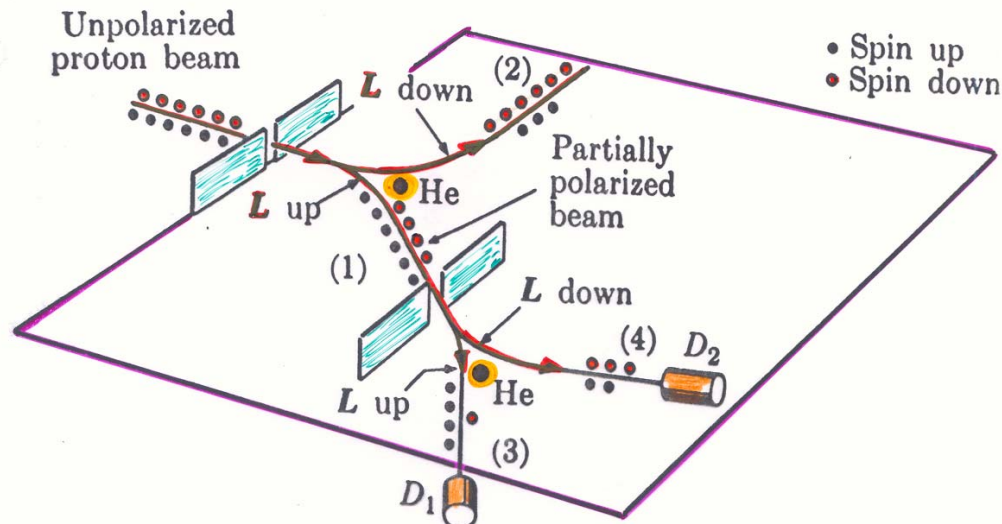
Klassischer Versuch zum Nachweis der Existenz einer ls -Wechselwirkung.

(5)

hier: Streuung unpolarisierter Protonen an einem $I=0$ Target (z.B. ^4He)



Die Zahl der rechts und links gestreuten Teilchen ist gleich **aber** sie sind unterschiedlich spin-polarisiert. Nachfolgende Doppelstreuung liefert Asymmetrie (Heusinkveld & Freier 1952)



nimmt man folgendes Kernpotential

$$U = V_0 f(r) + V_0^{ls} r_0^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) (\vec{e} \cdot \vec{s})$$

mit :

$$f(r) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 = 1.25 \text{ fm}$$

$$a = 0.65 \text{ fm}$$

$$V_0 = \left(-51 + 33 \frac{N-Z}{A}\right) \text{ MeV}$$

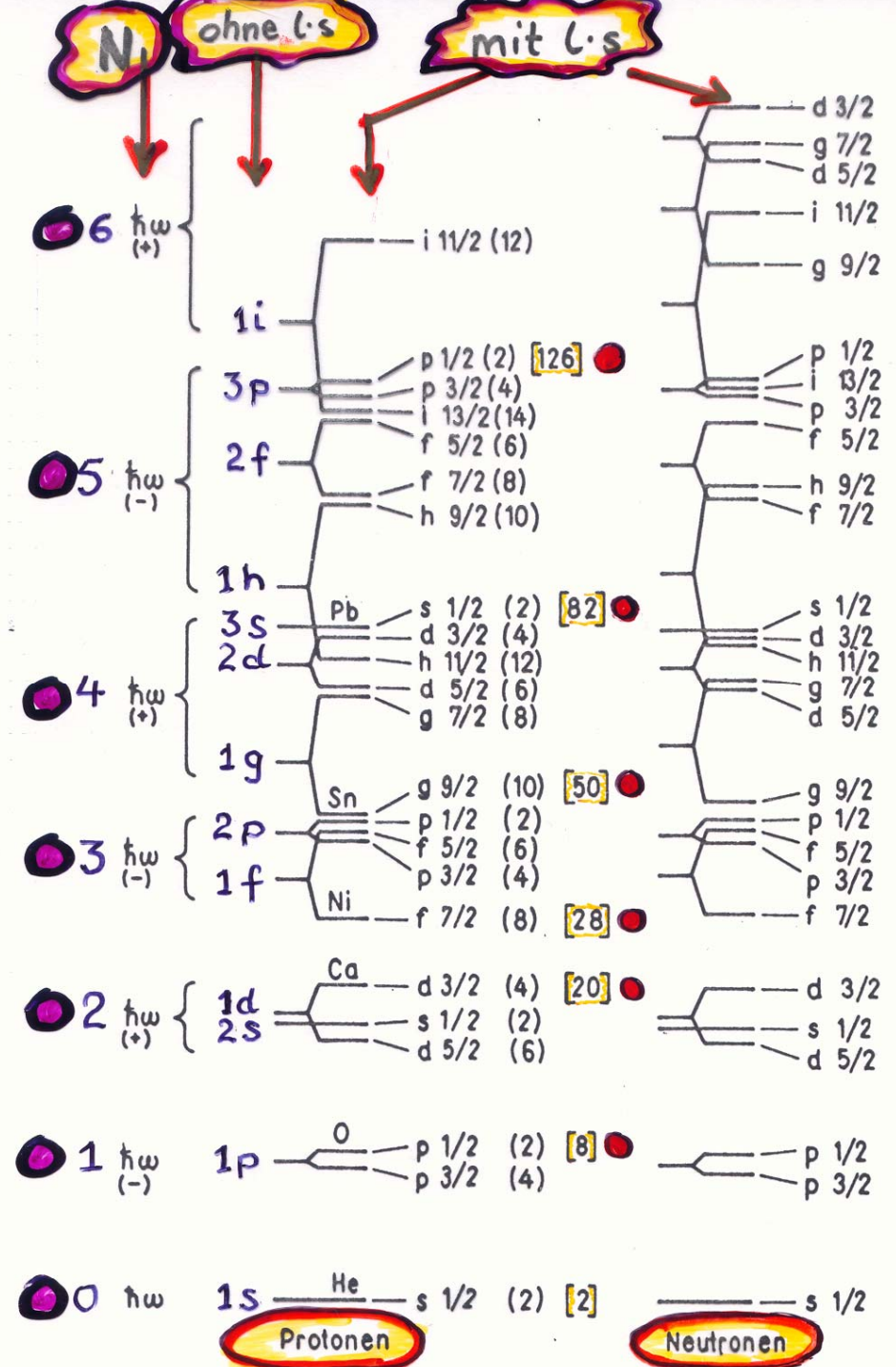
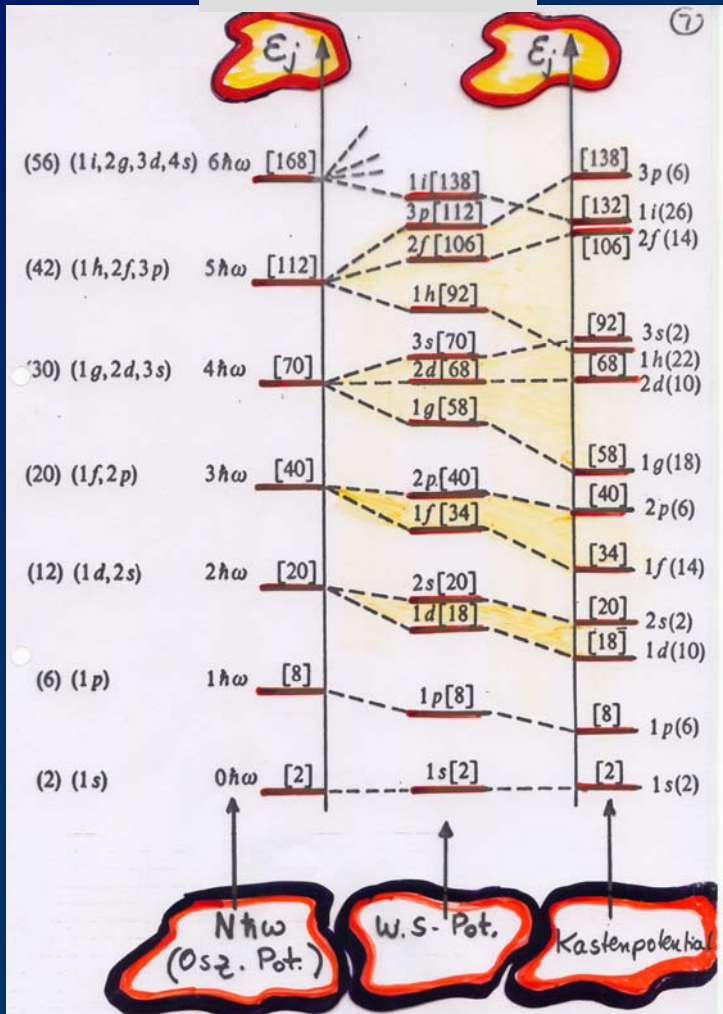
$$V_{ls} = \left(22 - 14 \frac{N-Z}{A}\right) \text{ MeV}$$

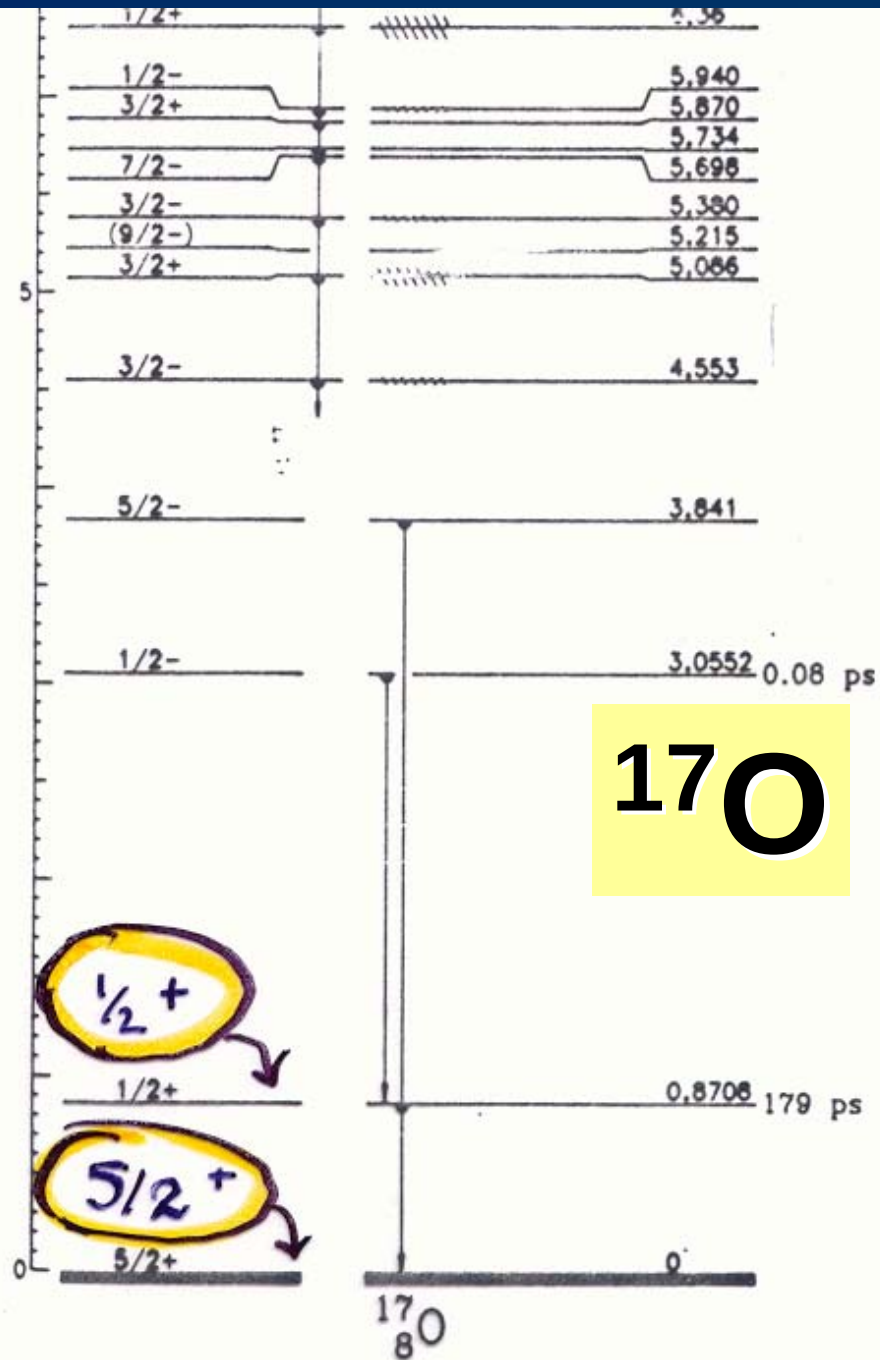
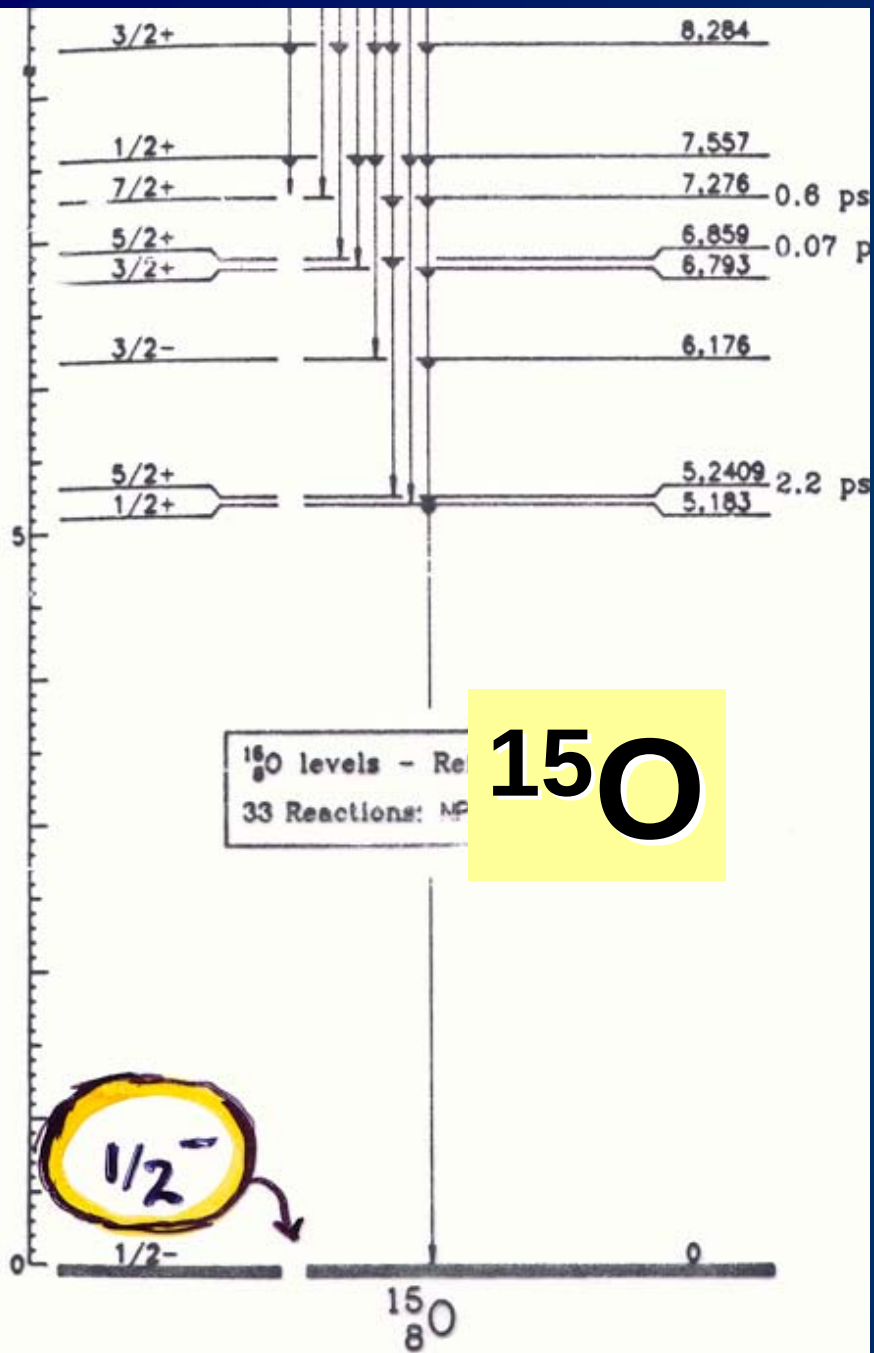
$$= -0.44 V_0$$

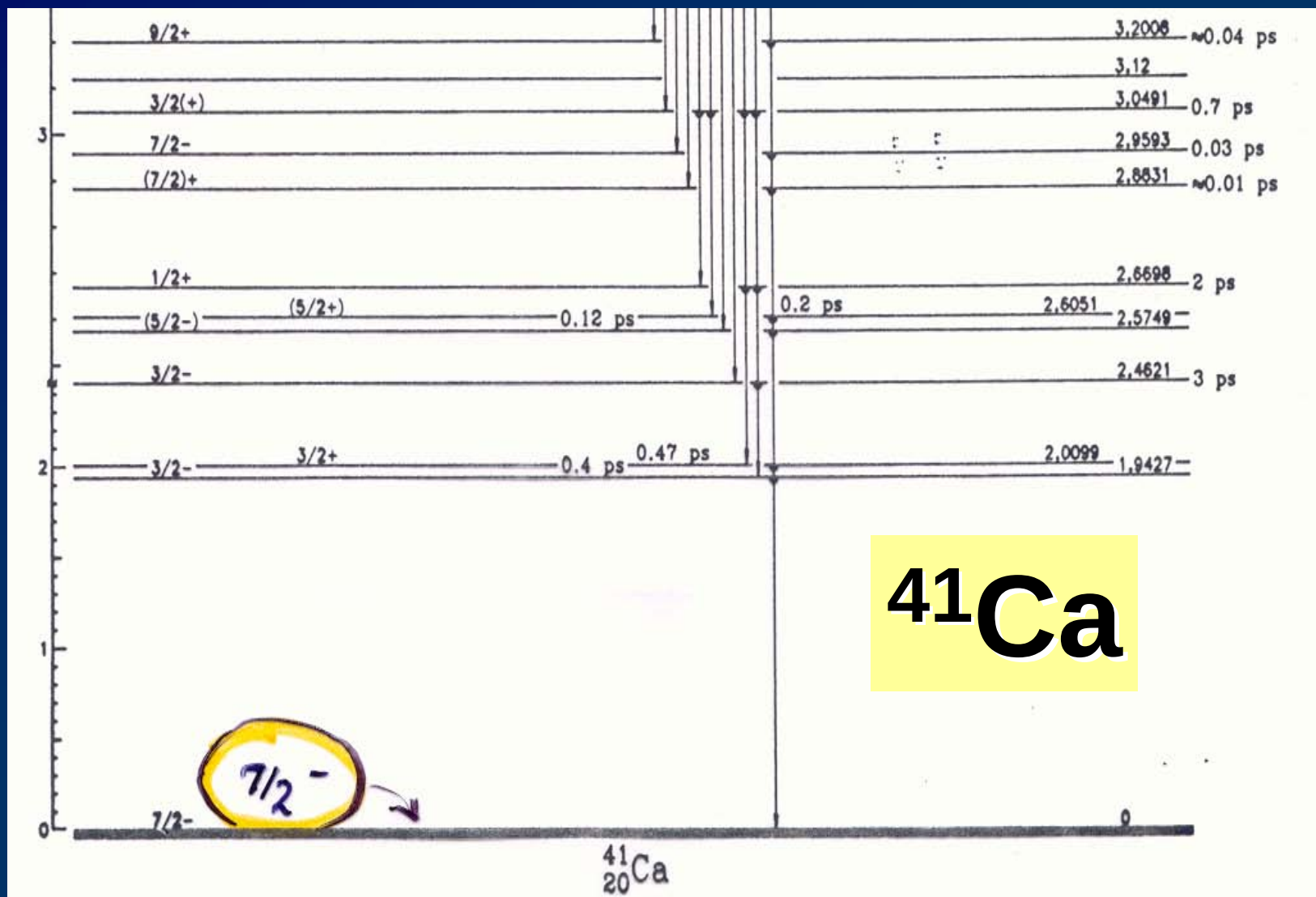
beachte Vorzeichen &
Vorzeichen von $\frac{d}{dr} f(r)$!

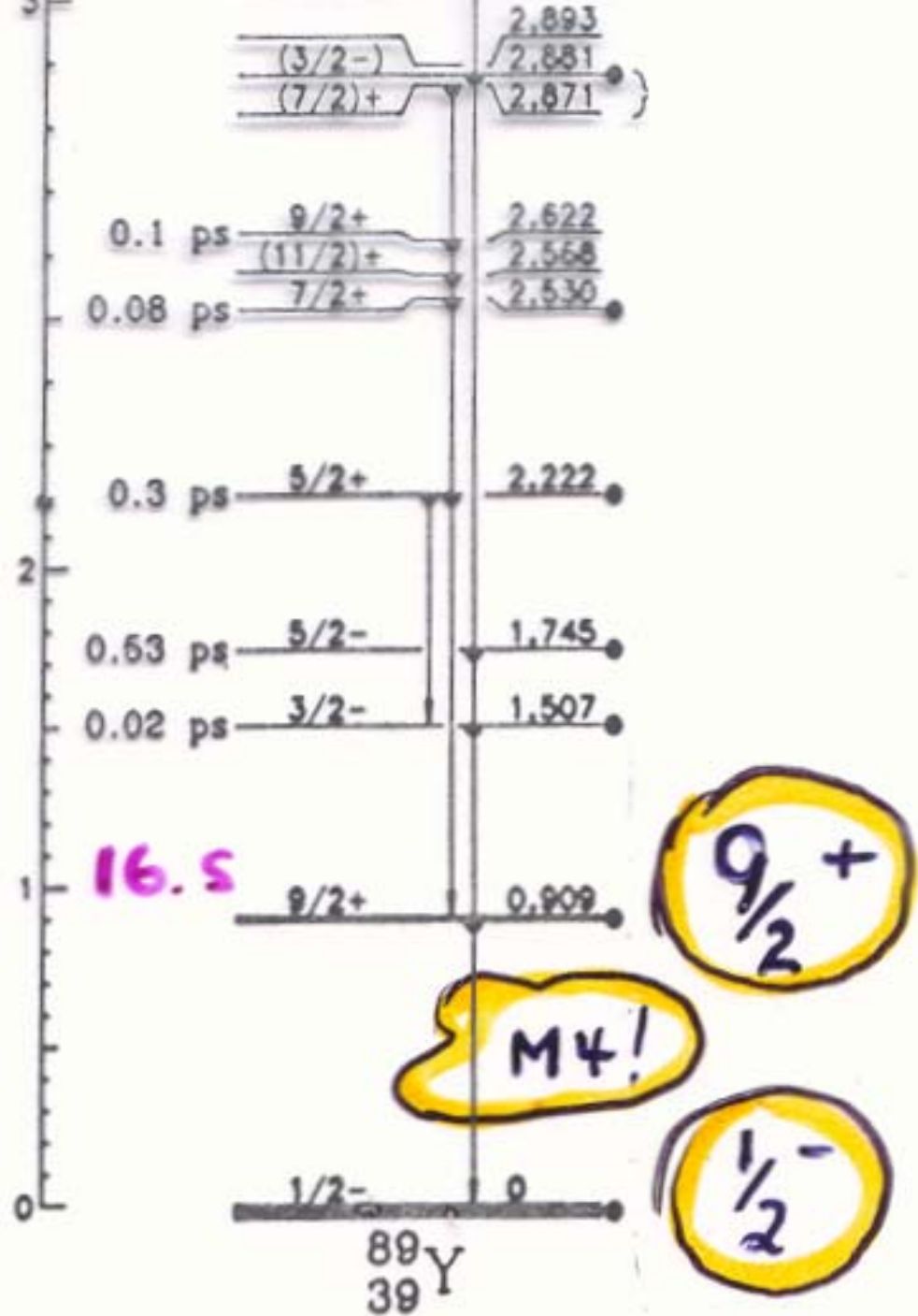
ergibt sich folgendes Termschema :

Erinnere!
vorher

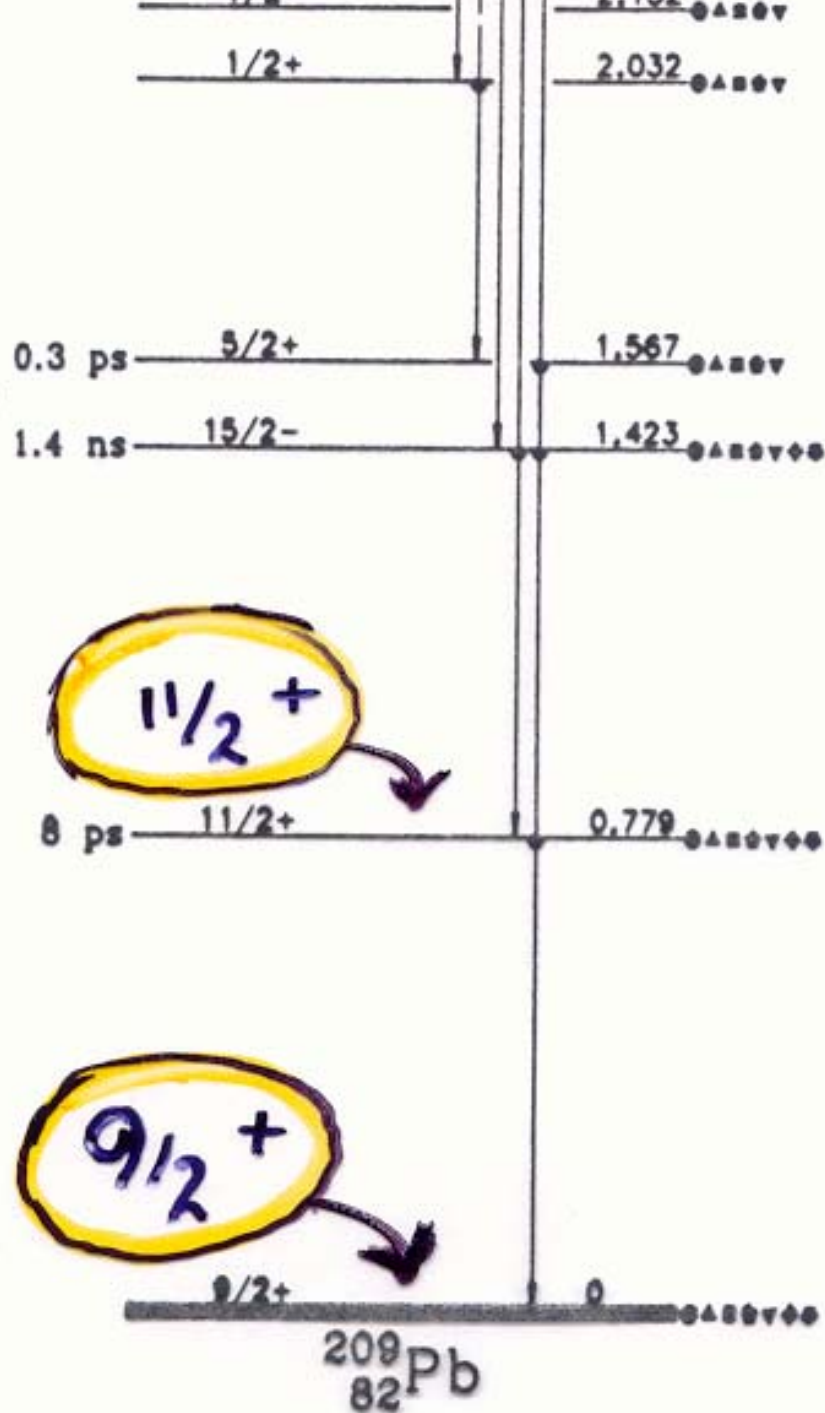








^{89}Y



^{209}Pb