Isospin in der Kernphysik

- bislang: Proton & Neutron unterscheidbar hinsichtlich
  - Ladung
  - Masse
  - möglicher Zerfall

aber

bzgl. starker WW → kein Unterschied

Vorschlag: Wir geben den Namen **Proton** & **Neutron** auf; Stattdessen

Nukleon

Proton = Nukleon (oder: ↑, ♂, ☺, ...

Neutron = Nukleon (oder: ↓, ♀, ☹ ...

d.h.:
- Nukleon erhält eine neue Quantenzahl
- die Quantenzahl besitzt zwei Einstellungen nämlich "Proton" & "Neutron"

damit: analog zum Spin

Isospin!

Konstruktion der Analogie

Beispiel

Elektron	Nukleon
Spin : $s = 1/2$	Isospin : $\tau = 1/2$
Orientierung : $m_s = \pm 1/2$	Orientierung : $\tau_z = \pm 1/2$
festzulegen über B-Feld	festzulegen über E-Feld

Definition : $|\text{Proton}\rangle = |\tau = 1/2, \tau_z = +1/2\rangle$

$|\text{Neutron}\rangle = |\tau = 1/2, \tau_z = -1/2\rangle$

Konvention der Elementarteilchenphys.

> Wellenfuktn des Nukleons :

$$\psi_N = \psi(r)\ \chi_s\ \Theta_\tau$$

$$\chi_s = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Theta_\tau = \underset{\pi}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \text{ oder } \underset{\nu}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$$

d.h.: Algebra des Isospins identisch zur Algebra des Spins!

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\underset{\tau_x}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \; \underset{\tau_y}{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \; \underset{\tau_z}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \right)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_z |\pi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|\pi\rangle$$

$$\tau_z |\nu\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|\nu\rangle$$

$$\tau^+ = \tau_x + i\tau_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau^- = \tau_x - i\tau_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau^+ |\nu\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\pi\rangle$$

$$\tau^+ |\pi\rangle = 0$$

$$\tau^- |\nu\rangle = 0$$

$$\tau^- |\pi\rangle = |\nu\rangle$$

Kommutatoren:

$$[\tau_i, \tau_j] = \begin{cases} i\tau_k & i\,j\,k \text{ zyklisch} \\ -i\tau_k & i\,j\,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

insbes: $[\tau_x, \tau_y] = i\tau_z$

Kommutatoren (ff)

$$[\tau_z, \tau^+] = \tau^+$$

$$[\tau_z, \tau^-] = \tau^-$$

$$[\tau^+, \tau^-] = 2\tau_z$$

- $$\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2$$

$$\tau^2 |\pi\rangle = \left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right] |\pi\rangle$$

$$= 3/4 \; |\pi\rangle$$

$$= \tau(\tau+1) \; |\pi\rangle$$

usw.

d.h. : Nukleonwellenfunktionen sind Eigenfunktionen von τ^2 und τ_z

- $$\vec{T}_{Ges} = \sum_{j=1}^{A} \vec{\tau}_j \qquad T_z = \sum_{j=1}^{A} \tau_z$$

$$T_z \,|\,\text{Kern}\rangle = \frac{1}{2}(Z-N)$$

$$= \text{"}-\text{"} \frac{\text{Neutronenüberschuß}}{2}$$

- elektrische Ladung:

$$q = \left(\frac{1}{2} + \tau_z\right) e = \begin{cases} +1 & |\pi\rangle \\ 0 & |\nu\rangle \end{cases}$$

Multipletts

Für jedes T (bzw τ) gibt es $2T+1$ mögliche Einstellungen von T_z (bzw τ_z)

Beispiel:

1.) Nukleon: $\tau = \frac{1}{2}$; $2\tau + 1 = 2$

2.) Zwei-Nukleonen

$|pp\rangle$ $T = 1$ $T_z = 1$

$|np\rangle$ $T = 1$ $T_z = 0$

$|nn\rangle$ $T = 1$ $T_z = -1$

Vorsicht:
NICHT! Deuteron (siehe später)

Konsequenz des Isospins

1) Nukleonen sind formal ununterscheidbar

2.) Pauliprinzip kann nun verallgemeinert werden

$$\Psi_{Ges} = \Psi(\text{Ort})\,\Psi(\text{Spin})\,\Psi(\text{I-spin})$$

$$A = \begin{cases} S & S & A \\ S & A & S \\ A & S & S \end{cases}$$

Isospin im 2-Nukleonen-System

① Deuteron:

$\Psi(\text{ort}) = s\text{-Welle} \longrightarrow$ **symm.!**

$\Psi(\text{spin}) = |\uparrow\uparrow\rangle \longrightarrow$ **symm.!**

$\Psi(\text{I-spin}) = |\uparrow\downarrow\rangle \longrightarrow$ **a-symm.!**

$$\Psi_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\underset{①}{n}\,\underset{②}{p} - \underset{①}{p}\,\underset{②}{n})$$

Statthalter für I-spin

① $\hat{=}$ Wellenfktn $(\vec{r}_1, s_1)$

② $\hat{=}$ Wellenfktn $(\vec{r}_2, s_2)$

Unter Vertauschung der Teilchen:

$$\Psi_d' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(pn - np)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-np + pn)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(np - pn)$$
$$= -\Psi_d$$

② Proton + Proton: (oder Neutron + Neutron)

$\Psi(\text{ort}) = s\text{-Welle} \longrightarrow$ symm.!

$\Psi(\text{Spin}) = |\uparrow\downarrow\rangle \longrightarrow$ a-symm

gefordert von Pauli

$\Psi(\text{I-Spin}) = |\uparrow\uparrow\rangle \longrightarrow$ symm.

Keine Wahl da $T_z = \pm 1$

③ Proton + Neutron (aber nicht Deuteron)

ψ (Ort) = S-Welle $\longrightarrow$ symm.

ψ (Spin) = $|\uparrow\downarrow\rangle$ $\longrightarrow$ a.symm.

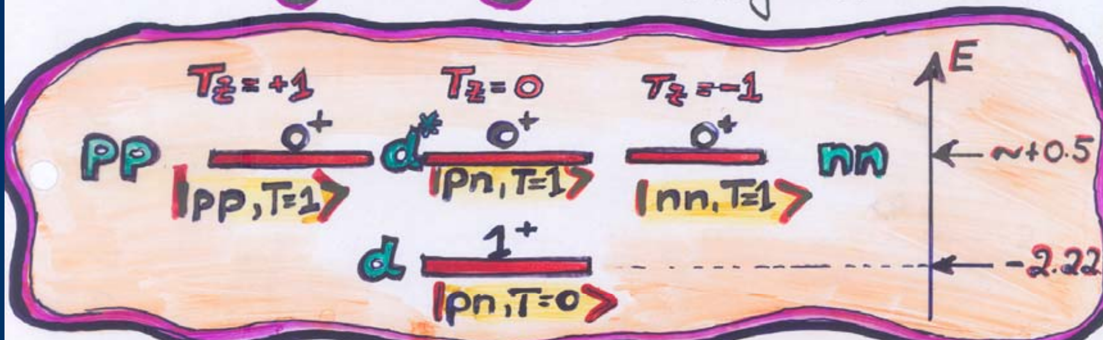
ψ (I-Spin) = $|\uparrow\uparrow\rangle$ $\longrightarrow$ symm.

d.h.: Wellenfunktionen in ② und ③ sind identisch!

oder:

da Kernkraft invariant unter Vertauschun[g] von Proton und Neutron im selben I-spin Muliplett:

② und ③ sind energetisch entartet!



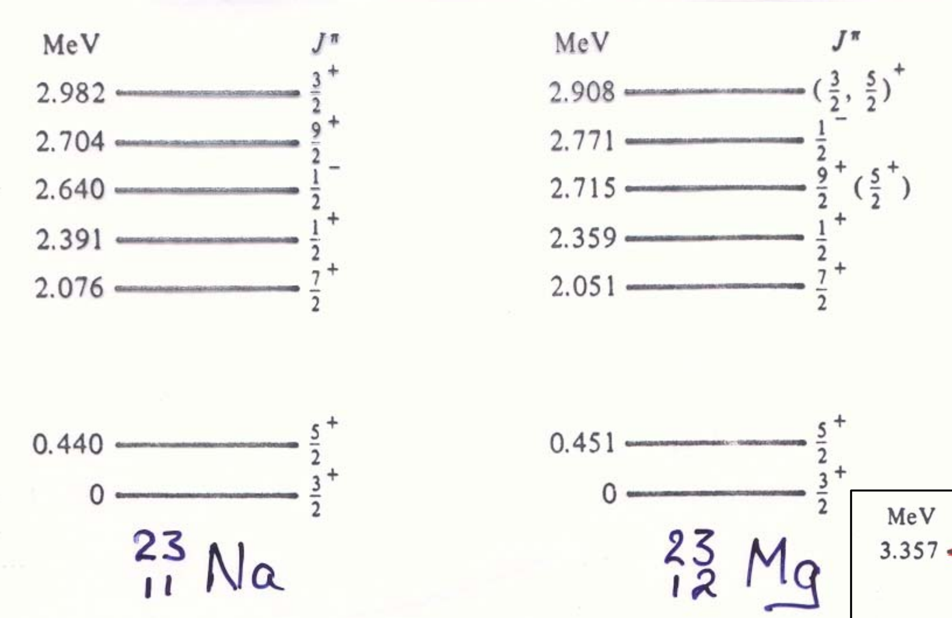
T=1

$$\varphi_1^1 = \pi(1)\,\pi(2)$$
$$\varphi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pi(1)\,\nu(2) + \nu(1)\,\pi(2)\right)$$
$$\varphi_1^{-1} = \nu(1)\,\nu(2)$$

T=0

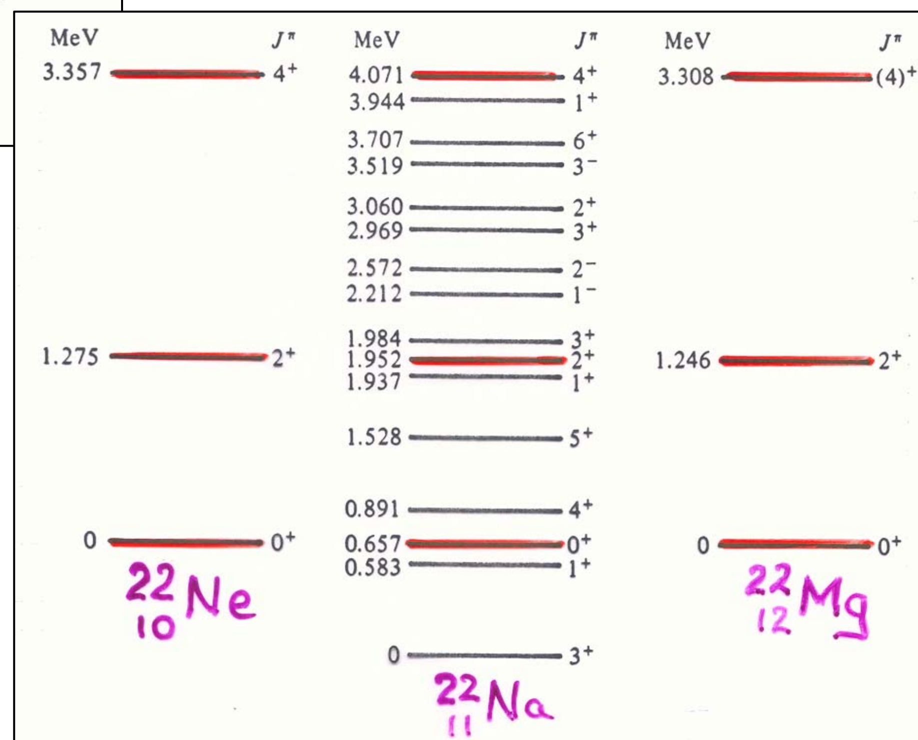
$$\varphi_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pi(1)\,\nu(2) - \nu(1)\,\pi(2)\right)$$

Isospin in der Kernphysik

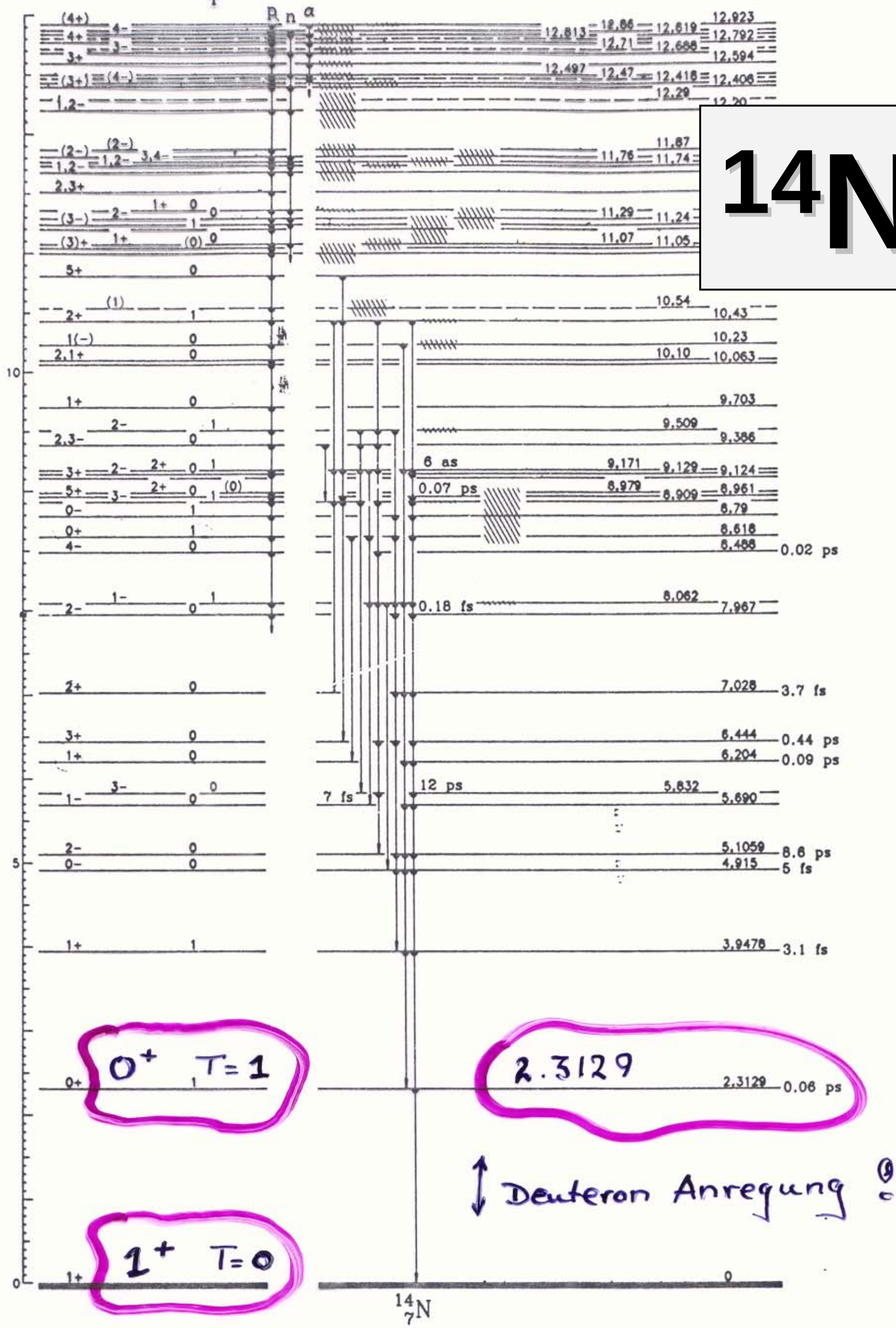


Spiegelkerne

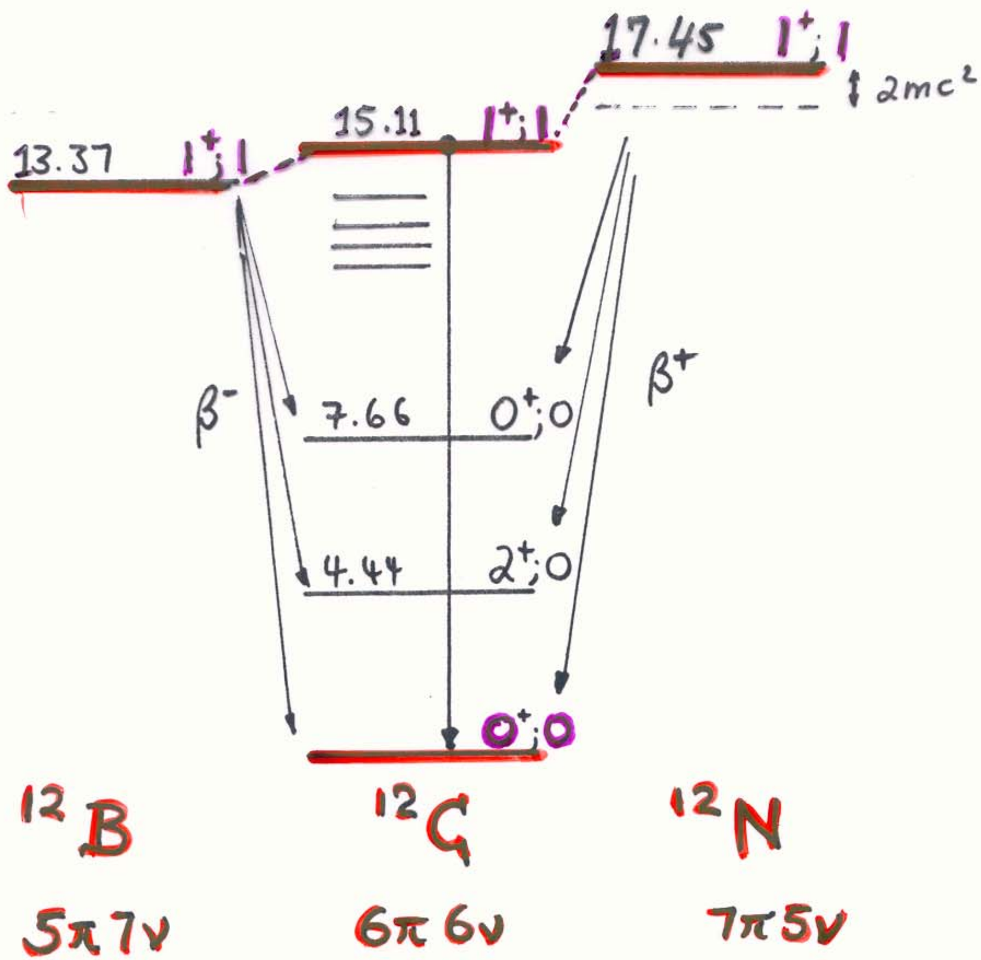
Analogzustände



^{14}N



I-Spin Triplett im A=12 System



I-Spin – Symmetriebrechung durch Coulombeffekte !

Einige Fakten zum Isospin

1. I-spin war eingeführt zur Formulierung des Pauli-Prinzips auf Nukleon-Basis (→ bessere Buchführung)

2. Die hadronische WW hängt nicht von der Ladung ab. (deshalb auch 1)

$$\Rightarrow \quad [H_h, T] = 0$$

(d.h. Ladungsunabhängigkeit nur innerhalb eines T-Multipletts)

3. Der I-Spin macht Aussage über die Symmetrie der Wellenfunktion bzgl. Ort und Spin

4. Der energetisch günstigste Zustand eines n-Nukleonensystems wird durch eine in Ort und Spin weitgehend symmetrische Konfiguration erreicht (s. Hund'sche Regel in der Atomphysik)

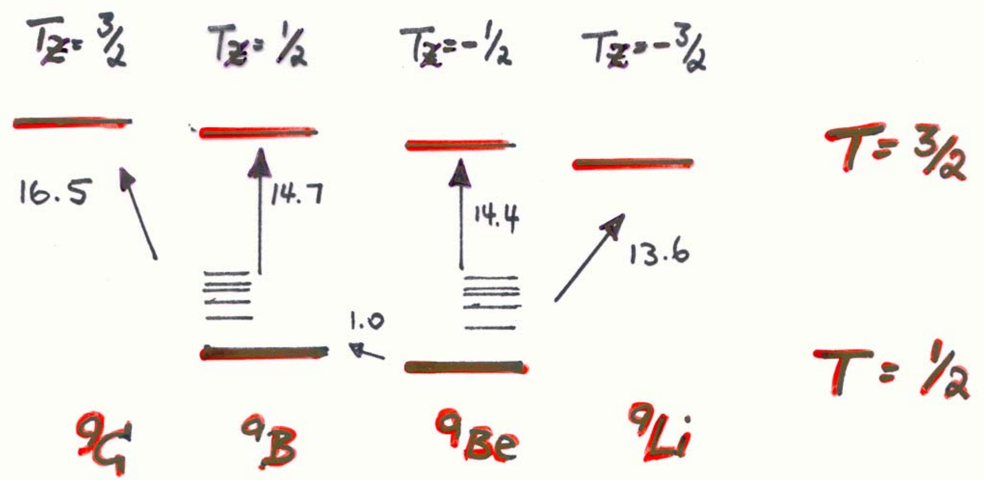
$$\Rightarrow \quad T\,(\text{Kern im Grundzustand}) = T_{min} = \left|\frac{N-Z}{2}\right|$$

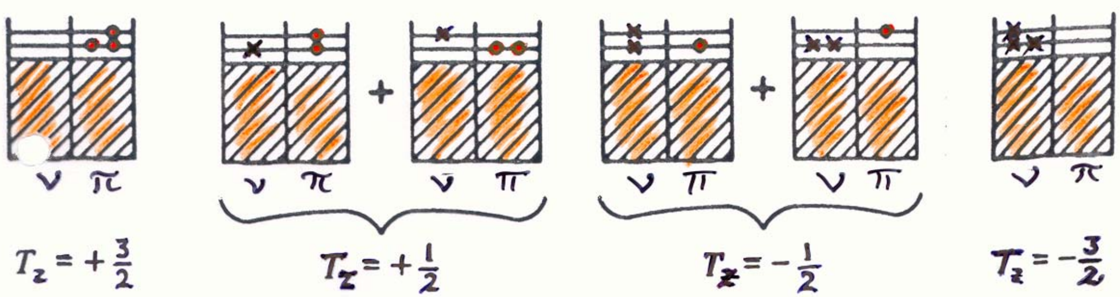
5. Isospin-Symmetrie wird gebrochen durch

   a. Proton - Neutron Massenunterschied

   b. Coulombwechselwirkung

⑥ Für $N \sim Z$ kerne (leichte bis mittelschwere) sind die T-Multipletts leicht identifizierbar im diskreten Spektrum (s.a. A = 12, 22, usw)



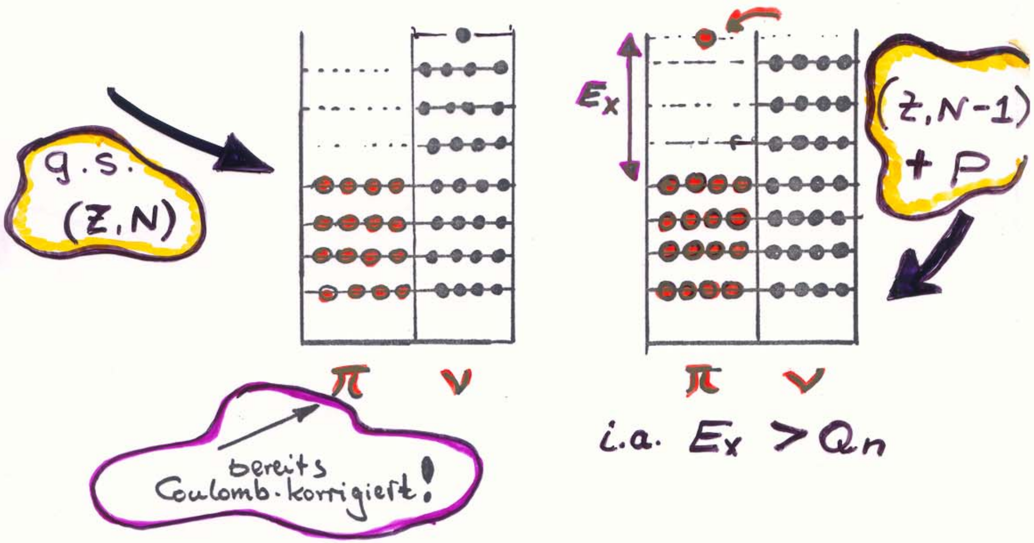


Aber:

I-Spin Unreinheit für $N \sim Z$ Kerne sehr groß. !!

7. Bei $N >> Z$ kernen ($A > 100$) liegen die Isospinanregungen im Kontinuum. Aber I-Spin ist sehr rein

$\succ$ schmale "Analogzustände"



8. Die volle Bedeutung des I-Spins wird besonders in der Teilchenphysik deutlich

Beispiel 1: **Pion**

π^+	π^0	π^-	$T = 1$
$T_z = 1$	$T_z = 0$	$T_z = -1$	

Triplett

$m(\pi^+) \equiv m(\pi^-) = 139.56755$

$m(\pi^0) = m(\pi^+) - 4.5942$ MeV