

Zwei-Nukleonen-System

Vorgehensweise

1

Eigenschaften des Deuterons, exp.
Bestimmung & Interpretation

2

Quantenmechanik des gebundenen Zustands

3

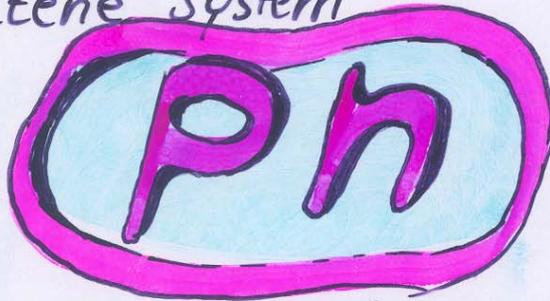
Streuung

- a.) allgemeine Betrachtungen
- b.) N-N (Nukleon-Nukleon)
Streuung & Eigenschaften der
Kernkräfte

1

Deuteron

das einfachste von kernkräften zusammengehaltene System



Bindungsenergie:

$$B_d = m_p + m_n - m_d$$
$$= 2.225 \text{ MeV}$$

➤ $B/A \sim 1.1 \text{ MeV}$ (vgl. Bethe-W) $(7-8 \text{ MeV/A})$

1

experimentelle Bestimmung der Bindungsenergie

- massenspektrometrisch
- Einfang thermischer Neutronen



beachte: $E_B = E_\gamma + E_d^{\text{Recoil}}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p}(n+\text{therm}) \approx 0 \\ \vec{p}(\text{proton}) \approx 0 \end{array} \right\} \hbar \vec{k} = -\vec{p}(d)$$

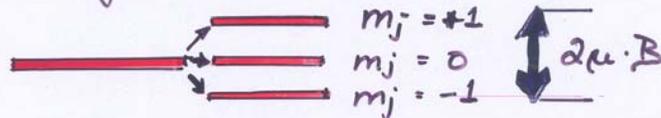
$$E_d^{\text{Recoil}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} \sim \underline{1 \text{ keV}}$$

2.22 MeV

2 Spin des Deuterons

S = 1

- Bestimmung über Hyperfein-WW (d.h.: WW des magnetischen Moments mit \vec{B} -Feld)



S. Atomphysik: Zeeman-Effekt
Paschen-Back-Effekt

- Kernspinresonanz (Spinumklapp-Prozesse)

allgemein:

③

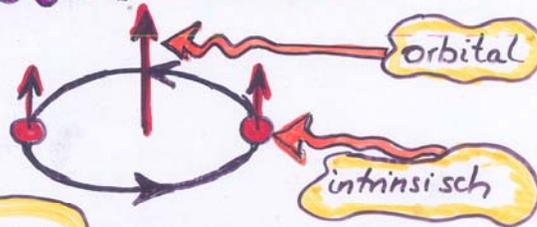
$$\mu := g_K \mu_K \cdot I$$

Kern-g-Faktor

(g-Faktor muß nicht = 1 sein, da ja die rotierende Ladung auch eine innere Struktur haben kann)

Beispiel: $g_K(d) = 0.857$

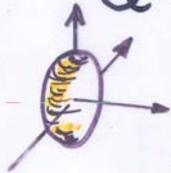
oder:



④

Quadrupolmoment

$$Q = 2.86 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 = 2.86 \cdot 10^{-3} \text{ b}$$



d.h. kleine (aber endliche) Abweichung von Kugelsymmetrie

(Bestimmung ebenfalls über HF-WW möglich)

⑤

Parität

$$\pi(d) = "+"$$

Bestimmung: vielfältig

$$n+p \rightarrow d+x$$

M1 Strahlung

Interpretation der Befunde

1

Bindungsenergie $E_B = 2.225 \text{ MeV}$ — die q.m. Beschreibung der NN-WW wird dieses zu erklären haben (später)

2

$S=1$

Proton & Neutron im relativen $L=0$ -Zustand und addieren ihre Spins

d.h. $J_d = S_p + S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
 $L=0$

● Hinweis: $L=1, L=2$ wäre zunächst auch möglich

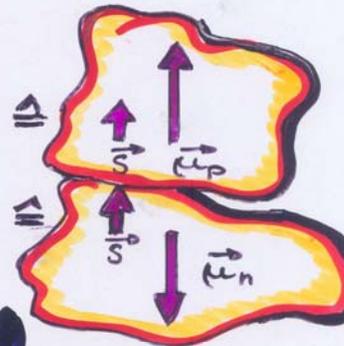
3

$\mu_d = 0.857 \mu_k$

$\mu_p = 2.7929 \mu_k$

$\mu_n = -1.9131 \mu_k$

$\mu_p + \mu_n = 0.8798$
 $= 1.027 \mu_d$



d.h.: $L=0$ Konfiguration dominant

$2S+1 \rightarrow \uparrow \text{ } ^3S_1 \leftarrow L+S$ — Konfiguration

4

$$Q \neq 0$$

Abweichung von Kugelsymmetrie

d.h.:

$L > 0$ Konfigurationen sind beigemischt
($L=1, L=2$ möglich, $L > 2$ ausgeschlossen
wegen (2))

5

$$\pi(d) = "+"$$

d.h.: $L=1$ ausgeschlossen !!

$$\Psi_d = \alpha \left| \begin{array}{c} \uparrow^p \\ \uparrow_n \\ L=0 \end{array} \right\rangle_{J=1} + \beta \left| \begin{array}{c} \uparrow^p \\ \downarrow_n \\ L=2 \end{array} \right\rangle_{J=1}$$

$$\alpha \approx 1; \beta \ll 1; \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$= \alpha \left| {}^3S_1 \right\rangle + \beta \left| {}^3D_1 \right\rangle$$

heute akzeptierter Wert

$$\beta^2 \sim 4-8\%$$

Beschreibungsversuch des Deuterons durch ein Zentralpotential

(Die Deformation des "d" kann nur durch nicht-zentrale Kräfte hervorgerufen werden)
hier nicht enthalten

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0 & r < R_0 \\ 0 & r \geq R_0 \end{cases}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) \\ &= R(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

setze: $u(r) = r R(r)$

separabel
wegen Zentralpotential

$$\left\{ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] u = 0 \right.$$

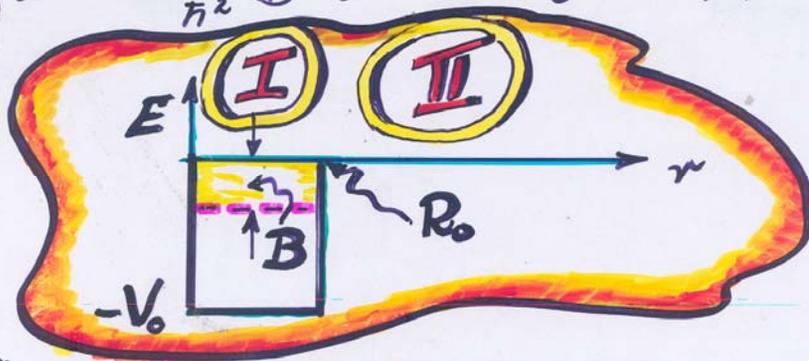
$$l=0: u'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r)) u = 0$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_n}$$

$$\left\{ 2\mu \approx m \text{ (Nukleon!)} \right.$$

$$\text{I} \quad u'' + \frac{m}{\hbar^2} (V_0 - B) u = 0 \quad r < R_0$$

$$\text{II} \quad u'' - \frac{m}{\hbar^2} B u = 0 \quad r > R_0$$



Lösung: $u = \alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr}$

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m(V(r) - B)}$$

Randbeding'n:

$$u(r=0) = 0$$

$$u(r \rightarrow \infty) = 0$$

Vorzeichen

I

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0$$

$$u_1(r) = \alpha_1 (e^{ik_1 r} - e^{-ik_1 r})$$

$$u_1(r) = A_1 \sin k_1 r \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m(V_0 - B)}$$

II

$$V(r) = 0 \quad k_2 = \frac{i}{\hbar} \sqrt{mB}$$

$$u_2(r) = \alpha_2 e^{-\chi r} + \beta_2 e^{\chi r}$$

= 0 da $u(r \rightarrow \infty) = 0$

$$u_2(r) = A_2 e^{-\chi r} \quad \chi = \frac{1}{\hbar} \sqrt{mB}$$

Stetigkeit bei $r = R_0$

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \quad A_1 \sin k R_0 = A_2 e^{-\alpha R_0} \\ & \textcircled{2} \quad k A_1 \cos k R_0 = -\alpha A_2 e^{-\alpha R_0} \\ & \left[\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \right]^{-1} : k \cot k R_0 = -\alpha \end{aligned}$$

$$\cot \left[\frac{R_0}{\hbar} \sqrt{m(V_0 - B)} \right] = -\sqrt{\frac{B}{V_0 - B}}$$

d.h.: V_0 , B und R_0 sind verknüpft

$$\begin{aligned} \text{für } R_0 & \approx 1.4 \text{ fm} \quad (1.2 \cdot A^{1/3}) \\ B & = 2.22 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\cot \left[\frac{1.4}{\hbar c} \sqrt{m c^2 (V_0 - 2.22)} \right] = -\sqrt{\frac{2.22}{V_0 - 2.22}}$$

$mc^2 \approx 1000 \text{ MeV}$
 $\hbar c \approx 197 \text{ MeV fm}$

$= x$ x

$$\cot[0.22 \sqrt{x}] + \sqrt{2.22/x} = 0$$

erste Nullstelle bei $V_0 = 58 \text{ MeV}$

$$\text{da } \sqrt{\frac{B}{V_0 - B}} \ll 1 \quad \text{arccot}[\dots] \approx \frac{\pi}{2}$$

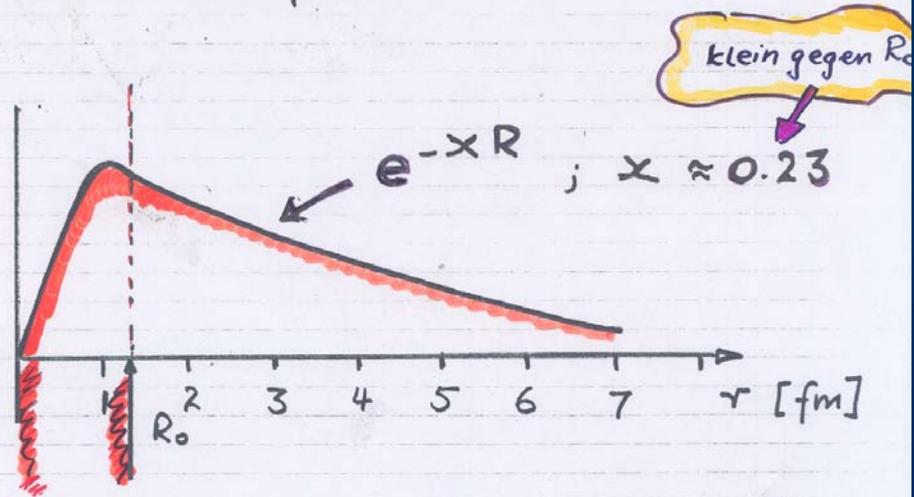
$$\frac{R_0}{\hbar} \sqrt{m(V_0 - B)} = \frac{\pi}{2}$$

$$V_0 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{4m} \frac{1}{R_0^2} \approx \frac{100}{R_0^2}$$

$$ff: V_0 \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2 c^2}{mc^2} \left(\frac{1}{R_0}\right)^2 \quad (14)$$

$$\approx 100/R_0^2 \quad \leftarrow \text{Deuteron}$$

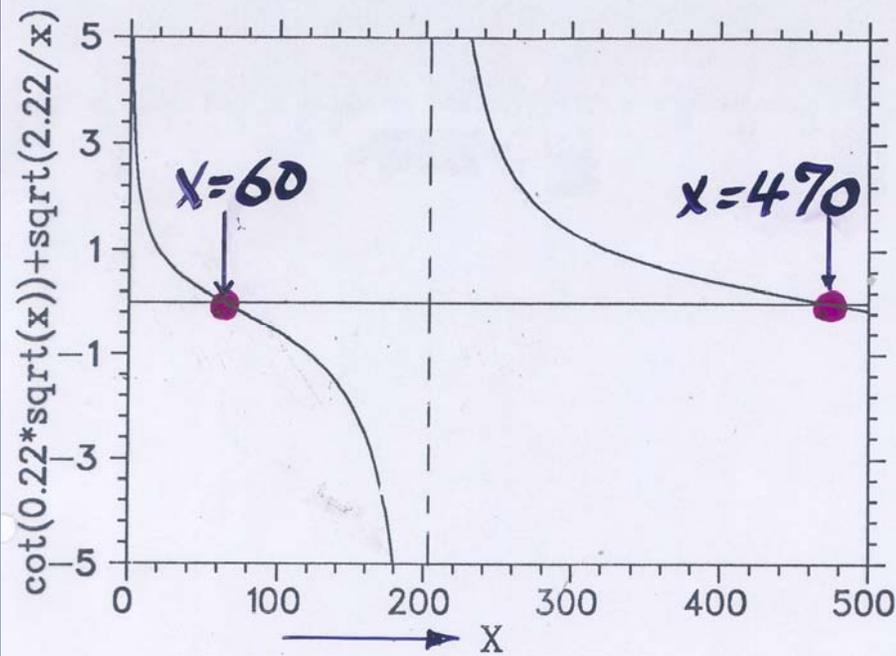
Graph der Wellenfunktion



Befund:

- ① V_0 ist viel tiefer als B
- ② Vieldeutigkeit bzgl. V_0 & R_0 : $V_0 R_0^2 = \text{const}$
- ③ die Wellenfunktion ist sehr langreichweitig d.h. Proton und Neutron bewegen sich die meiste Zeit außerhalb des Potentials

fast frei



$$R_0 = 1.4 \text{ fm}$$

diskrete Vieldeutigkeiten !

$$\cot \left[\frac{1.4}{\hbar c} \sqrt{mc^2 (V_0 - 2.22)} \right] = - \sqrt{\frac{2.22}{V_0 - 2.22}}$$

$mc^2 \approx 1000 \text{ MeV}$
 $\hbar c \approx 197 \text{ MeV fm}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_x$

$$\cot[0.22\sqrt{x}] + \sqrt{2.22/x} = 0$$

erste Nullstelle bei $V_0 = 58 \text{ MeV}$

Wiederholung

Das Deuteron

1 Bindungsenergie : 2.22 MeV klein

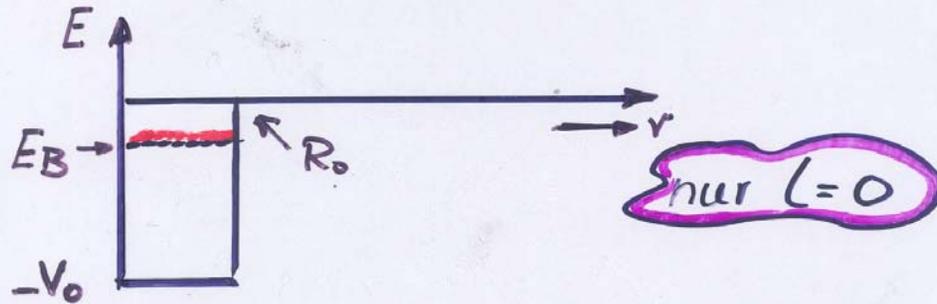
2 Spin / Parität : $J^{\pi} = 1^{+}$
= $p^{\uparrow} + n^{\uparrow}$
 $J = l + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$
 $= l - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ l=0 : ~ 96%
l=2 : ~ 4%
 $\neq l=1$ da dann $\pi = "-"$

3 magnetisches Moment : $\mu_d = 0.857 \mu_k$
($\mu_k = \frac{e\hbar}{2m_N c}$) l=2 !!
 $\mu_d \approx \mu_p + \mu_n$
2.793 - 1.913 = 0.88
 $\uparrow \uparrow$ $\uparrow \downarrow$
s μ_p s μ_n

4 Quadrupolmoment : $Q = 2.83 \cdot 10^{-3} b$
l=2 !!

5 $\psi_d = \alpha |^3S_1\rangle + \beta |^3D_1\rangle$
 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ $\beta^2 \sim 0.05$

6 Versuch einer Beschreibung des d in einem Potential



$E_B = 2.22 \text{ MeV} \rightarrow V_0 \sim 50 - 60 \text{ MeV}$

• \exists Vielseitigkeiten $V_0 R_0^2 = \text{const}$
 aber $V_0 \gg E_B$!!

• Die Wellenfunktion ist sehr langreichweitig, d.h.

p & n fast frei

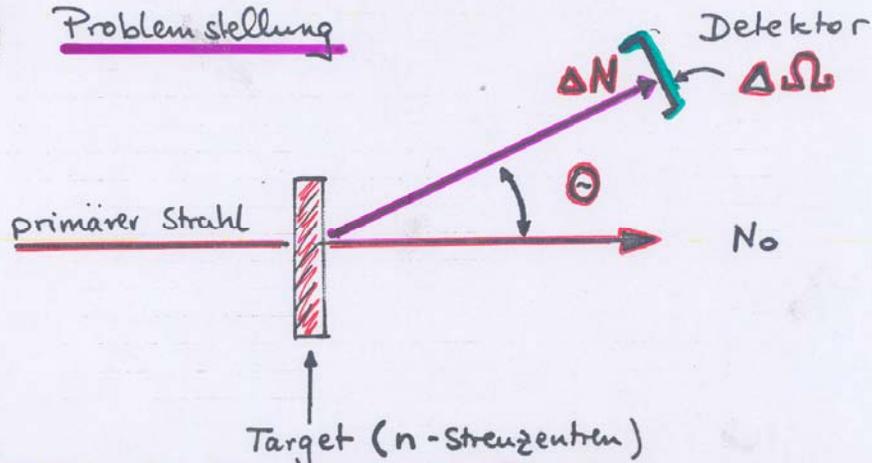
Streuung

1.) allgemeine Betrachtungen

2.) N-N Streuung & Eigenschaften der Kernkräfte

1)

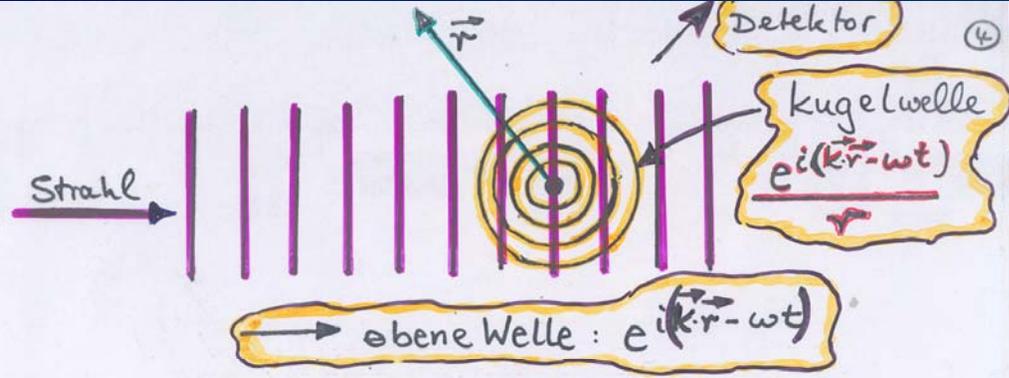
Problemstellung



$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{\Delta N}{N_0} \frac{1}{n} \frac{1}{\Delta \Omega}$$

abhängig von der Struktur der Streuzentren

Versuch einer q.m. Formulierung d.h. Reduktion auf "mikroskopische" Größen



Behandlung als stationäres Problem

darf man das?

d.h.:

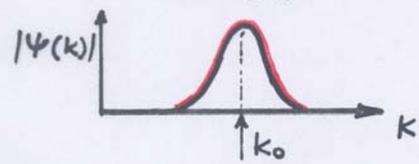
$$\Psi(\vec{r}) = A \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f_k(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \right]$$

einlaufend Ψ_e

auslaufend Ψ_a

Streuamplitude

eigentlich muß man Wellenpakete benutzen (d.h. eine zeitabhängige Beschreibung)



$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

aber:

$$f_k(\theta) = f_{k_0}(\theta)$$

$\forall k$ im W.-Paket

Bedeutung der Streuamplitude

einfall. Stromdichte = Geschwindigkeit * Teilchen dichte

$$j_e = v_e \cdot \psi_e^* \psi_e$$
$$= v_e \cdot A^2$$

auslaufende Stromdichte in das Flächenelement
 $dF = r^2 d\Omega$:

$$dja = j_a dF = v_a \psi_a^* \psi_a dF$$
$$= v_a \left| A f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right|^2 r^2 d\Omega$$
$$= v_a A^2 |f(\theta)|^2 d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_e} \frac{dja}{d\Omega} = \frac{v_a}{v_e} |f(\theta)|^2$$

elastisch $v_a = v_e$

$$\frac{d\sigma_{\text{elast}}(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

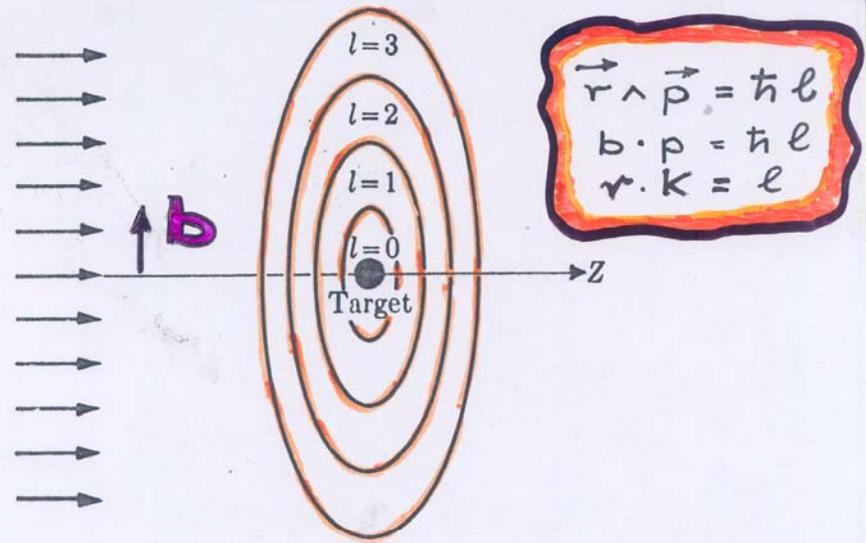
$$mv = \hbar k$$

$i f$
 $\downarrow \downarrow$

$$A(a, a') A^* : \frac{d\sigma_{\text{inel}}}{d\Omega}(\theta) = \frac{\mu^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{K_f}{K_i} |M_{if}|^2$$
$$A(a, b) B : \frac{d\sigma_{\text{direkt}}}{d\Omega}(\theta) = \frac{\mu_a \mu_b}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{K_f}{K_i} |M_{if}|^2$$

reduzierte Masse!

Partialwellenzerlegung (Spin=0)



$$\Psi_T = \Psi_e + \Psi_a$$

$$= e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

ebene Welle in z-Richtung: $\vec{k} \cdot \vec{z} = kr \cos \theta$

$$= e^{ikr \cos \theta} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta)$$

! Es gilt für $kr \gg \ell$
 (d.h. weit weg vom Streuzentrum)

$$j_\ell(kr) \rightarrow \frac{i}{2kr} \left[e^{-i(kr - \frac{\ell}{2}\pi)} - e^{i(kr - \frac{\ell}{2}\pi)} \right]$$

$E \sim 100 \text{ MeV}$
 $r \sim 1 \text{ m}$
 $kr = \ell \sim 2 \cdot 10^{16}$

$$\frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{\ell}{2}\pi)$$

d.h. ebene Welle entwickelt nach Kugelwellen bei großem Abstand

$$\psi_e = \frac{1}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell+1} \left(e^{-i(kr - \frac{\ell}{2}\pi)} - e^{i(kr - \frac{\ell}{2}\pi)} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

↑ einlaufend
↑ auslaufend

Trick:

die auslaufende Streuwelle (Kugelwelle) muß dieselbe Form haben wie der auslaufende Teil von ψ_e bis auf Amplituden- & Phasenfaktor.

d.h.:

$$\begin{aligned} \psi_T &= \psi_e + \psi_a \\ &= \frac{1}{2kr} \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell+1} \left[e^{-i(kr - \frac{\ell}{2}\pi)} - \eta_\ell e^{i(kr - \frac{\ell}{2}\pi)} \right] P_\ell(\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\psi_a = \frac{1}{2kr} \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell+1} e^{i(kr - \frac{\ell}{2}\pi)} [1 - \eta_\ell] P_\ell(\cos\theta)$$

Wiederholung

1

Streuung

(elastisch, Spin-0, ohne Coulomb potential)

$$\psi(r) = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

↑
einlauf. e.W.

↑
Streuamplitude

↑
auslauf. Kugelwelle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \longleftarrow \text{Winkelverteilung}$$

2

Partialwellenzersetzung

$$f(\theta) = \sum_l f_l(\theta)$$

$$f_l(\theta) = \frac{i}{2k} (2l+1) [1 - \eta_l] P_l(\cos\theta)$$

i.a. komplex
mit $|\eta_l| \leq 1$
Zu bestimmen in einem Modell

3.

einige Beziehungen für $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$

$$\sigma_{\text{elast}} = \sum_e \sigma_{\text{elast}}^e = \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) |1 - \eta_{\ell}|^2$$

$$\sigma_R = \sum_e \sigma_R^e = \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) (1 - |\eta_{\ell}|^2)$$

für $|\eta_{\ell}| = 1$ d.h. rein elastisch

$$\sigma_{\text{elast}}^{\text{rein}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}$$

↑
Phasenverschiebung

optisches Theorem

$$\frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\theta=0) = \sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{elast}} + \sigma_R$$

Zusatz:

Streuprozesse, die von verschiedenen Prozessen herrühren lassen sich separieren da Streuamplituden sich addieren

① Beispiel: Coulombstreuung + kernstreuung

$$f(\Theta) = f_{\text{coul}}(\Theta) + f_{\text{kern}}(\Theta)$$

$$|f(\Theta)|^2 = |f_{\text{coul}}|^2 + |f_{\text{kern}}|^2 + 2 \operatorname{Re} f_{\text{coul}} f_{\text{kern}}^*$$

↑ ↑
Rutherford Interferenz

$$f_{\text{coul}}(\Theta) = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2 \frac{\Theta}{2}} e^{-i\gamma \ln(\sin^2 \frac{\Theta}{2}) + 2i\delta_0}$$

$$\gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$$

$$\delta_0 = \arg \Gamma(1+i\gamma)$$

$$f_{\text{kern}}^e(\Theta) = \frac{i}{2k} (2l+1) e^{i\delta_l} [1-\eta_l] P_l(\cos \Theta)$$

zusätzl. Coulombphasen

Die kohärente Überlagerung von Streuamplituden führt zu einem komplizierten Interferenzmuster in der Winkelabhängigkeit von $|f(\Theta)|^2$
(Beispiele s. Letzte Vorlesung)

② Beispiel: Energieabhängigkeit von $f(\Theta)$

Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta, E) \text{ oder } \sigma(E) = \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega}(E) d\Omega$$

bezeichnet man als Anregungsfunktion

Auch hier lassen sich verschiedene Terme in der Streuung separieren

z.B.:

Kernstreuung

+ Resonanzen

↑
soll langsam veränderlich
sein

↑
resonanzartig,
schnell veränderlich

Resonanz := Anregung von Freiheitsgraden

da $\Psi_a = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$

$$\left. \right\} f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) [1 - \eta_l] P_l(\cos\theta)$$

$$\left. \right\} \frac{d\sigma}{d\Omega} = ff^* = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \eta_l) P_l(\cos\theta) \right|^2$$

Kohärente Überlagerung

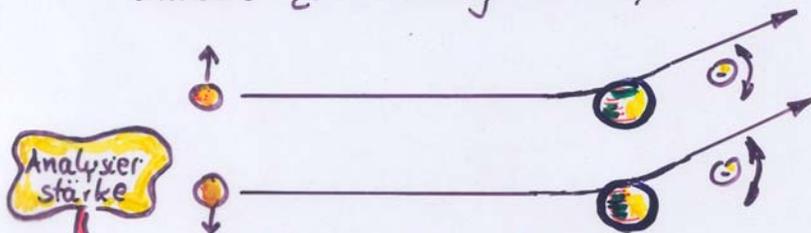
damit

Streuproblem reduziert auf einen Satz von Zahlen $|\eta_l| e^{i\delta_l}$

η_l — Flußverlust durch Absorption (falls $|\eta_l| < 1$)

δ_l — Phasenverschiebung; erzeugt Interferenzmuster im W.Q.

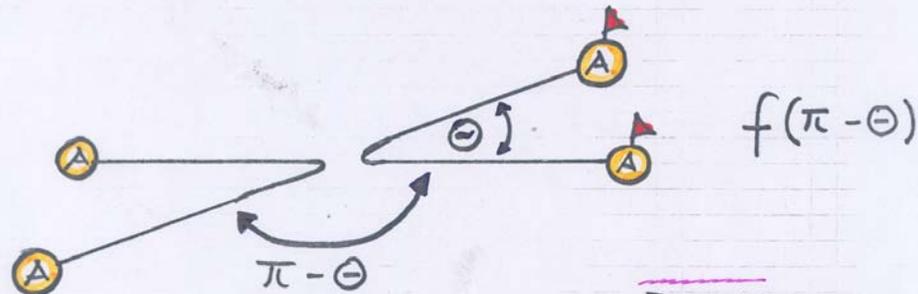
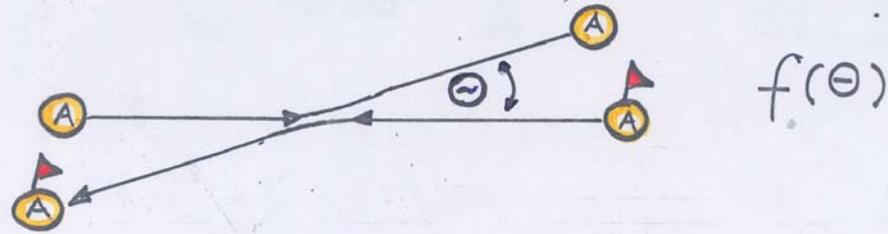
Hinweis: zu Streuung mit Spin



$$f(\theta) = f_0 + f_s$$

$$A = \frac{\sigma_{\uparrow} - \sigma_{\downarrow}}{\sigma_{\uparrow} + \sigma_{\downarrow}} \sim \text{Re}(f_0^* f_s)$$

③ Beispiel: Streuung von identischen Teilchen



$$\sigma = |f(\theta) \pm f(\pi - \theta)|^2$$

Bosonen
Fermionen

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$$

$$P_{\ell}(x) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(-x)$$

d.h.:

$$f(\theta) + f(\pi - \theta) = \frac{2i}{2k} \sum_{\ell=\text{gerade}} (2\ell + 1) (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$f(\theta) - f(\pi - \theta) = \frac{2i}{2k} \sum_{\ell=\text{ungerade}} (2\ell + 1) (1 - \eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Einige wichtige Beziehungen

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4k^2} \int_{\Omega} \left| \sum_{\ell} (2\ell+1) (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(\cos\Theta) \right|^2 d\Omega$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta \\ = -2\pi d(\cos\Theta)$$

$$= \frac{2\pi}{4k^2} \int_{-1}^1 \left| \sum_{\ell} (2\ell+1) (1-\eta_{\ell}) P_{\ell}(x) \right|^2 dx$$

→ Vollständigkeit der $P_{\ell}(x)$

$$\int_0^1 P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{1}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \sigma_{\text{elast.}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2$$

$$\sigma_{\text{elast.}} = \sum \sigma_{\text{elast.}}^{\ell} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) |1-\eta_{\ell}|^2$$

totaler WQ = inkohärente Summe
der partiellen WQ σ^{ℓ} !!

$|\eta_{\ell}| = 1$: rein elastische Streuung

$|\eta_{\ell}| < 1$: Flußverlust durch Absorption
(Reaktionen)

rein elastischer WQ

$$\eta_e = e^{2i\delta_e} ; |\eta_e| = 1$$

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum (2\ell+1) (1-\eta_e) P_\ell(\cos\theta)$$

$$1 - e^{2i\delta_e} = -i2e^{i\delta_e} \sin\delta_e$$

$$= \frac{1}{k} \sum (2\ell+1) \sin\delta_e e^{i\delta_e} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{k^2} \int_{\Omega_1} |\sum (2\ell+1) \sin\delta_e e^{i\delta_e} P_\ell(\cos\theta)|^2 d\Omega$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Belast}}^{\text{rein-}} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) \sin^2\delta_e \\ \sigma_{\text{el.}}^{\text{max}} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) \quad \delta_e = \frac{\pi}{4} \quad \eta_e = -1 \end{aligned}$$

Reaktionsquerschnitt (total)

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) (1-|\eta_e|^2) \\ \sigma_R^{\text{max}} &= \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) \quad \eta_e = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{el}}^{\text{max}} = 4 \cdot \sigma_R^{\text{max}}$$

reine s-Wellenstreuung ($l=0$)

rein elastisch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f_0(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0$$

↑
isotrop

optisches Theorem

In der elastischen Streuung ist die Streuamplitude $f(\theta=0)$ mit dem totalen WQ verknüpft.

$$\frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\theta=0) = \sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{R}}$$

Beweis:

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum (2\ell+1) (1-\eta_\ell) P_\ell(\cos\theta)$$

$$\theta=0 \quad \rightarrow \quad P_\ell(\cos 0) = P_\ell(1) = 1$$

$$\rightarrow f(0) = \frac{i}{2k} \sum (2\ell+1) (1-\eta_\ell)$$

$$\text{Im} f(0) = \frac{1}{2k} \sum (2\ell+1) (i - i a_\ell + b_\ell)$$

$$\eta_\ell = a_\ell + i b_\ell$$

$$\text{Im} f(0) = \frac{1}{2k} \sum (2\ell+1) (1 - \text{Re} \eta_\ell)$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{R}}$$

$$= \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2 + \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) (1 - |\eta_\ell|^2)$$

$$= \frac{\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) (|1 - \eta_\ell|^2 + 1 - |\eta_\ell|^2)$$

$$|1 - a_e - ib_e|^2 + 1 - |a_e + ib_e|^2$$

$$(1 - a_e)^2 + b_e^2 + 1 - a_e^2 - b_e^2$$

$$1 - 2a_e + a_e^2 + b_e^2 + 1 - a_e^2 - b_e^2$$

$$2 - 2a_e$$

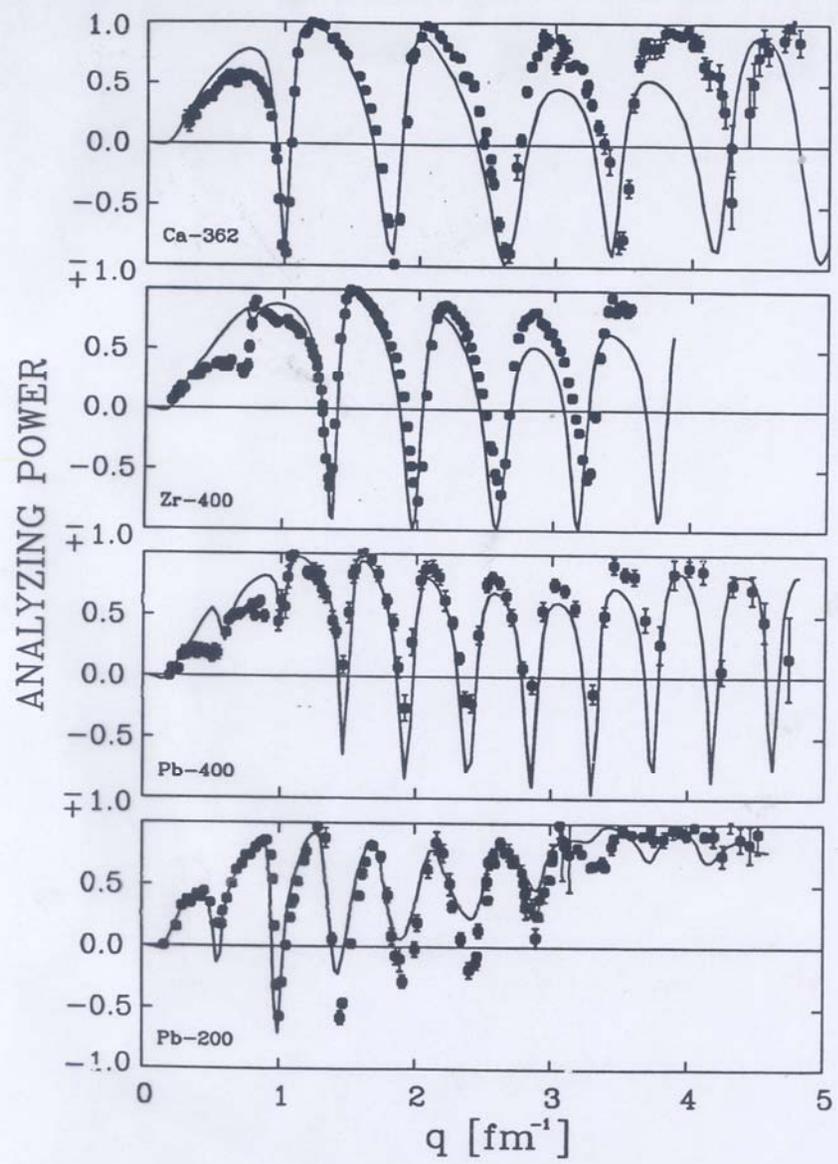
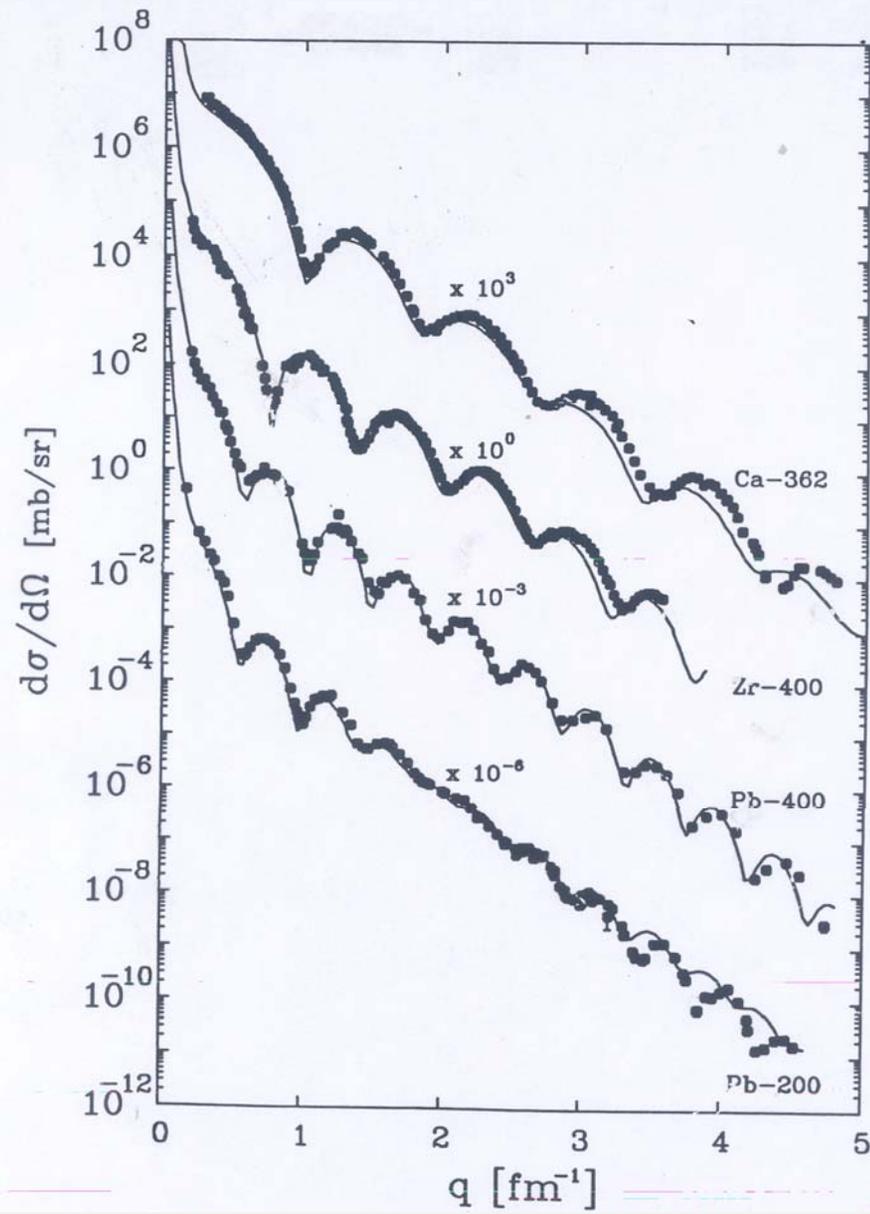
$$2(1 - \text{Re} \eta_e)$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum (2\ell+1) (1 - \text{Re} \eta_e)$$

$$= \frac{4\pi}{k} \frac{1}{2k} \sum (2\ell+1) (1 - \text{Re} \eta_e)$$

$$= \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$

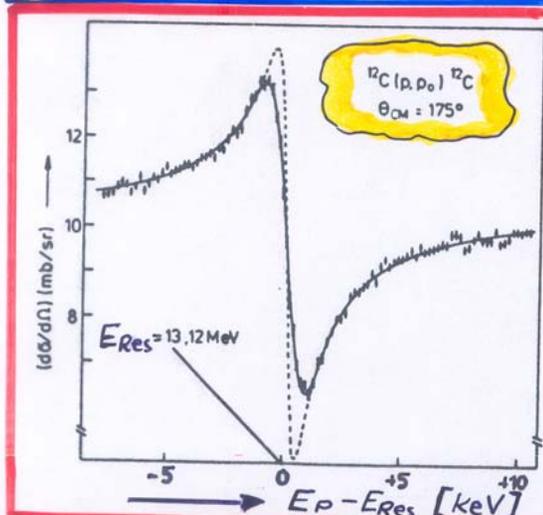
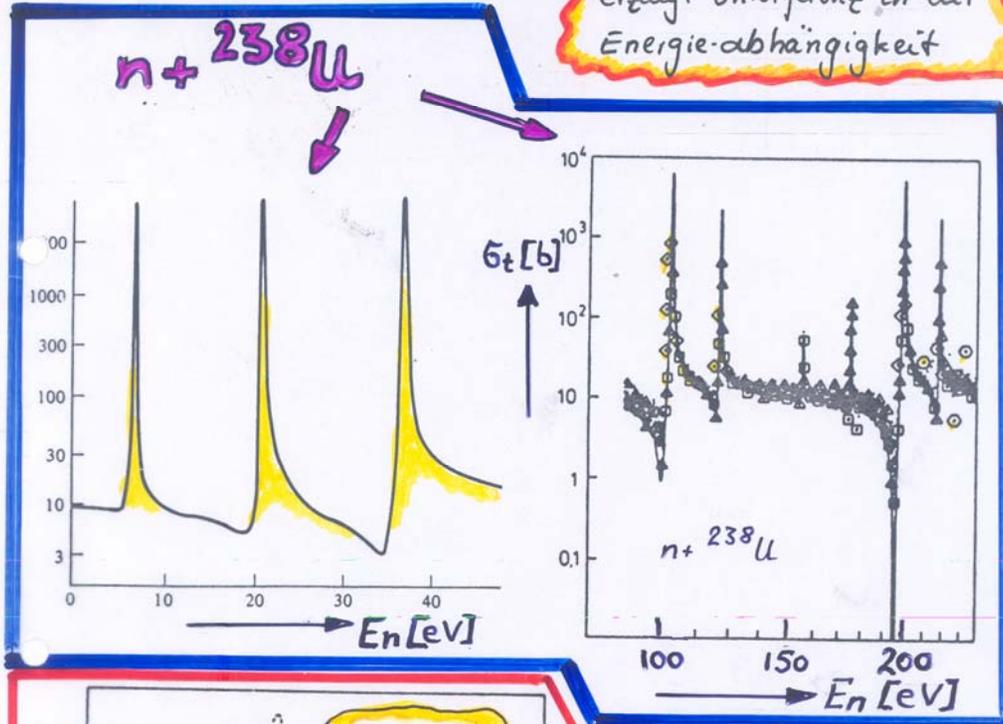
Beispiel Proton-Streuung bei 362, 400, 200 MeV an versch. Kernen



$$f(E) = f_{\text{kern}}(E) + f_{\text{Res}}(E)$$

$$ff^* = |f_{\text{kern}}|^2 + |f_{\text{Res}}|^2 + 2 \operatorname{Re} f_{\text{kern}} f_{\text{Res}}^*$$

erzeugt Interferenz in der Energie-abhängigkeit

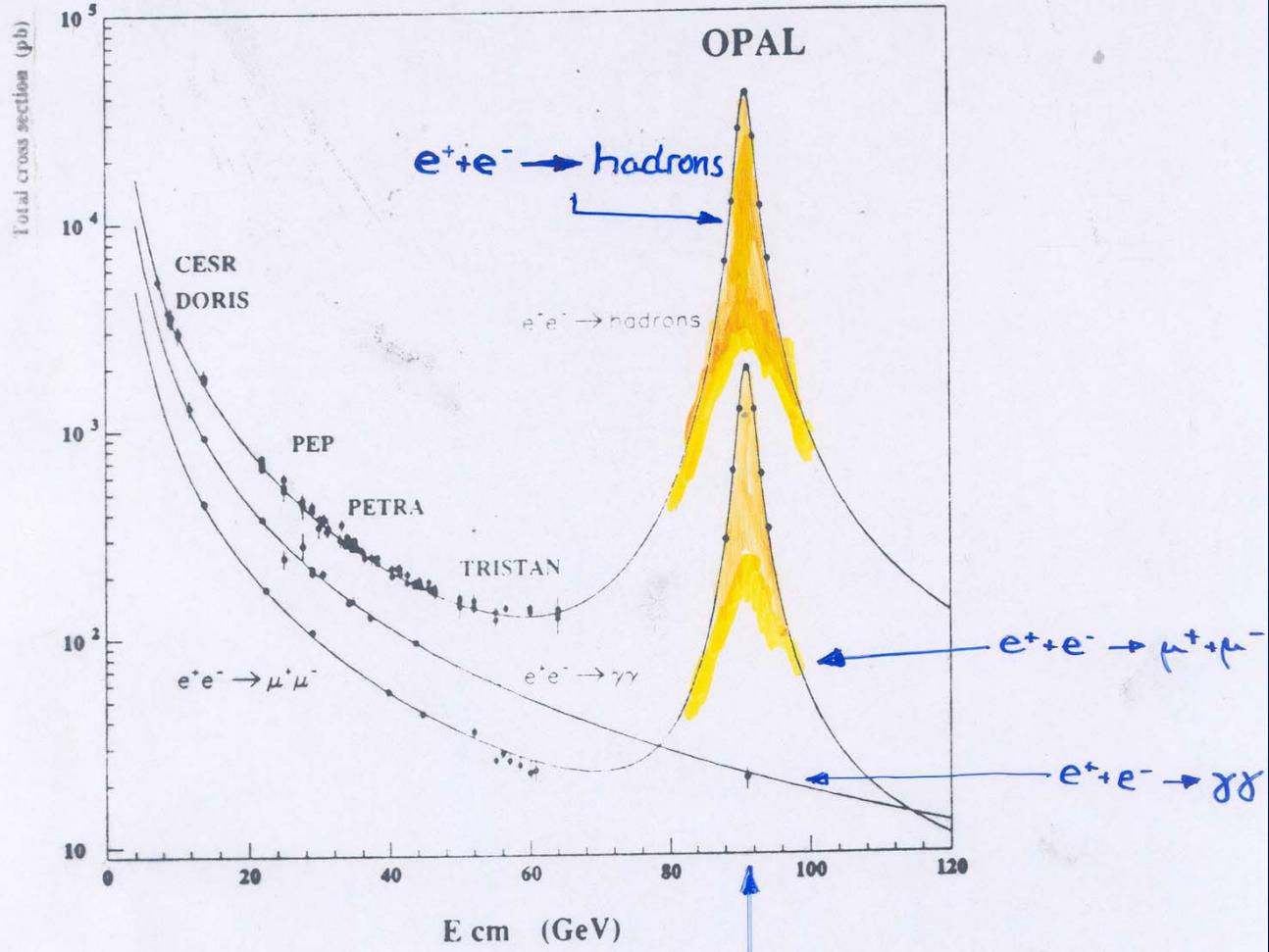


$p + {}^{12}\text{C}$
 $E_p \approx 14 \text{ MeV}$

Interferenz aufgrund der Coulombamplitude

Z_0

38
49



$M_Z = 91.182 \pm 0.002 \text{ GeV}$