

Beschreibung des e-m Feldes

Ausgangspunkt:  Maxwell Gleichung

$$\text{I} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \text{II} \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

definiere Vektorpotential: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

Coulombbeichung: $\text{div } \vec{A} = 0$

quellenfreier Raum 

$$\triangleright \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{Zeitabhängigkeit: } \sim e^{-i\omega t}, \quad k := \omega/c$$

$$\left(\Delta + k^2 \right) \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

benutze zunächst einen anderen Weg:

aus **I** $\text{rot } \vec{E} = ik\vec{B}$; $\text{rot } \vec{B} = -ik\vec{E}$ $\triangleright \vec{E} = \frac{i}{k} \text{rot } \vec{B}$

$$\text{rot rot } \vec{B} = k^2 \vec{B}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{B} = k^2 \vec{B}$$

$$-\Delta \vec{B} = k^2 \vec{B}$$

$$\triangleright \left(\Delta + k^2 \right) \vec{B} = 0 \quad \vec{E} = \frac{i}{k} \text{rot } \vec{B}$$

III

analog für \vec{E}, \vec{B}

Lösung durch Vergleich mit der skalaren Feldgleichung (in Partialwellen)

$$(\Delta + k^2)\Phi = 0$$

$$\gamma \Phi_{LM} = f_L(kr) \cdot Y_{LM}(\Theta, \varphi)$$

für Vektorfeld: Vektorkugelfunktionen

$$\vec{X}_{LM} = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \vec{L} \cdot Y_{LM} \quad \vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = -i\hbar(\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

Lösung aus



$$\vec{B}_{LM}^{(e)} \sim f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$

$$\vec{E}_{LM}^{(e)} \sim i/k \text{ rot } f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$



$$\vec{E}_{LM}^{(m)} \sim f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$

$$\vec{B}_{LM}^{(m)} \sim -i/k \text{ rot } f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$

keine Radial-Komponenten, da $(\vec{L})_r = 0$



1 ist elektrisches Multipolfeld



2 ist magnetisches Multipolfeld

Aber: die beiden elektrischen und die beiden magnetischen Komponenten haben unterschiedliche Paritäten !!!

Kann nicht gleichzeitig auftreten
Wenn Parität Erhaltungsgröße

1

$$\vec{B}_{LM}^{(e)} \sim f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$

$$\vec{E}_{LM}^{(e)} \sim i/k \operatorname{rot} f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$

$$P(\vec{B}_{LM}^{(e)}) = P(\vec{L}) \cdot P(Y_{LM}) = (+1) \cdot (-1)^L = (-1)^L$$

$$P(\vec{E}_{LM}^{(e)}) = P(\operatorname{rot}) \cdot P(\vec{L}) \cdot P(Y_{LM}) = (-1) \cdot (+1) \cdot (-1)^L = (-1)^{L+1}$$

2

$$\vec{E}_{LM}^{(m)} \sim f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$

$$\vec{B}_{LM}^{(m)} \sim -i/k \operatorname{rot} f_L(kr) \cdot \vec{X}_{LM}$$

$$P(\vec{E}_{LM}^{(m)}) = P(\vec{L}) \cdot P(Y_{LM}) = (+1) \cdot (-1)^L = (-1)^L$$

$$P(\vec{B}_{LM}^{(m)}) = P(\operatorname{rot}) \cdot P(\vec{L}) \cdot P(Y_{LM}) = (-1) \cdot (+1) \cdot (-1)^L = (-1)^{L+1}$$

$$\vec{E} = \sum_{L,M} \left(a_{LM}^{(e)} \vec{E}_{LM}^{(e)} + a_{LM}^{(m)} \vec{E}_{LM}^{(m)} \right)$$

M(λ) (2L) Pol-Strahlung
P=(-1)^{L+1}

Allgemein:

$$\vec{B} = \sum_{L,M} \left(a_{LM}^{(e)} \vec{B}_{LM}^{(e)} + a_{LM}^{(m)} \vec{B}_{LM}^{(m)} \right)$$

E(λ) (2L) Pol-Strahlung
P=(-1)^L

einige Eigenschaften zum Merken

1

eine skalare Feldfunktion (hier Φ) beschreibt ein Spin-0 Teilchen

2

eine Vektor-Feldfunktion beschreibt ein Spin-1 Teilchen ($s = 1$)

3

L und s koppeln zu J mit $J = L, L+1, L-1$ (nicht $L=0$)

4

der Spin des Photons ist parallel oder antiparallel zur Bewegungsrichtung,

5

Das Strahlungsprofil ist $\sim |Y_{LM}(\Theta, \varphi)|^2$

6

magn. Multipol (2^L -Pol):

$$P(M\lambda) = (-1)^{\lambda+1}$$

elektr. Multipol (2^L -Pol):

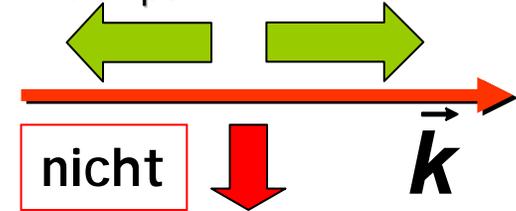
$$P(E\lambda) = (-1)^\lambda$$

$$\lambda = L$$

7

$\lambda = L$ heißt Multipolarität und ist gleich ΔJ zwischen den beteiligten Kern-Niveaus $\Delta J = |j_i - j_f|, \dots, j_i + j_f$

links-zirkular pol. rechts-zirkular pol.



ABER

die Auswahlregeln sind etwas komplizierter!!

Auswahlregeln der em-Strahlung bei Übergängen

Sei die Kernwellenfunktion klassifiziert durch $|\mathbf{j}, \ell, m_j, m_s\rangle$; $m_j = m_\ell + m_s$

$$L = \Delta J = |j_i - j_f|, \dots, j_i + j_f \quad \text{i.a. aber: } L = \Delta J_{\min}$$

1 Elektrische Multipolstrahlung

$$m_s^i = m_s^f \quad \longrightarrow \quad \text{keine Spinänderung im Kern}$$

$$m_j^i - m_j^f = M \quad \longrightarrow \quad \text{definiert Strahlungsprofil}$$

$$\Delta \ell = \underbrace{(\ell_i + \ell_f + L)}_{\text{gerade}} - 2\ell_f - L \quad \longrightarrow \quad \Delta \ell \text{ (un)gerade} \quad \longrightarrow \quad L \text{ (un)gerade}$$

Beispiel:

elektrische Dipolstrahlung

$$(1^- \rightarrow 0^+): \quad \Delta J = 1, \quad (\ell_i = 1 \rightarrow \ell_f = 0)$$

$$\Rightarrow E1: \quad L = 1, \quad P = -1$$

2**Magnetische Multipolstrahlung**

$$m_s^i = m_s^f \pm 1 \quad \Rightarrow \text{Spinänderung im Kern}$$

$$m_j^i - m_j^f = M \quad \Rightarrow \text{definiert Strahlungsprofil}$$

$$\Delta l = \underbrace{(\ell_i + \ell_f + L)}_{\text{ungerade}} - 2\ell_f - L \quad \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta l \text{ gerade} \quad \Rightarrow L \text{ ungerade} \\ \Delta l \text{ ungerade} \quad \Rightarrow L \text{ gerade} \end{array}$$

Beispiel:

magnetische Dipolstrahlung

$$(1^+ \rightarrow 0^+): \Delta J = 1, (\ell_i = 0 \rightarrow \ell_f = 0)$$

$$\Rightarrow M1: L = 1, P = +1$$

3**Merke**

Ist *initial* $j_i \neq 0$ und *final* $j_f \neq 0$, dann können mehrere Multipol-Strahlungsfelder beitragen, aber i.a. ist das Feld mit der kleinsten Multipolordnung das wahrscheinlichste.

wahrscheinlich

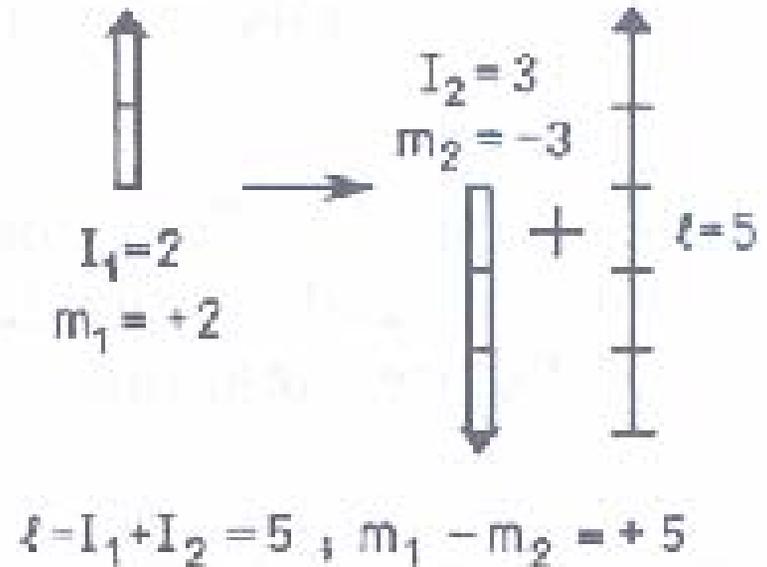
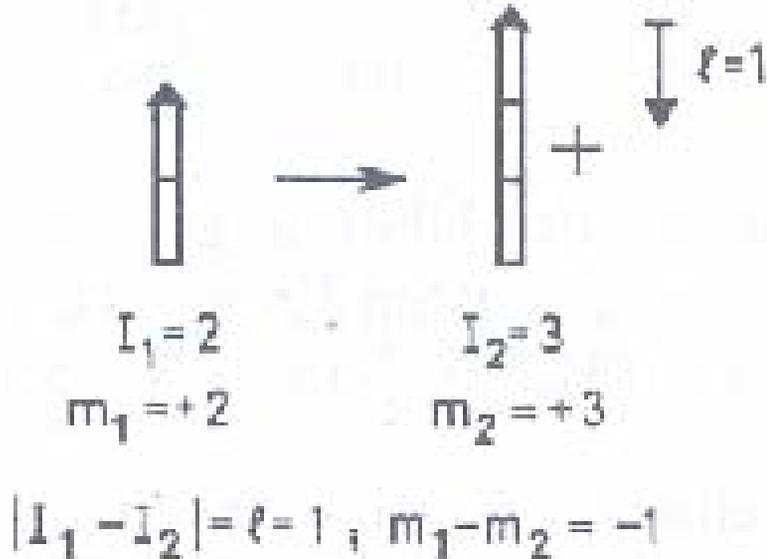
$$2^- \rightarrow 3^+ \Rightarrow E1 \quad (\text{oder } M2)$$

$$2^+ \rightarrow 3^+ \Rightarrow M1 \quad (\text{oder } E2)$$

unwahrscheinlich

$$2^- \rightarrow 3^+ \Rightarrow E5$$

$$2^+ \rightarrow 3^+ \Rightarrow M5$$



MERKE: Die ungeraden elektrischen Übergänge haben Paritätswechsel \rightarrow (alles andere folgt !!)

Paritätsauswahlregel für den Übergang eines Niveaus $1 \rightarrow 2$ unter Emission eines γ -Quants

$$P_1 = (-1)^\lambda P_2 \quad \text{für } E(\lambda) \text{ Strahlung}$$

$$P_1 = (-1)^{\lambda+1} P_2 \quad \text{für } M(\lambda) \text{ Strahlung}$$

$J_1 = 0 \rightarrow J_2 = 0$ Übergänge verboten (Spin des Photons!!)

Tabelle mit Auswahlregeln für die Multipolordnung

Drehimp. Änderung ΔJ		0	1	2	3	4	5
Paritätsänderung	ja	E1 (M2)	E1 (M2)	M2 (E3)	E3 (M4)	M4 (E5)	E5 (M6)
	nein	M1 (E2)	M1 (E2)	E2 (M3)	M3 (E4)	E4 (M5)	M5 (E6)

Beispiel:

$$1^+ \longrightarrow 0^+ : M1$$

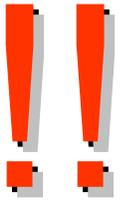
$$2^+ \longrightarrow 0^+ : E2$$

$$3^- \longrightarrow 0^+ : E3$$

$$1^+ \longrightarrow 1^+ : M1 (E2)$$

$$3^+ \longrightarrow 2^+ : M1 (E2, M3, E4...)$$

höhere Multipole sind stark unterdrückt.

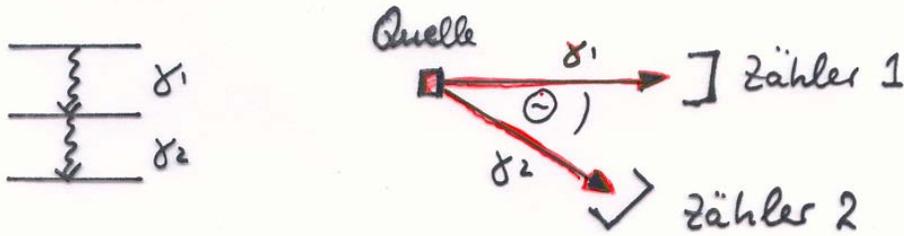


das Strahlungsprofil $\sim |Y_{LM}(\Theta, \varphi)|^2$

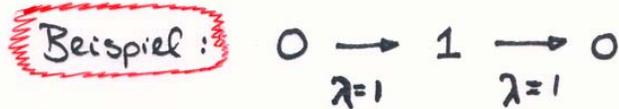
		M			
		0	± 1	± 2	
L	1	Dipol	$\sin^2 \Theta$	$1 + \cos^2 \Theta$	
	2	Quadrupol	$\sin^2 \Theta \cos^2 \Theta$	$1 - 3 \cos^2 \Theta$ $+ 4 \cos^4 \Theta$	$1 - \cos^4 \Theta$

Symmetrie bezüglich $\pm \pi/2$, $\pm \Theta$!!!

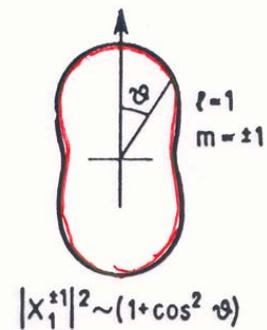
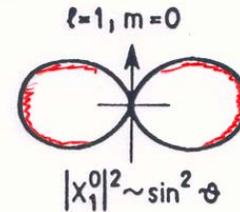
Winkelkorrelation (Winkelverteilung) bei $\gamma\gamma$ -Kaskaden



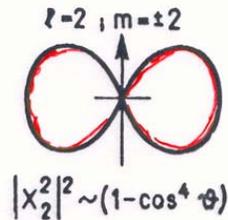
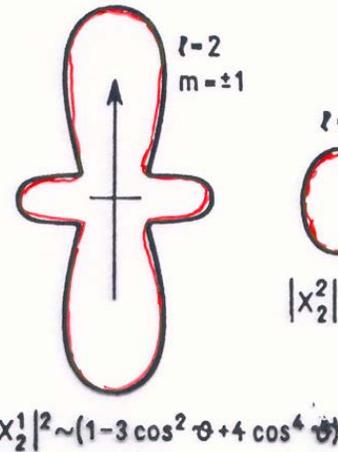
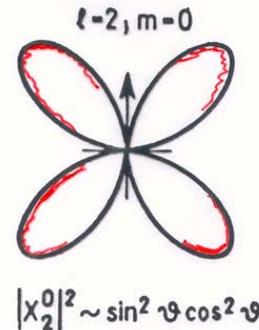
Auszeichnung einer festen Quantisierungsachse durch Detektion von γ_1



Dipol



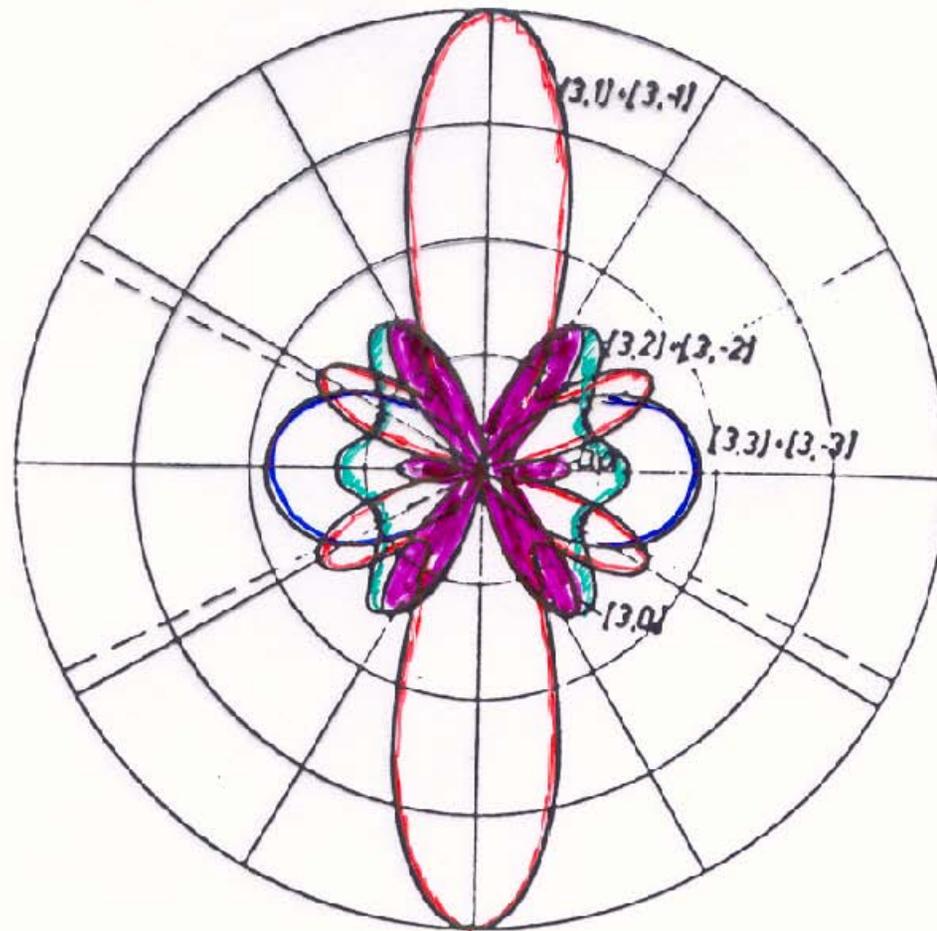
Quadrupol



$\Delta m = 0$ Strahlungsprofile sind
i.a. einfach zu messen.

In Kaskaden treten
vorwiegend $\Delta m = 0$
Übergänge auf – (gut !!)

Oktopol



Ausstrahlungsdiagramm für Oktopolstrahlung

Übergangswahrscheinlichkeiten $W(E\lambda)$, $W(M\lambda)$ (d.h. Zerfallszeit) und Weisskopf-Einheiten

die $W(E\lambda)$, $W(M\lambda)$ hängen **NATÜRLICH** vom Kernmodell ab

ABER

für ein Proton/Neutron, welches im Kernvolumen frei schwingt
kann W in geschlossener Form angegeben werden

$$W(E\lambda) = a_{E\lambda} \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot R^{2\lambda} = a_{E\lambda} \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot (1.2)^{2\lambda} A^{2\lambda/3}$$

$$\ll 1$$

Kernradius

$$W(M\lambda) = a_{M\lambda} \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot R^{2\lambda-2} = a_{M\lambda} \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot (1.2)^{2\lambda-2} A^{(2\lambda-2)/3}$$

$$a_{M\lambda} = 10^{-1} a_{E\lambda}$$

Ein-Teilchen-Übergang!!

Weisskopf-Ein-Teilchen-Abschätzungen für $E\lambda$ und $M\lambda$ Übergänge

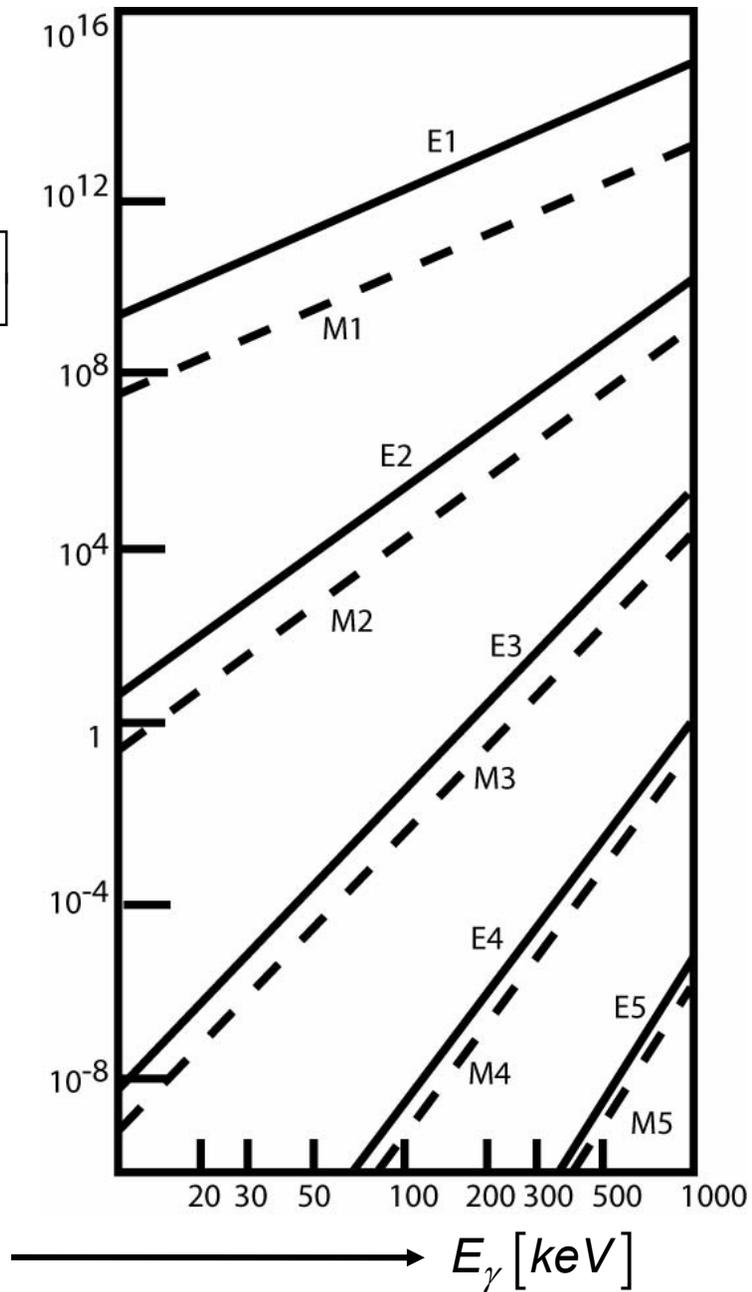
Ordnung λ	$E\lambda$		$M\lambda$	
	$W(s^{-1})$		$W(s^{-1})$	
1	$1.02 \cdot 10^{14}$	$A^{2/3} \cdot E_{\gamma}^3$	$3.15 \cdot 10^{13}$	E_{γ}^3
2	$7.28 \cdot 10^7$	$A^{4/3} \cdot E_{\gamma}^5$	$2.24 \cdot 10^7$	$A^{2/3} \cdot E_{\gamma}^5$
3	$3.39 \cdot 10^1$	$A^2 \cdot E_{\gamma}^7$	$1.04 \cdot 10^1$	$A^{4/3} \cdot E_{\gamma}^7$
4	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$A^{8/3} \cdot E_{\gamma}^9$	$3.27 \cdot 10^{-6}$	$A^2 \cdot E_{\gamma}^9$
5	$2.40 \cdot 10^{-12}$	$A^{10/3} \cdot E_{\gamma}^{11}$	$7.36 \cdot 10^{-13}$	$A^{8/3} \cdot E_{\gamma}^{11}$

Beispiel: ^{90}Zr ($3^+ \rightarrow 1^+$) $E_{\gamma}=0.3$ MeV, $\tau = 10^{-10}$ sec (E2 Strahlung !! (M3))

$$W(E2) = 7.28 \cdot 10^7 \cdot 90^{4/3} \cdot 0.3^5 = (1.4 \cdot 10^{-8})^{-1} \rightarrow 140 \text{ W.u. (aha! kollektiv!)}$$

$$W(M3) = 1.04 \cdot 10^1 \cdot 90^{4/3} \cdot 0.3^7 = (1.09 \cdot 10^{-1})^{-1} \rightarrow 10^{-10} \text{ W.u. (no way!)}$$

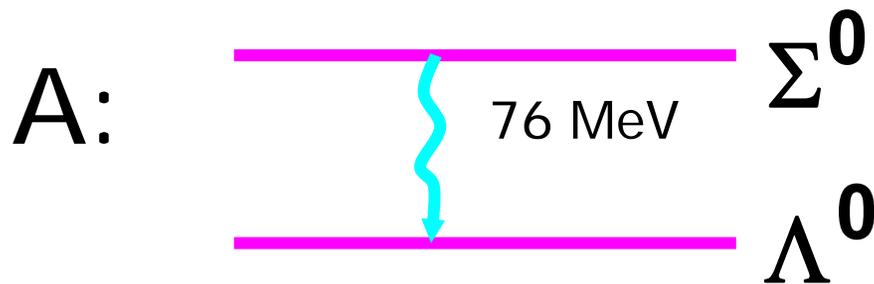
$$\lambda \left[\text{sec}^{-1} \right] = \frac{1}{\tau} \left[\text{sec}^{-1} \right]$$



Das Teilchen Σ^0 (1192MeV ; $J^\pi = \frac{1}{2}^+$)

zerfällt unter γ -Emission in Λ^0 (1116MeV ; $J^\pi = \frac{1}{2}^+$) [uds]

Q: Wie groß ist die Lebensdauer?



experimentell: $0,7 \cdot 10^{-19}$ sec