

# **Elektrostatisches Design der Pumpports des KATRIN Hauptspektrometers**

**Matthias Dropmann**

**Diplomarbeit**

**Institut für Kernphysik  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster**

**Januar 2011**





Referent: Prof. Dr. C. Weinheimer  
Korreferent: Prof. Dr. A. Khoukaz



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. NeutrinoPhysik</b>	<b>3</b>
2.1. Geschichte des Neutrinos . . . . .	3
2.2. Neutrinooszillation . . . . .	4
2.3. Bestimmung der Neutrinomasse über den Betazerfall . . . . .	6
<b>3. Das KATRIN Experiment</b>	<b>9</b>
3.1. Experimenteller Aufbau . . . . .	9
3.1.1. Die Tritiumquelle (WGTS) . . . . .	9
3.1.2. Pumpstrecke . . . . .	10
3.1.3. Vorspektrometer . . . . .	10
3.1.4. Hauptspektrometer . . . . .	10
3.1.5. Detektor . . . . .	11
3.2. MAC-E-Filter . . . . .	11
3.2.1. Prinzip des MAC-E-Filters . . . . .	12
3.2.2. Eigenschaften der KATRIN MAC-E Filter . . . . .	15
3.3. Untergrundquellen . . . . .	16
3.4. Untergrundreduktion: Die innere Drahtelektrode . . . . .	18
<b>4. Simulationsprogramme</b>	<b>21</b>
4.1. Geometrieerstellung . . . . .	21
4.2. Die Boundary Element Methode . . . . .	22
4.2.1. Die elcd Programme . . . . .	23
4.3. Die Robin Hood Methode . . . . .	24
4.3.1. Isolierter Würfel . . . . .	24
4.3.2. Würfel auf einem festen Potential . . . . .	25
4.3.3. Verallgemeinerung der Ladungsverteilung . . . . .	25
4.3.4. Vorteile der Robin Hood Methode und Umsetzung in Kassiopeia	26
<b>5. 3D Simulationen</b>	<b>27</b>
5.1. Erweiterung des Mainspec Designers . . . . .	28
5.1.1. Kreisring Klasse . . . . .	28
5.1.2. Schiefer Zylinder . . . . .	31
5.1.3. Erweiterung der Elektrodenklasse . . . . .	31
5.2. Erste Tests: Plattenkondensator . . . . .	33
5.2.1. Vergleich mit elcd3_2 . . . . .	34
5.2.2. Vergleich innerhalb von elcd3_3 . . . . .	36
5.2.3. Überschneidungen . . . . .	40

5.2.4. Die Boundary Element Methode und Überschneidungen . . . . .	43
5.2.5. Auswirkungen eines Zylinders . . . . .	44
5.3. Hauptspektrometer mit Pumpport . . . . .	45
<b>6. 2D Simulationen</b>	<b>51</b>
6.1. Geometrie . . . . .	51
6.2. Machbarkeitsnachweis und Drähte . . . . .	54
6.3. Kompensation durch Stäbe . . . . .	59
6.3.1. Durchhang und Haltering . . . . .	61
6.3.2. Entfernung Tankwand - Stablage . . . . .	64
6.4. Weitere technische Anpassungen . . . . .	65
6.4.1. HV-Verbinder . . . . .	65
6.4.2. Nicht konstanter Tankwandradius . . . . .	65
6.4.3. Haltestrukturen . . . . .	69
6.5. Fazit und vorgeschlagene Geometrie . . . . .	71
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>73</b>
<b>A. Geometrie Klassen</b>	<b>75</b>
<b>B. Elektroden Klassen</b>	<b>85</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>

# 1. Einleitung

Seit der Postulierung des Neutrinos durch Pauli im Jahr 1930 wurden viele Experimente zur Neutrinophysik durchgeführt. In den letzten Jahrzehnten wurden immer mehr Details über das Neutrino herausgefunden. Durch die Neutrinooszillation weiß man heutzutage, dass das Neutrino eine Masse besitzt.

Ein Experiment zur Bestimmung der Neutrinomasse ist das Karlsruher Tritium Neutrinoexperiment (KATRIN) das die Endpunktsregion des Tritium  $\beta$ -Spektrums genau vermisst. Mit einer im Vergleich zu Vorgängerexperimenten 10 fach höheren Sensitivität soll das KATRIN Experiment die Neutrinomasse mit einer Empfindlichkeit von  $0,3 \text{ eV}/c^2$  entdecken oder die Obergrenze der Neutrinomasse auf  $0,2 \text{ eV}/c^2$  mit 90% C.L. senken. Um diese Sensitivität zu erreichen, wird ein Spektrometer vom MAC-E Filter Typ mit einem inneren Elektrodensystem zur Analyse der  $\beta$  Elektronen genutzt. Das innere Elektrodensystem beeinflusst nicht nur das elektromagnetische Design des Hauptspektrometers sondern dient auch zur Untergrundunterdrückung.

Neben dem inneren Elektrodensystem besitzt das Hauptspektrometer für das Vakuumsystem Pumpport. Diese haben auch einen Einfluss auf das elektrostatische Design des KATRIN Hauptspektrometers. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wird der Einfluss dieser Pumpports untersucht und eine Korrekturelektrode vorgeschlagen.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- Kapitel 2 gibt eine kurze Einleitung in die Neutrinophysik und beschreibt die Bestimmung der Neutrinomasse mit Hilfe des Tritium  $\beta$ -Zerfalls.
- In Kapitel 3 wird der Aufbau und die Funktionsweise des KATRIN Experiments und des Hauptspektrometers beschrieben.
- Die im Rahmen dieser Arbeit genutzten Simulationsprogramme werden in Kapitel 4 vorgestellt. Hier wird die für elektrostatische Simulationen genutzte Boundary Element Methode erklärt.
- Kapitel 5 gibt eine kurze Einführung in das Problem der Pumpports und stellt die neuen Geometrien vor, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden. Erste 3D Simulationen des Hauptspektrometers mit einer Pumpportgeometrie und deren Probleme werden anschließend dargestellt.
- Die für die Konstruktion einer Korrekturelektrode zu Grunde liegenden 2D Simulationen und technische Anpassungen werden in Kapitel 6 besprochen.
- Zuletzt folgt in Kapitel 7 eine Zusammenfassung der Arbeit und ein kurzer Ausblick.



## 2. Neutrinophysik

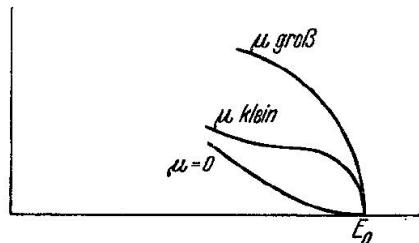
Im Vergleich mit anderen Teilen der Physik, ist die fast einhundertjährige Geschichte der Neutrinophysik noch jung. Dieses Kapitel fasst die Geschichte kurz zusammen und konzentriert sich dann auf die Bestimmung der Neutrinosmasse.

### 2.1. Geschichte des Neutrinos

Chadwick entdeckte im Jahr 1914 bei Radiumzerfallsexperimenten, dass das  $\beta$ -Spektrum ein kontinuierliches Spektrum ist und keinesfalls, wie bislang angenommen, aus einem Linienspektrum besteht [Cha14]. Dies steht jedoch im Widerspruch zu einem Zweikörperzerfall, da bei diesem neben der Energieerhaltung auch die Erhaltung des Drehimpulses verletzt wird. So entstanden beim  $\beta$ -Zerfall aus einem Spin- $1/2$ -Teilchen, dem Neutron, zwei Spin- $1/2$ -Teilchen, das Proton und das Elektron.

Aufgrund dieser Probleme postulierte Pauli im Jahr 1930 in einem offenen Brief [Pau30] ein elektrisch neutrales Spin- $1/2$ -Teilchen, das er Neutron<sup>1</sup> nannte. Dieses Teilchen wurde beim  $\beta$ -Zerfall zusammen mit einem Elektron emittiert. Aus dem Zweikörperzerfall wurde ein Dreikörperzerfall und die Erhaltungssätze waren weiterhin gültig.

Die theoretische Beschreibung des  $\beta$ -Zerfalls als Dreikörperzerfall gelang Fermi im Jahr 1934 [Fer34]. Fermi kam zu dem Schluss, dass das Neutrino masselos ist oder eine sehr geringe Ruhemasse besitzt, weiterhin ist das Spektrum im Bereich der Endpunktsenergie von der Masse des Neutrinos abhängig. Diese Abhängigkeit ist in Abbildung 2.1 dargestellt.



**Abbildung 2.1.:** Abhängigkeit des Betaspektrums in der Endpunktsregion von der Neutrinosmasse  $\mu$ . Aus [Fer34].

Da Neutrinos nur schwach wechselwirken und daher auch kleine Wirkungsquerschnitte besitzen, ist für den Nachweis eine starke Neutrinoquelle nötig. Eine solche Quelle ist in einem Nuklearreaktor zu finden. Für den experimentellen Nachweis des Neutrinos nutzten Reines und Cowan im Jahr 1956 den Savannah River Reactor in den USA. Der

<sup>1</sup>Das heutige Neutron wurde erst im Jahr 1932 entdeckt. Den heutigen Begriff „Neutrino“ prägte später Fermi.

Nachweis gelang ihnen durch die Bestimmung des Wirkungsquerschnittes des inversen  $\beta$ -Zerfalls

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (2.1)$$

Ein mit flüssiger Kadmiumchloridlösung gefüllter Szintillationsdetektor wurde in direkter Umgebung des Reaktors aufgestellt. Das aus dem  $\beta$ -Zerfall im Reaktor entstande Antineutrino kann in der Kadmiumchloridlösung mit einem Proton wechselwirken und so ein Positron und ein Neutron erzeugen. In einer  $e^+e^-$ -Annihilation entstehen daraufhin zwei 511 keV Photonen, die in zwei gegenüberliegenden Szintillationsdetektoren dann gemessen werden. Das Neutron wird vom Cadmium absorbiert. Während der Tochterkern in den Grundzustand zerfällt, werden Photonen emittiert. Dieses zweite Ereignis wird innerhalb einer charakteristischen Zeit (wenige  $\mu s$ ) nach der  $e^+e^-$ -Annihilation detektiert. Der mit dieser Methode ermittelte Wirkungsquerschnitt für ein Neutrino beträgt  $(11 \pm 2,6) \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2$  [Rei59].

Diese Ergebnisse wurden im Laufe der nächsten Jahrzehnte in verschiedenen Experimenten bestätigt. In weiteren Experimenten wurden 1961 am Brookhaven AGS das Myonneutrino [Led62] und im Jahr 2000 schließlich auch das Tauonneutrino durch das DONUT Experiment am Fermilab [DON00] nachgewiesen.

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik beschreibt das Neutrino zunächst als ein masseloses Teilchen, jedoch lassen Experimente zur Neutrinooszillation darauf schließen, dass das Neutrino auch eine Masse besitzt. Mit der Erweiterung des Standardmodells um zum Beispiel den Seesaw Mechanismus erhält das Neutrino dann auch im erweiterten Standardmodell eine Masse.

## 2.2. Neutrinooszillation

In den 1960er Jahren wurde das Standardmodell der Elementarteilchenphysik entwickelt, darin werden die Neutrinos als masselose Teilchen beschrieben. Bereits um 1970 herum gab es erste Hinweise auf Inkonsistenzen.

Das Homestake Experiment sollte den Neutrinofluss der Sonne messen und die solaren Standardmodelle (SSM) überprüfen. In der Sonne werden durch Fusionsreaktionen Neutrinos freigesetzt [Zub04]. Die Nettoreaktion ist:



Das SSM sagte einen dreimal so hohen Neutrinofluss wie den gemessenen voraus, dies ist das solare Neutrinoproblem. In dieser Vorhersage steckt die Annahme, dass alle in der Sonne erzeugten Neutrinos auch später auf der Erde nachgewiesen werden können. Heute weiß man jedoch, dass Neutrinos oszillieren und dadurch ihr Flavour ändern können. Auf dem Weg von der Sonne zur Erde wechselt ein Teil der Neutrinos den Flavour-Zustand. Diesen Effekt bezeichnet man als Neutrinooszillation. Dabei stellen die Flavour-Eigenzustände  $\{|\nu_\alpha\rangle, \alpha = e, \mu, \tau\}$  und Massen-Eigenzustände  $\{|\nu_i\rangle, i = 1, 2, 3\}$  eine Basis des Zustandsraumes dar. Da beide Basen nicht übereinstimmen, kann man

zwischen beiden Basen mit einer unitären 3x3 Matrix U transformieren

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (2.3)$$

$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.4)$$

Die Matrix U heißt PMNS<sup>2</sup> Matrix und kann mit den Mischungswinkeln  $\Theta_{ij}$  wie folgt dargestellt werden [Les06]:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & c_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Dabei steht  $s_{ij}$  für  $\sin(\theta_{ij})$  und  $c_{ij}$  für  $\cos(\theta_{ij})$ . Der Faktor  $e^{-i\delta}$  berücksichtigt dabei, dass die Neutrinooszillation die CP-Symmetrie brechen kann.

Die zeitliche Entwicklung der Massen-Eigenzustände  $|\nu_i\rangle$  mit der Energie  $E_i$  folgt dabei aus der Schrödinger-Gleichung (mit  $\hbar = c = 1$ ):

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (2.6)$$

mit

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx E + \frac{m_i^2}{E}. \quad (2.7)$$

Hierbei ist E die Neutrinoenergie. Für den vorherigen Flavour-Eigenzustand  $|\nu(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$  gilt nach einer Zeit t (und einer Strecke  $L \approx ct$ ) für den Zustand

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle. \quad (2.8)$$

Bei  $t = 0$  hat man einen reinen Zustand, nach einer Zeit  $t > 0$  erhält man dann eine Mischung der Flavour-Eigenzustände. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neutrino mit dem Flavour  $\alpha$  in ein Neutrino mit dem Flavour  $\beta$  übergeht, beträgt

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} \\ &\quad - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left( 1.27 \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \left( 2.54 \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{E} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Formel 2.9 zeigt eine Abhängigkeit der Oszillation von den Differenzen der Massenquadrat  $\Delta m_{ij}^2$ , wobei L die zurückgelegte Strecke von der Quelle zum Detektor ist und E die Neutrinoenergie. Wären alle  $m_i = 0$ , so wäre insbesondere  $\Delta m_{ij}^2 = 0$  und es gäbe keine Neutrinooszillation. Die Beobachtung von Neutrinooszillation ist somit ein klares Indiz für die Neutrinomasse [Kay08].

---

<sup>2</sup>Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata Matrix

Dieser Effekt wurde an mehreren Experimenten untersucht, u.a. auch am Super-Kamiokande Experiment in Japan, das Neutrinooszillation bei atmosphärischen Neutrinos beobachtet. Atmosphärische Neutrinos entstehen bei Reaktionen kosmischer Strahlung mit der Erdatmosphäre.

Das Experiment besteht aus einem Tank, der mit 50 kt ultrareinem Wasser gefüllt ist. Beim Auftreffen eines Neutrinos auf das Wasser, wechselwirkt dieses mit einem Nukleon

$$\nu_\alpha + n \rightarrow \alpha^- + p^+ \quad (2.10)$$

$$\bar{\nu}_\alpha + p^+ \rightarrow \alpha^+ + n \quad (2.11)$$

mit  $\alpha = e, \mu$ , dies ist der quasi-elastische Fall.

Die hierdurch entstandenen Leptonen erzeugen charakteristische Čerenkov Strahlung, die von Photomultipliern an den Wänden detektiert wird. Die hier gemessenen Daten zeigen, dass die Anzahl der gemessenen atmosphärischen Myonneutrinos, die mit dem Detektor wechselwirken, vom Einfallswinkel  $\theta$  abhängig ist. Die Myonneutrinos, die durch die Erde fliegen ( $\cos \theta < 0$ ), haben einen längeren Weg und können zu Tauonneutrinos oszillieren. Diese Ergebnisse stimmen mit der Theorie der Neutrinooszillation für bestimmte Parameter überein. Die bestimmten Parameter sind  $\Delta m_{12}^2 = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$ ,  $\Delta m_{23}^2 = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ ,  $\vartheta_1 = 45^\circ$ ,  $\vartheta_2 = 32^\circ$  und  $\vartheta_3 = 13^\circ$  [Ash05].

Neutrinooszillation wurde auch bei Reaktorneutrinos (K2K [Ahn06]), solaren Neutrinos (SNO [Aha05]) und Beschleunigerneutrinos (KAMLand, [Kam05]) beobachtet.

Die Oszillationsexperimente können die Mischungswinkel und quadratischen Massendifferenzen bestimmen, sie geben aber keine Hinweise auf die absoluten Massen der Neutrinos. Um die absoluten Massen zu bestimmen, sind andere Experimente mit direktem Zugang zur Neutrinomasse nötig.

Im folgenden Kapitel wird die Massenbestimmung über den  $\beta$ -Zerfall beschrieben.

## 2.3. Bestimmung der Neutrinomasse über den Betazerfall

Der  $\beta$ -Zerfall ist ein nuklearer Übergang, bei dem die Anzahl der Nukleonen pro Atom sich nicht ändert. Die drei möglichen Zerfälle sind

$$B(Z,A) \rightarrow C(Z+1,A) + e^- + \bar{\nu}_e \quad \beta^- - \text{Zerfall} \quad (2.12)$$

$$B(Z,A) \rightarrow D(Z-1,A) + e^+ + \nu_e \quad \beta^+ - \text{Zerfall} \quad (2.13)$$

$$e^- + B(Z,A) \rightarrow D(Z-1,A) + \nu_e \quad \text{Elektroneneinfang} \quad (2.14)$$

Dem  $\beta^-$ -Zerfall liegt der Zerfall eines Neutrons zu Grunde:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (2.15)$$

Da der  $\beta$ -Zerfall ein Drei-Körperzerfall ist, teilt sich die Energie auf alle am Zerfall beteiligten Teilchen auf und man erhält ein kontinuierliches Spektrum. Weiterhin muss die Energieerhaltung gelten, d.h. die Gesamtenergie muss der Summe der freiwerdenden Energien entsprechen. Die Rückstoßenergie des Nukleons ist hierbei zu vernachlässigen, da die Massen des Elektrons und des Neutrinos im Vergleich zum Nukleon deutlich kleiner sind. Somit erhält man die Stufenfunktion

$$\Theta(E_0 - E - m(\bar{\nu}_e)c^2) = 0 \quad (2.16)$$

wobei  $E$  die Energie des Elektrons ist.

Für das Energiespektrum des  $\beta^-$ -Zerfalls erhält man dann mit Fermis Goldener Regel [Alt03]

$$\frac{d\dot{N}}{dE} = R(E) \sqrt{(E_0 - E)^2 - m(\nu_e)^2 c^4} \Theta(E_0 - E - m(\nu_e)c^2) \quad (2.17)$$

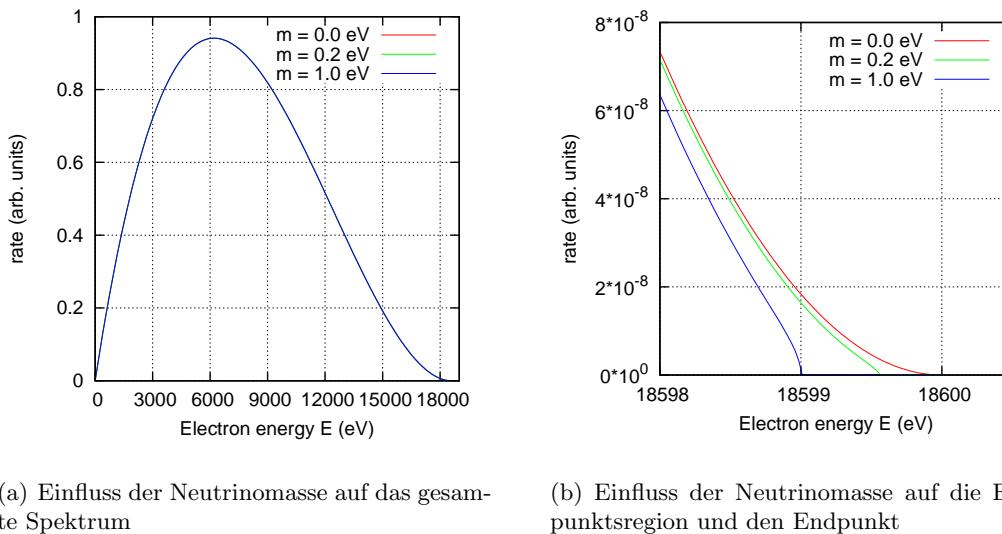
mit

$$R(E) = \frac{G_F^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} \cos^2(\theta_C) |M|^2 F(Z+1, E) p(E + m_e c^2) (E_0 - E). \quad (2.18)$$

Dabei ist:

- $G_F$  die Fermi-Kopplungskonstante,
- $\theta_C$  der Cabibbo-Winkel,
- $M$  das Kernmatrixelement,
- $F$  die Fermifunktion,
- $p$  der Impuls des Elektrons,
- $E$  die kinetische Energie des Elektrons,
- $E_0$  der Endpunkt des  $\beta$ -Spektrums,
- $m_e c^2, m(\nu_e) c^2$  die Ruheenergie des Elektrons bzw. des Elektronantineutrinos.

Die Fermifunktion in Formel 2.17 beschreibt dabei die Coulomb Wechselwirkung zwischen dem Elektron und dem Tochterkern. Eine Abhängigkeit des Spektrums von der Neutrinomasse ist auch vorhanden, so ist die Form des Spektrums und der Endpunkt von der Neutrinomasse  $m(\nu_e)$  abhängig. Abbildung 2.2 zeigt diese Abhängigkeit auf das  $\beta$  Spektrum für den  $\beta^-$ -Zerfall von Tritium.



(a) Einfluss der Neutrinomasse auf das gesamte Spektrum

(b) Einfluss der Neutrinomasse auf die Endpunktsregion und den Endpunkt

**Abbildung 2.2.:** Form des  $\beta$ -Spektrums beim Tritium  $\beta^-$ -Zerfall für verschiedene Neutrinomassen. Der Einfluss der Fermifunktion wurde vernachlässigt. Quelle: [Zac09].

Um nun aus dem Spektrum die Werte für  $E_0$  und  $m(\nu_e)$  bestimmen zu können, muss das Spektrum in Endpunktnähe präzise vermessen werden. Dieses Verfahren zur Be-

stimmung der Neutrinomasse ist in verschiedenen Experimenten bereits erfolgreich eingesetzt worden. Die Experimente haben oftmals Tritium als Quelle genutzt, dies zerfällt wie folgt:



Tritium hat verschiedene Vorteile für diese Experimente:

- Tritium hat von allen  $\beta$ -Quellen die zweitniedrigste Endpunktsenergie, lediglich  $^{187}Rh$  hat eine niedrigere Endpunktsenergie
- Im Vergleich zu Rhenium ist die Halbwertszeit von Tritium mit 12,3 Jahren kurz und somit hat die Quelle auch eine höhere Aktivität
- Aufgrund der einfachen elektronischen Struktur und der kleinen Kernladungszahl Z lassen sich die Fermifunktion und atomare Korrekturen analytisch berechnen.

Die Experimente in Mainz und Troitsk nutzten das hier vorgestellte Verfahren und ein Spektrometer vom MAC-E-Filter Typ. Die bisherige Obergrenze für die Neutrinomasse wird durch diese beiden Experimente bei jeweils 95% C.L. festgelegt:

$$\text{Mainz: } 2,3 \text{ eV/c}^2 \quad [\text{Kra05}] \quad (2.20)$$

$$\text{Troitsk: } 2,1 \text{ ev/c}^2 \quad [\text{Lob03}] \quad (2.21)$$

Das KATRIN Experiment stellt eine Weiterentwicklung dieser Experimente dar und wird im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben.

# 3. Das KATRIN Experiment

Das KATRIN Experiment ist mit einer zehnfach höheren Sensitivität das Nachfolgeexperiment zu den Experimenten in Mainz und Troitsk. Die Bestimmung der Elektronantineutrinomasse erfolgt hier durch die präzise Vermessung des Energiespektrums des Tritium- $\beta$ -Zerfalls. Mit der angestrebten Sensitivität lässt sich die Masse auf  $0,35 \text{ eV}/c^2$  bei einer Genauigkeit von  $5\sigma$  bzw.  $0,3 \text{ eV}/c^2$  bei einer Genauigkeit von  $3\sigma$  bestimmen. Sollte keine Masse bestimmt werden können, so legt das KATRIN Experiment eine neue Obergrenze von  $m_{\bar{\nu}_e} < 0,2 \text{ eV}/c^2$  bei einer Sicherheit von 90% fest [KAT04].

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über das Experiment und beschreibt die wichtigsten Komponenten.

## 3.1. Experimenteller Aufbau

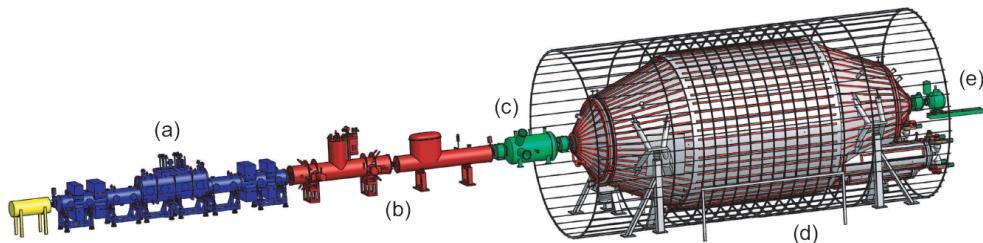


Abbildung 3.1.: Aufbau des KATRIN Experimentes: a) WGTS (Tritiumquelle), b) Pumpstrecke, c) Vorspektrometer, d) Hauptspektrometer, e) Detektor.

Der Aufbau des KATRIN Experimentes ist in Abbildung 3.1 dargestellt, im Folgenden werden die einzelnen Teile des Experimentes näher erläutert.

### 3.1.1. Die Tritiumquelle (WGTS)

Die Tritiumquelle ist eine fensterlose Quelle mit gasförmigen Tritium (**Windowless Gaseous Tritium Source**), diese zeichnet sich durch eine hohe Zerfallsrate ohne störende Festkörpereffekte aus. Das Tritium wird in der Mitte eines 10 m langen Rohres mit einem Durchmesser von 9 cm eingelassen und diffundiert dann zu beiden Enden. Das Rohr wird auf eine Temperatur von 30 K heruntergekühlt. Die durch den Zerfall freiwerdenden Elektronen werden durch ein Magnetfeld von 3,6 T zu den Enden des Rohres geführt. Das restliche Tritium wird dann an beiden Enden abgepumpt, gereinigt und wieder in das Rohr geleitet.

### 3.1.2. Pumpstrecke

Um Untergrundeffekte durch Tritium, das aus der WGTS in Richtung Spektrometer wandert, zu verhindern, muss der Tritiumfluss auf  $10^{-14}$  mbarl/s reduziert werden. Dies geschieht in der Pumpstrecke durch eine differentielle Pumpstrecke (DPS) sowie durch eine kryogene Pumpstrecke (CPS). In der differentiellen Pumpstrecke wird das restliche Tritium durch Turbomolekularpumpen auf  $0,4 \cdot 10^{-7}$  mbarl/s reduziert. Das verbliebene Resttritium wird dann in der CPS auf Argonschnee mit 3 K aufgefroren.

Zur weiteren Reduzierung des Tritiumflusses wird die Strahlführung geknickt. Elektronen werden dann mit Hilfe eines Magnetfeldes durch die Knicke geleitet, während neutrale Gasatome sich weiterhin geradlinig bewegen und an den Wänden abgefangen werden können.

### 3.1.3. Vorspektrometer

An die Pumpstrecke schließt sich das Vorspektrometer mit einer Länge von 3,7 m und einem Durchmesser von 1,7 m an. Das Spektrometer ist ein Spektrometer vom MAC-E Filter Typ, dieser Typ wird in Abschnitt 3.2 näher beschrieben. Das Vorspektrometer dient dabei als ein Hochpassfilter um den niederenergetischen Teil des  $\beta$ -Spektrums zu sperren. Durch das Anlegen einer ca. 500 V - 1kV [Hil11] positiveren Spannung an das Vorspektrometer als an das Hauptspektrometer gelangen nur noch hochenergetische Elektronen bis 500 V (beim Anlegen einer 500 V positiveren Spannung) unterhalb der Endpunktsenergie in das Hauptspektrometer. Der genaue Wert für die Spannung wird experimentell bestimmt [Hil11]. Der Elektronenfluss wird so von  $10^{10}$  auf  $10^3$  Elektronen verringert. Dies dient zur Reduktion des Untergrundes, da so das Auffüllen von Penning Fallen und die Ionisation des Restgases verringert werden. Für diesen Zweck ist kein hohes Auflösungsvermögen nötig, die vorhandene Auflösung von 100 eV reicht aus.

Vor Beginn der Messzeit dient das Vorspektrometer als Prototyp des Hauptspektrometers für wichtige Untersuchungen. Es lassen sich Tests für das innere Elektrodensystem und somit zur Untergrundreduzierung und zur Untersuchung von Penning Fallen durchführen. Die Ergebnisse dieser Tests werden für das Hauptspektrometer genutzt.

### 3.1.4. Hauptspektrometer

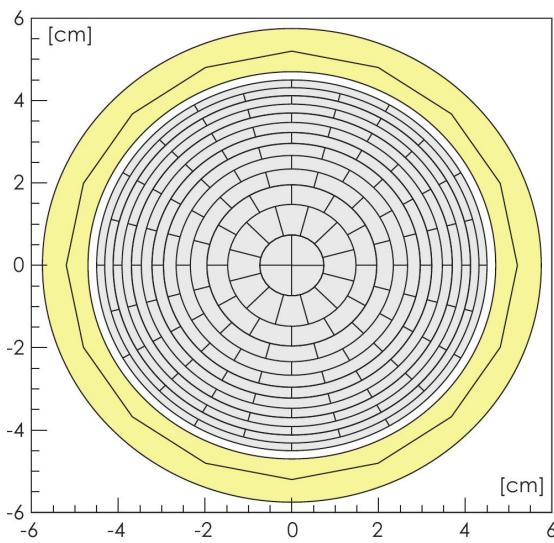
Das Hauptspektrometer ist der für die Energieauflösung wichtigste Teil des KATRIN Experiments. Es besteht aus einem zylinderförmigen Mittelteil und ist an beiden Enden konisch, die Länge beträgt 23 m bei einem Durchmesser von 10 m. Die Aufgabe des Hauptspektrometers ist es, den Endpunktsbereich des  $\beta$ -Spektrums des Tritiumzerfalls exakt zu vermessen. Dabei arbeitet es, wie das Vorspektrometer, nach dem MAC-E-Filter Prinzip und erreicht eine Energieauflösung von  $\Delta E = 0,93$  eV.

Zusätzlich zum Tank enthält das Hauptspektrometer auch ein inneres Elektrodensystem, bestehend aus Vollmetall- und Drahtelektroden. Die Drahtelektrode wird in Abschnitt 3.4 näher beschrieben. Auch das Vorspektrometer enthält bereits eine einlagige Drahtelektrode.

### 3.1.5. Detektor

Elektronen, die das Retardierungspotential überwunden haben, werden im Detektor nachgewiesen. Da die Energieanalyse bereits im Hauptspektrometer statt findet, benötigt er nur eine hohe Nachweiseffizienz für Elektronen mit einer Energie von etwa 18,6 keV. Die Energieauflösung des Detektors von  $\pm 1$  kV ermöglicht eine Trennung des Elektronensignals von einem Großteil des Untergrunds.

Der Detektor besteht aus einer Silizium PIN-Diode und hat einen Durchmesser von 90 mm. Die Detektorfläche ist in 148 gleichgroße Pixel unterteilt (vgl. Abbildung 3.2), die eine Ortsauflösung zur Untersuchung des Strahlprofils ermöglichen.

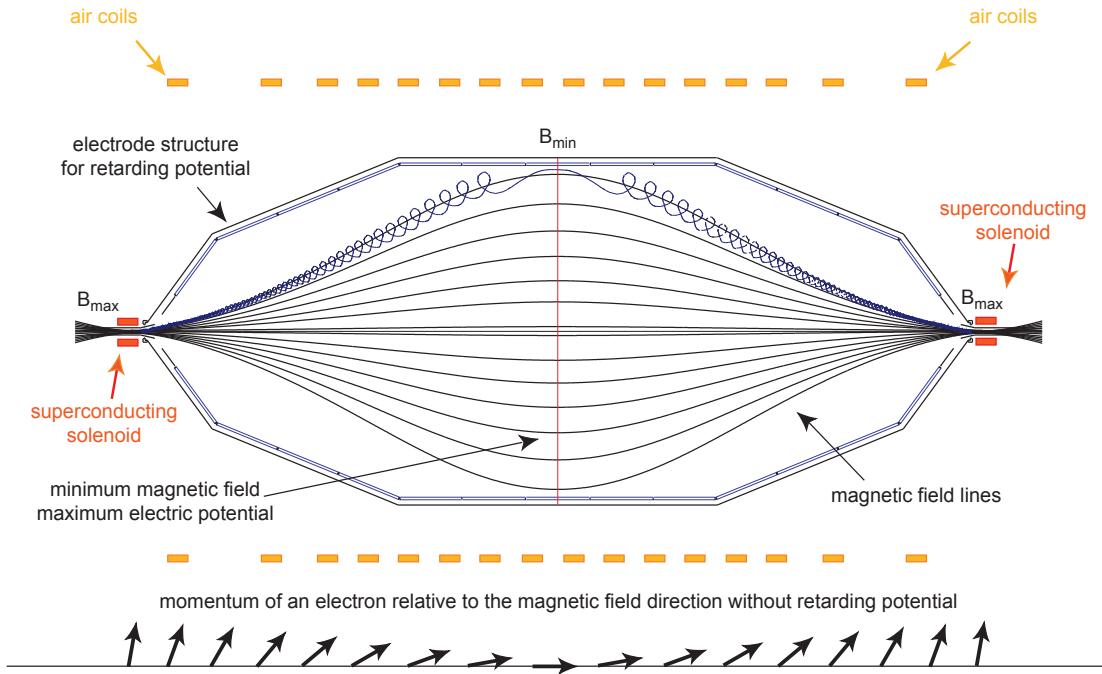


**Abbildung 3.2.:** Der Detektor ist in zwölf Ringe zu jeweils zwölf Segmenten und einem Ring mit vier Segmenten unterteilt und ermöglicht so eine Ortsauflösung (Quelle: [Val09]).

## 3.2. MAC-E-Filter

Im Bereich um die Endpunktsenergie des  $\beta$ -Spektrums ist die Zählrate sehr gering, da nur etwa  $10^{-13}$  aller Zerfälle im Bereich von 1 eV unterhalb der Endpunktsenergie liegen. Die Information über die Neutrinomasse liegt vor allem im Bereich direkt unterhalb der Endpunktsenergie (vgl. Formel 2.17). Daher benötigt man eine Quelle mit hoher Luminosität und ein Spektrometer, das eine hohe Energieauflösung und eine hohe Winkelakzeptanz hat. Spektrometer des Typs **Magnetic Adiabatic Collimation with Electrostatic filtering** (MAC-E) erfüllen diese Voraussetzungen.

Spektrometer vom MAC-E-Filter Typ wurden bereits in Mainz und Troitsk erfolgreich eingesetzt.



**Abbildung 3.3.:** Als Beispiel für einen MAC-E-Filter wird hier der schematische Aufbau des KATRIN-Hauptspektrometers gezeigt. In blau ist die Zyklotronbewegung eines Elektrons dargestellt, die Pfeile am unteren Rand zeigen den Verlauf der Umwandlung von Transversalenergie in Longitudinalenergie. Das Bild stammt aus [Hug08].

### 3.2.1. Prinzip des MAC-E-Filters

Einen schematischen Überblick über einen MAC-E-Filter zeigt Abbildung 3.3. Ein MAC-E-Filter besteht unter anderem aus supraleitenden Solenoid-Magneten an beiden Enden des Spektrometers. Die magnetische Feldstärke fällt zur Analysierebene über mehrere Größenordnungen ab, das Maximum ist daher außen an den Magneten und das Minimum  $B_{min}$  in der so genannten Analysierebene. Weiterhin liegt in der Analysierebene ein elektrisches Retardierungspotential  $U_0$  an.

Entlang der magnetischen Feldlinien bewegen sich dann die Elektronen adiabatisch auf Zyklotronbahnen. Die Energie  $E$  der Elektronen lässt sich relativ zum B-Feld in transversale  $E_{\perp}$  und longitudinale Energie  $E_{\parallel}$  unterteilen. Aufgrund der adiabatischen Bewegung wandelt sich die transversale Energie auf dem Weg zur Analysierebene in longitudinale Energie um.

Da die magnetischen Feldlinien in der Analysierebene parallel zum elektrischen Feld sind, können nur Elektronen mit einer mit einer Mindestenergie  $qU_0$  erreichen das Ende des Spektrometers und können vom Detektor gezählt werden.

$$E_{\parallel} > qU_0 \quad (3.1)$$

die Analysierebene überwinden. Ein MAC-E-Filter verhält sich somit wie ein integrierender Hochpassfilter, denn nur Elektronen mit einer Mindestenergie  $qU_0$  erreichen das Ende des Spektrometers und können vom Detektor gezählt werden.

Um die Energieauflösung des Spektrometers zu bestimmen, müssen die Grundlagen eines MAC-E-Filters erklärt werden. Die kinetische Energie eines Elektrons besteht aus der Summe seiner longitudinalen und transversalen Komponenten:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= E_{\parallel} + E_{\perp} \\ E_{\parallel} &= E_{kin} \sin^2 \Theta \\ E_{\perp} &= E_{kin} \cos^2 \Theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dabei ist  $\Theta$  der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der Magnetfeldlinie, entlang derer sich das Elektron bewegt.

Ändert sich das Magnetfeld nur geringfügig während einer Zyklotronperiode, so ist die Bewegung adiabatisch. In dem Fall passt sich die Bewegung den Änderungen im magnetischen Feld an indem der Zyklotronradius geändert wird. Der magnetische Fluss  $\Phi = \int B dA$  innerhalb der Zyklotronbewegung bleibt erhalten. Daher gilt mit dem Zyklotronradius  $r_c$

$$Br_c^2 = const. \quad (3.3)$$

Äquivalent hierzu ist die Erhaltung des Produktes aus magnetischem Moment  $|\vec{\mu}|$  und dem Lorentzfaktor  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\gamma\mu = const. \quad (3.4)$$

Durch die Zyklotronbewegung haben die Elektronen auch ein magnetisches Moment

$$\mu = \frac{E_{\perp}}{B}. \quad (3.5)$$

Da der maximale Wert für  $\gamma$  von Elektronen aus dem Tritiumzerfall bei 1,04 liegt, kann man mit  $\gamma \approx 1$  schreiben

$$\gamma\mu \approx \mu = \frac{E_{\perp}}{B} = const. \quad (3.6)$$

Somit verringert sich die transversale Energie mit dem B-Feld, je mehr sich das Elektron der Analysierebene nähert. Da die Energie erhalten ist, wandelt sich nach Gleichung 3.2 die transversale in longitudinale Energie um. Aus Gleichung 3.6 lässt sich nun die Energieauflösung  $\Delta E$  des MAC-E-Filters bestimmen.

Davon ausgehend, dass bei einem maximalen  $B_{max}$  die Maximalenergie  $E_{kin,max}$  in der senkrechten Komponente  $E_{\perp}$  gespeichert ist, lässt sich über

$$\frac{E_{kin,max}}{B_{max}} = \frac{\Delta E_{\perp}}{B_{min}} \quad (3.7)$$

der Teil der Energie bestimmen, der noch bei minimalem  $B_{min}$  in der Zyklotronbewegung  $\Delta E_{\perp}$  gespeichert ist.

Da die magnetischen Feldlinien in der Analysierebene parallel zu dem elektrischen Feld sind, kann die restliche Energie nicht durch das Retardierungspotential bestimmt werden und man erhält somit die Energieauflösung eines idealen Spektrometers

$$\Delta E = \frac{B_{min}}{B_{max}} E_{kin,max} \quad (3.8)$$

Die maximale Feldstärke liegt bei  $B_{max} = 6 \text{ T}$  und fällt zur Analysierebene hin um den Faktor 20000 auf einen minimalen Wert von  $B_{min} = 3 \text{ G} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ . Die maximale Energie  $E_{kin,max}$  liegt bei der Endpunktsenergie  $E_0 = 18,6 \text{ kV}$  des Tritiumzerfalls. Für die Energieauflösung ergibt sich somit

$$\Delta E = \frac{B_{min}}{B_{max}} E_0 = \frac{1}{20000} \cdot 18600 \text{ V} = 0,93 \text{ eV}. \quad (3.9)$$

### Transmissionseigenschaften

Der Großteil der Transversalenergie der Elektronen wird vom Eingang des Spektrometers hin zur Analysierebene in Longitudinalenergie umgewandelt, die mit dem Retardierungspotential  $U_0$  analysiert werden kann. Elektronen mit derselben Startenergie, aber unterschiedlichen Startwinkeln, haben unterschiedliche Transversalenergien und somit auch unterschiedliche longitudinale Energien in der Analysierebene. Das Retardierungspotential, bei dem die Elektronen mit einer bestimmten kinetischen Energie die Analysierebene passieren, ist somit auch vom Eingangswinkel abhängig.

Damit ein Elektron das Retardierungspotential  $U_0$  überwinden kann, muss die longitudinale Energie in der Analysierebene größer Null sein:

$$E_{\parallel,B_{min}} > 0 \quad (3.10)$$

$$E_{\parallel,B_{min}} = E_{kin,B_{min}} - E_{\perp,B_{min}} \quad (3.11)$$

$$= E_{kin,B_{min}} - E_{\perp,B_{start}} \frac{B_{min}}{B_{start}} \quad (3.12)$$

$$= (E_{kin,B_{start}} - qU_0) - E_{kin,B_{start}} \sin^2 \Theta_{start} \frac{B_{min}}{B_{start}} > 0 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow qU_0 < E_{kin,B_{start}} \left( 1 - \sin^2 \Theta_{start} \frac{B_{min}}{B_{start}} \right) \quad (3.14)$$

Dabei beschreibt der Index *min* die Bedingungen in der Analysierebene und der Index *start* die Bedingungen im Eingangsbereich des MAC-E Filters. Aus Formel 3.14 erhält man dann die Transmissionsbedingung für alle Winkel:

$$\Theta_{start} < \Theta_{max} = \arcsin \sqrt{\frac{E_{kin,B_{start}} - qU_0}{E_{kin,B_{start}}} \frac{B_{min}}{B_{start}}}. \quad (3.15)$$

Nur Elektronen mit Startwinkeln  $\Theta_{start} < \Theta_{max}$  innerhalb des Magneten am Spektrometereingang können das Retardierungspotential überwinden.

Da der Startsolenoid an der Tritiumquelle mit  $B_{start} = 3,6 \text{ T}$  ein geringeres Feld hat als das Magnetfeld  $B_{max}$ , muss der magnetische Spiegeleffekt berücksichtigt werden. Wenn Elektronen von der Quelle in einen Bereich mit höherem Magnetfeld gelangen, dann werden Elektronen mit einem Winkel größer dem kritischen Winkel

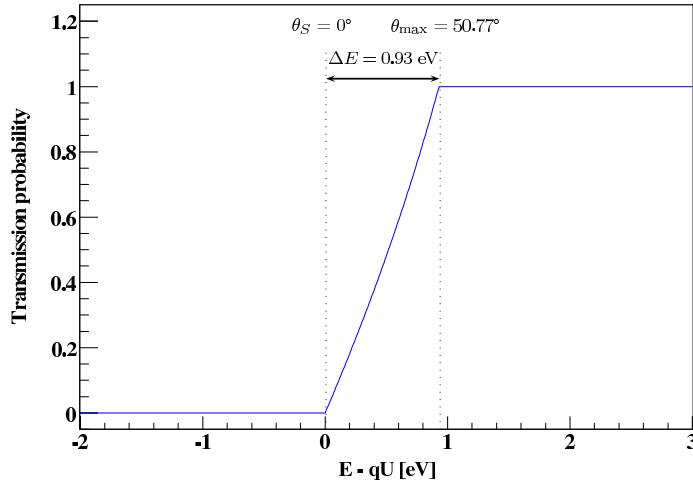
$$\Theta_{mirror} = \arcsin \sqrt{\frac{B_{start}}{B_{max}}} = \arcsin \sqrt{\frac{3,6 \text{ T}}{6 \text{ T}}} \approx 50,77^\circ \quad (3.16)$$

reflektiert.

Diese Reflektion ist auch ein gewünschter Effekt, da diese Elektronen eine längere Weglänge und somit auch eine höhere Wahrscheinlichkeit für Streuprozesse innerhalb der Quellregion haben.

Für die analytische Transmissionfunktion  $T(E_{kin}, U_0)$  eines MAC-E Filters erhält man somit (vergleiche Abbildung 3.4):

$$T(E_{kin}, U_0) = \begin{cases} 0 & E_{kin} - qU_0 < 0 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{E_{kin} - qU_0}{E_{kin}} \frac{B_{start}}{B_{min}}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta E}{E_{kin}} \frac{B_{start}}{B_{min}}}} & \text{für } 0 \leq E - qU_0 \leq \Delta E \\ 1 & \Delta E \leq E_{kin} - qU_0 \end{cases} \quad (3.17)$$



**Abbildung 3.4.:** Analytische Transmissionfunktion eines MAC-E Filters, die Abbildung stammt aus [Wol08].

### 3.2.2. Eigenschaften der KATRIN MAC-E Filter

Im KATRIN Experiment werden MAC-E Filter für das Vor- und Hauptspektrometer genutzt. Bislang wurde ein idealer MAC-E Filter beschrieben, in einem realen Spektrometer sind jedoch weder die Stärke des Magnetfeldes noch das Retardierungspotential über die Analysierebene konstant.

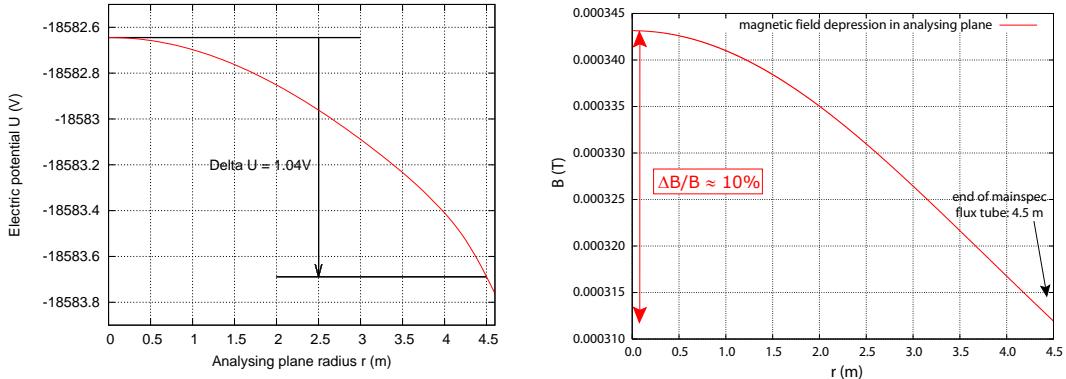
Aufgrund des inneren Elektrodensystems (vgl. Kapitel 3.4) im Hauptspektrometer und der endlichen Länge des Spektrometers ist das Retardierungspotential in der Analysierebene nicht konstant.

Die Potentialänderung in der Analysierebene wird als Potentialdurchgriff bezeichnet und ist definiert als Differenz des elektrischen Potentials in der Mitte der Analysierebene ( $r = 0$ ) und dem Potential am Rand des Flussschlauches bei  $r = 4,5$  m:

$$\Delta U := U(r = 0) - U(r = 4,5 \text{ m}) \quad (3.18)$$

Da ein großer Potentialdurchgriff die Energieauflösung des Spektrometers beeinträchtigt, sollte dieser Wert so gering wie möglich sein. Ohne innere Drahtelektrode und mit einem

idealen Tank hat das Hauptspektrometer einen Potentialdurchgriff von 0,5 V [Val04], mit der Drahtelektrode erhält man einen Durchgriff von  $\Delta U = 1,04$  V [Zac09].



(a) Potentialdurchgriff in der Analysierebene des Hauptspektrometers, Quelle: [Zac09] (b) Abfall des Magnetfeldes, Abbildung stammt aus [Hug08]

**Abbildung 3.5.:** *Abfall des elektrischen und magnetischen Feldes entlang der Analysierebene im KATRIN Hauptspektrometer.*

Wie bereits erwähnt, ist auch die Stärke des Magnetfeldes in der Analysierebene nicht konstant. Dies führt zu einer radialen Abhängigkeit der Energieauflösung und somit zu einer Verbreiterung der Transmissionfunktion. Im Hauptspektrometer beträgt die Abweichung  $\Delta B \approx 0,31$  G.

Abbildung 3.5 zeigt den Verlauf des E- und B-Feldes in der Analysierebene. Der Potentialdurchgriff beträgt  $\Delta U = 1,04$  V und der Abfall des Magnetfeldes  $\Delta B/B \approx 10\%$ . Diese Effekte wirken sich auf die Transmissionsfunktion aus und führen zu einer Verbreiterung. Das Ergebnis entsprechender Monte-Carlo-Simulationen ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Die Auswirkung der B-Feld Inhomogenität wirkt sich deutlich geringer aus als die des elektrischen Potentialdurchgriffs.

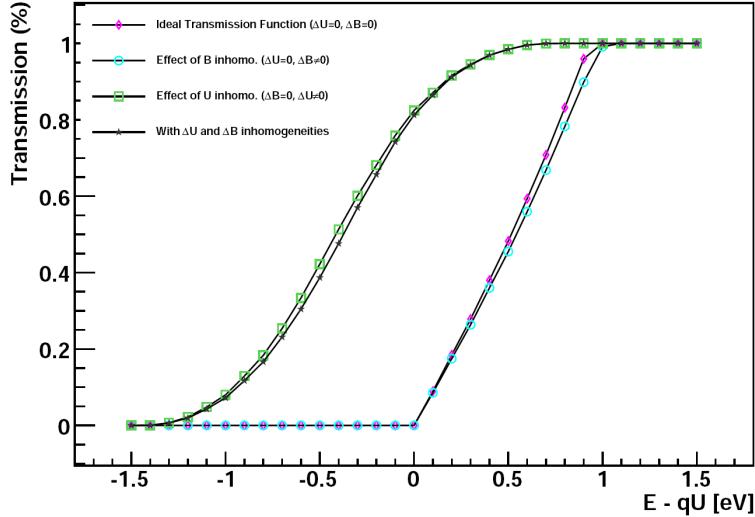
Um diese Effekte zu kompensieren, muss die Transmissionsfunktion für verschiedene Regionen der Analysierebene experimentell bestimmt werden. Hierfür ist ein segmentierter Detektor nötig, wie er im KATRIN Aufbau genutzt wird (siehe Abschnitt 3.1.5).

### 3.3. Untergrundquellen

MAC-E Filter Spektrometer ermöglichen sehr präzise Messungen der Endpunktsregion des Tritium  $\beta$ -Zerfalls bei geringen Zählraten. Eine Voraussetzung hierfür ist auch ein sehr geringer Untergrund. Um die gewünschte Sensitivität von  $m(\nu_e) < 0,2$  eV mit einer Sicherheit von 90 % zu erreichen, benötigt das KATRIN Experiment eine Untergrundrate von maximal 10 mHz [KAT04].

Mögliche Untergrundquellen sind unter anderem

- Elektronen, die von der Spektrometerwand durch Radioaktivität oder durch kosmische Myonen emittiert werden,



**Abbildung 3.6.:** Monte-Carlo Simulation der Transmissionsfunktion des KATRIN Hauptspektrometers. Gezeigt ist der Einfluss der Potential- und/oder Magnetfeldabweichungen mit  $\Delta E \approx 1,2 \text{ V}$  und  $\Delta B \approx 0,4 \text{ G}$  auf die Transmissionsfunktion.

- Teilchenfallen, so z.B. Penningfallen,
- Restgasionisation und
- $T_2$  Zerfall im Spektrometer.

Durch den Einfall kosmischer Myonen oder durch den Zerfall radioaktiver Atome in der Tankwand können Elektronen vom Tank emittiert werden. Wenn das elektrische oder magnetische Feld eine nicht-axialsymmetrische Komponente besitzen, dann können diese Elektronen in den Flusschlauch gelangen (siehe [Glu05]). Im Flusschlauch können diese Elektronen dann Streuprozesse verursachen oder beschleunigt werden und den Detektor erreichen, dies führt dann zu einem erhöhten Untergrund. Daher müssen diese Elektronen vor dem Erreichen des Flusschlauchs abgefangen werden. Das KATRIN Experiment nutzt hierfür eine innere Drahtelektrode, das Prinzip dieser Drahtelektrode und wie sie zur Untergrundreduktion beiträgt, ist in Kapitel 3.4 erklärt.

Eine weitere Ursache für den Untergrund sind Teilchenfallen, wie z.B. Penningfallen. Diese können zu Entladungen und damit verbunden zu Druckanstiegen im Spektrometer führen und so zu einer erhöhten Untergrundrate. Durch ein geschicktes Design eines inneren Elektrodensystems können diese Teilchenfallen vermieden bzw. verringert werden. Mehr Informationen zu Teilchenfallen innerhalb des KATRIN Hauptspektrometers sind in [Hug08] und [Zac09] zu finden.

Mit einem Druck von  $\leq 10^{-11} \text{ mbar}$  im Hauptspektrometer soll die sogenannte Restgasionisation unterdrückt werden. Von den Experimenten in Troitsk und Mainz ist bekannt, dass ein zu geringer Druck noch vorhandene Penningfallen zünden kann, dies ist jedoch von der genauen Feldstruktur abhängig. In Troitsk musste ein Druck von  $< 5 \cdot 10^{-10} \text{ mbar}$  erreicht werden, da sich noch vorhandene Penningfallen bereits bei einem Druck von  $1 \cdot 10^{-9} \text{ mbar}$  entluden.

### 3.4. Untergrundreduktion: Die innere Drahtelektrode

Ein Teil der durch kosmische Myonen und Radioaktivität von der Tankwand emittierten Elektronen wird bereits durch das Magnetfeld abgeschirmt, da es nur Elektronen innerhalb des Flussschlauches zum Detektor führt. Ein Teil der Elektronen gelangt jedoch in den Flussschlauch und somit zum Detektor. Dieser Untergrund ist für das Experiment aber immer noch zu groß und muss abgefangen werden, daher wird eine zusätzliche Drahtelektrode eingebaut. Am zusätzlichen Drahtgitter liegt ein negativeres Potential an als am Tank, um niederenergetische Elektronen zu reflektieren. Das Prinzip ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Wenn die Energie eines Elektrons von der Tankwand nicht hoch genug ist, um die Potentialdifferenz zwischen Tankwand und Drahtelektrode zu überwinden, wird das Elektron von der Drahtelektrode zur Tankwand zurück reflektiert und es erreicht nicht den Flussschlauch.

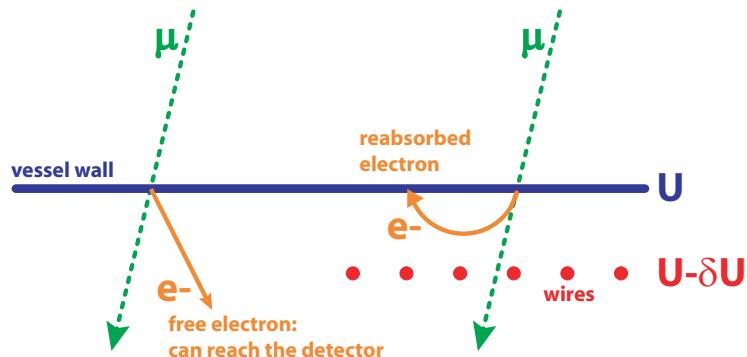


Abbildung 3.7.: Prinzip der Drahtelektrode, Quelle: [Hug08].

Zu diesem Zweck wurde eine Drahtelektrode mit zwei Drahtlagen entwickelt. Die erste, äußere Drahtlage mit 0,3 mm dicken Drähten schirmt die Tankwand ab, eine zweite, innere Drahtlage schirmt die erste Drahtlage und die Haltestruktur ab, der Drahtdurchmesser beträgt 0,2 mm. Die Parameter der Drahtelektrode sind in Tabelle 3.1 zu sehen. Die Potentiale im Hauptspektrometer sind -18,4 kV für den Tank und -18,5 kV sowie -18,6 kV für die Drahtelektrode.

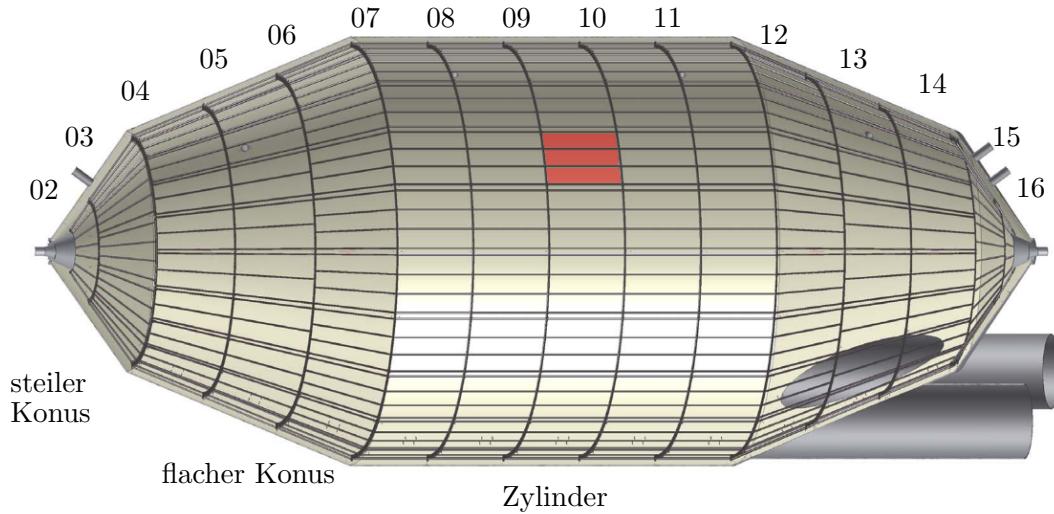
	Durchmesser $d$	Abstand $L$	$\Delta U$	
äußere Lage	0,3 mm	150 mm	-100 V	zur Tankwand
innere Lage	0,2 mm	220 mm	-200 V	zur Tankwand
innere Lage	0,2 mm	70 mm	-100 V	zur äußeren Lage

Tabelle 3.1.: Parameter der Drahtelektrode im KATRIN Hauptspektrometer.

Die in Tabelle 3.1 angegebenen Werte gelten nur für den Zentral- und flachen Konusteil des Spektrometers und sind Designwerte. Die genauen Werte für die Potentiale werden in Simulationen und experimentell festgelegt.

Dass eine solche Drahtelektrode den Untergrund erfolgreich unterdrücken kann, wurde bereits am Mainzer Spektrometer nachgewiesen [Flat04]. Eine ähnliche, aber einfacher

aufgebaute Drahtelektrode wird auch im Vorspektrometer zur Untergrundreduktion verwendet.



**Abbildung 3.8.:** Unterteilung des Hauptspektrometers in Ringe und Module. Rot markiert ist ein einzelnes Modul im Zylinder Teil des Hauptspektrometers. Quelle: [Zac09].

Die Drahtelektrode ist in mehrere Ringe und Module unterteilt, diese Unterteilung zeigt Abbildung 3.8. Über die gesamte Länge des Spektrometers besteht die Drahtelektrode aus 16 Ringen (startend bei Ring 02 auf der Quellseite und endend bei Ring 16 auf der Dektortorseite), diese wiederum sind zusammengesetzt aus 4 - 20 Modulen pro Ring. Die Anzahl der Module pro Ring sowie weitere Parameter sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Ring	Anzahl der Module	Anzahl der Drahtlagen	Drahtanzahl pro Lage und Modul	Draht-durchmesser
07-11	20	2	60	0,2 / 0,3 mm
06/12	20	2	52	0,2 / 0,3 mm
05/13	20	2	42	0,2 / 0,3 mm
04/14	20	2	34	0,2 / 0,3 mm
03/15	10	1	40	0,2 mm
02/16	4	1	50	0,2 mm

**Tabelle 3.2.:** Weitere Parameter der Drahtelektrode des KATRIN Hauptspektrometers.



## 4. Simulationsprogramme

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden für das KATRIN Experiment zahlreiche elektrostatische Simulationen durchgeführt. In diesem Kapitel werden die benutzten Programme kurz erläutert.

Zur Geometrieerstellung wird das MainSpec Programm von Sebastian Vöcking verwendet, das im Rahmen dieser Arbeit um weitere Funktionen ergänzt wurde.

Für die Berechnungen von elektrischen Feldern werden die *elcd* Programme von Dr. Ferenc Glück verwendet, diese wurden speziell für das KATRIN Experiment entwickelt. Die Programme nutzen die Boundary Element Methode (BEM), die in Abschnitt 4.2 genauer beschrieben wird.

Im Rahmen des neuen kollaborationsweiten Simulationsframeworks Kassiopeia wird als Alternative zur Boundary Element Methode die Robin Hood Methode verwendet, diese hat gegenüber der BEM einige Vorteile. Diese neue Methode wird in Abschnitt 4.3 erläutert.

### 4.1. Geometrieerstellung

Zur Erstellung der Geometrien für die elektrostatischen Simulationen wird das von Sebastian Vöcking entwickelte Python Programm *MainSpec* verwendet. Dieses bietet unter anderem über eine grafische Oberfläche die Möglichkeit schnell einzelne Parameter wie die Diskretisierung einer vorhandenen Geometrie zu verändern. Diese Einstellungen lassen sich in einer XML Datei speichern und später wieder in MainSpec importieren. Neben der grafischen Oberfläche existiert auch eine Kommandozeilenversion *cmdMainSpec*, mit der sich viele Geometrien mit unterschiedlichen Parametern für die Simulationen erstellen lassen. Typische Geometriedateien für elcd3\_3 enthalten mehrere tausend Zeilen mit jeweils 16 Spalten.

Das Programm ist modular aufgebaut und besitzt eigene Module für die Oberfläche, die Geometrie, die Geometrieerstellung und für die Mathematik. Eine ausführliche Beschreibung des Programms ist in [Voe08] zu finden.

MainSpec unterstützt drei Elektrodentypen: Konus-, Draht-, und Rechteckeletektroden. Für jeden Elektrodentyp gibt es Funktionen zum Manipulieren der Elektroden wie kopieren, verschieben, rotieren und spiegeln. Oftmals lässt sich eine weitere Elektrode zum Beispiel durch das Rotieren der zuvor erstellten Elektrode erstellen, ohne dass diese Elektrode noch einmal erstellt werden muss. Weiterhin lassen sich alle Elektroden mit einem Befehl in kleinere Elemente unterteilen (diskretisieren). Mit Hilfe der Group Klasse lassen sich Elektroden gruppieren und die Operationen auf alle Elemente der Elektrodengruppe gemeinsam ausführen.

Die eigentliche Geometrieerstellung erfolgt in der *Builder*-Klasse. Die einzelnen Elektroden werden dort durch verschiedene Funktionen erstellt, so gibt es eigene Funktionen für die Drähte und Kämme der Drahtelektrode. Die Builder-Klasse ist jederzeit

um neue Geometrien, wie zum Beispiel runde Elektroden, erweiterbar. Die bei runden Elektroden, wie sie beim Pumpport benötigt werden, auftretenden Probleme werden in Kapitel 5 genauer erläutert.

Da die verwendeten Programme elcd3\_2 und elcd3\_3 unterschiedliche Geometriiformate verlangen, kann man bei der Ausgabe zwischen den beiden Formaten wählen. MainSpec unterstützt auch das Einlesen bereits vorhandener Geometriedateien in den elcd Formaten.

Zur grafischen Kontrolle der Geometrie lässt sich das auf ROOT basierende Programm *ROOTsim* verwenden. ROOTsim liest vorhandene Geometriedateien ein und stellt diese dreidimensional dar. Die angezeigte Geometrie lässt sich dann im Gesamten, aber auch durch das Heranzoomen einzelner Elemente im Detail analysieren [Voe08].

## 4.2. Die Boundary Element Methode

Für die Berechnung elektrischer Felder im KATRIN Setup wurden verschiedene kommerzielle Programme wie SIMION getestet, es stellte sich jedoch heraus, dass keines dieser Programme sich für KATRIN nutzen lässt [Val04]. Das Problem sind die unterschiedlichen Dimensionen des Experimentes, einerseits besteht das Hauptspektrometer aus einem 23 m langen Tank mit einem Durchmesser von 9 m, andererseits müssen auch so kleine Strukturen wie Drähte mit einem Durchmesser von 0,2 und 0,3 mm simuliert werden.

SIMION und andere Programme nutzen die Finite Difference Methode (FDM), dabei wird das Volumen in eine äquidistante Netz unterteilt und anhand dieses Netzes wird das elektrische Feld berechnet. Für die KATRIN Simulationen wird somit ein sehr enges Netz benötigt, was dann bei der Spektrometergröße zu Speicherproblemen führt. Daher wurde von Dr. Ferenc Glück eine Routine speziell für die KATRIN Anforderungen entwickelt, die auf der Boundary Element Methode (BEM) basiert.

Bei der BEM wird die Elektrode durch eine geladene Oberfläche dargestellt. Die Oberfläche  $I$  wird dann in viele kleine Elemente  $i$  zerlegt, von denen man annimmt, dass jedes Element eine konstante Ladungsdichte besitzt. Dies ist erlaubt, weil die Ladungsdichte eine stetige Funktion ist. Da die Leiteroberflächen Äquipotentialflächen sind, hat jedes dieser Oberflächenelemente  $i$  das Potential  $U_i$ , das gleich dem angelegten Elektrodenpotential  $U_I$  ist. Das Potential  $U_i$  im Mittelpunkt des Elementes  $i$  entspricht nun der Summe der Potentialbeiträge  $\Phi_{ij}$  aller anderen Elemente  $j$ :

$$U_i = \sum_j \Phi_{ij}. \quad (4.1)$$

Der Potentialbeitrag  $\Phi_{ij}$ , der durch das Element  $j$  im Zentrum des Elementes  $i$  erzeugt wird, ist

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^2r_j \sigma_j \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (4.2)$$

$$= \frac{\sigma_j}{4\pi\epsilon_0} \int d^2r_j \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (4.3)$$

$$\equiv \sigma_j k_{ij}. \quad (4.4)$$

Dabei wird über das gesamte Element  $j$  integriert. Die Ladungsdichte  $\sigma_j$  auf dem Element ist konstant und kann daher aus dem Integral herausgezogen werden. Der Faktor  $k_{ij}$  hängt nur noch von der bekannten Elektrodengeometrie ab. Addiert man nun alle Potentialbeiträge auf, so erhält man ein lineares Gleichungssystem

$$K\vec{\sigma} = \vec{U}. \quad (4.5)$$

Die Matrix  $K$  entsteht aus den einzelnen  $k_{ij}$  und beschreibt die Geometrie, den Vektor  $\vec{U}$  erhält man aus den Potentialen. Da  $\vec{U}$  und  $K$  bekannt sind, kann man nun durch Lösen der Gleichung 4.5 den Vektor  $\vec{\sigma}$  mit den Ladungsdichten der Oberflächenelemente berechnen. Dies beinhaltet allerdings die Näherung, dass alle Potentialbeiträge nur im Zentrum eines Elementes aufaddiert werden. Wenn die Elemente klein genug sind, ist dies kein großer Fehler.

In der Regel ist man allerdings eher an dem Potential oder elektrischen Feld an einem beliebigen Punkt interessiert als an den Ladungsdichten. Das Potential lässt sich dann über das Aufsummieren aller Oberflächenladungsdichten bestimmen:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \sigma_l \int d^2 e_l \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_l|}. \quad (4.6)$$

Das elektrische Feld lässt sich dann durch numerisches Differenzieren des Potentials berechnen.

Keinen Einfluss auf die BEM hat die Größe einer Elektrode, man kann somit große und kleine Strukturen gleichzeitig berechnen. Aber auch die BEM hat Grenzen, so ist die maximale Anzahl der Elemente  $N$  durch den Arbeitsspeicher des Computers begrenzt. Der benötigte Arbeitsspeicher steigt mit  $N^2$ , mit einem Arbeitsspeicher von 1 GB lassen sich etwa 10.000 Elemente berechnen.

### 4.2.1. Die elcd Programme

Die elcd Programme nutzen die oben beschriebene Boundary Element Methode um die elektrischen Ladungsdichten zu berechnen.

Das Programm *elcd3\_2* unterstützt nur rotationssymmetrische (konische) Elektroden und Drähte mit der z-Achse als gemeinsame Symmetriearchse. Das Hauptspektrometer mit Drähten lässt sich hier bereits simulieren. Die Haltestruktur für die Drähte ist jedoch nicht rotationssymmetrisch und lässt sich auch nicht mit *elcd3\_2* simulieren.

Um auch die Kämme der Haltestruktur für die Drahtelektrode simulieren zu können, wird ein Programm benötigt, das auch nicht rotationssymmetrische Elektroden unterstützt. Dies ist mit dem Programm *elcd3\_3* gegeben, damit lassen sich auch nicht rotationssymmetrische Elektroden berechnen. Hierfür werden die Elektroden in Rechtecke unterteilt, die auch rotiert werden können um Rechenzeit zu sparen. Bei der Rotierung wird die Ladungsdichte nicht für jedes einzelne Element, sondern nur für das Grundelement berechnet, das hinterher rotiert wird. Die rotierten Elemente erhalten dann dieselbe Ladungsdichte wie das Grundelement. Neben Rechtecken werden auch die Drähte unterstützt, somit lässt sich das Hauptspektrometer mit allen Elektroden berechnen.

Der Nachteil an elcd3\_3 ist, dass sich runde und konische Strukturen nur durch viele Rechtecke approximieren lassen. Dies kann dann zu Problemen führen, die in Kapitel 5 genauer erläutert werden.

Beide Programme verwenden jeweils unterschiedliche Eingabedateien, die sich jedoch mit dem in Abschnitt 4.1 beschriebenen Mainspec Programm in das andere Format konvertieren lassen. Wie diese Eingabedateien aussehen müssen, wird in [Hug08] genauer beschrieben.

### 4.3. Die Robin Hood Methode

Die elcd Programme nutzen zur Lösung der Gleichung 4.5 den Gaussalgorithmus, eine Alternative hierzu stellt die Robin Hood Methode (RH) dar. Die Voraussetzungen für diese Methode sind dieselben wie bei den oben beschriebenen elcd Programmen. Auch hier muss die Matrix aus Gleichung 4.5 gelöst werden, in elcd wird in der Regel ein Gaussalgorithmus verwendet. Bei der RH Methode wird ein iterativer Algorithmus verwendet. Im Folgenden wird die RH Methode an Beispielen eines isolierten und nicht isolierten Leiters erklärt [KAT10].

#### 4.3.1. Isolierter Würfel

Betrachtet wird ein isolierter Metallwürfel mit einer Gesamtladung  $Q$  auf seiner Oberfläche. Diesen Würfel zerlegt man dann in kleinere Subelemente und weist deren Oberfläche eine Ladung  $q$  zu. Da zu diesem Zeitpunkt nicht bekannt ist, wie die Ladungen verteilt sind, erfolgt die Verteilung beliebig. Mit Hilfe der Gleichungen 4.5 und 4.4 lässt sich nun das Potential für jedes Subelement berechnen. Da die Ladungsverteilung beliebig und daher nicht korrekt ist, ist das Potential auf der Oberfläche zu diesem Zeitpunkt *nicht* äquipotential.

Um die Ladungsverteilung zu korrigieren, wählt man die zwei Subelemente  $m$  und  $n$  aus, welche die größte Abweichung vom Durchschnittspotential haben. Anschließend wird die Ladung so verteilt, dass beide Elemente dasselbe Potential besitzen<sup>1</sup>.

Das neue Potential der Subelemente nach dieser Verteilung ist:

$$U'_m = U_m - I_{mm}\delta q + I_{mn}\delta q \quad (4.7)$$

$$U'_n = U_n - I_{nn}\delta q + I_{nm}\delta q \quad (4.8)$$

Im Fall von zwei Subelementen gibt es eine genaue Lösung für die Ladung, die von einem zum anderen Element wechselt:

$$\delta q = \frac{U_m - U_n}{K_{mm} + K_{nn} - K_{mn} - K_{nm}} \quad (4.9)$$

Dieser Ladungsaustausch hat zur Folge, dass  $U'_m$  und  $U'_n$  nun dasselbe Potential haben. Da elektrostatische Probleme nur eine einzige Lösung haben, konvergiert diese Methode. Dies wiederholt man so lange, bis der Unterschied zwischen einer äquipotentialen Lösung und  $U_i$  unter eine vom Anwender definierten Schwelle fällt.

<sup>1</sup>Dies erklärt auch den Namen Robin Hood Methode: Es ist ein Nehmen von den Reichen und Geben den Armen. Am Ende sind beide gleich.

### 4.3.2. Würfel auf einem festen Potential

Ein weiteres Beispiel ist ein Würfel mit einem festen Potential  $U_0$ , im Gegensatz zum isolierten Würfel ist dieser mit einer externen Quelle verbunden. Wie bereits zuvor wird die Ladung beliebig verteilt und man sucht die beiden Elemente, deren Potentialunterschied zum Potential  $U_0$  am Größten ist. Im Gegensatz zum isolierten Würfel muss man hier nicht die Ladungserhaltung beachten, da man von der externen Quelle zusätzliche Ladung erhält.

Die zu beiden Elementen ( $k$  und  $l$ ) hinzugefügte Ladung berechnet sich wie folgt:

$$\delta\sigma_k = \frac{(U_0 - U_k)I_{ll} - (U_0 - U_l)I_{kl}}{I_{kk}I_{ll} - I_{kl} - I_{lk}} \quad (4.10)$$

$$\delta\sigma_l = \frac{(U_0 - U_l)I_{kk} - (U_0 - U_k)I_{kl}}{I_{kk}I_{ll} - I_{kl} - I_{lk}} \quad (4.11)$$

Das Potential ist dann:

$$U'_k = U_k + I_{kk}\delta\sigma_k + I_{kl}\delta\sigma_l \quad (4.12)$$

$$U'_l = U_l + I_{ll}\delta\sigma_l + I_{kl}\delta\sigma_k \quad (4.13)$$

Auch diese Lösung konvergiert schnell, da die addierte Ladung auch die Nachbarelemente beeinflusst.

### 4.3.3. Verallgemeinerung der Ladungsverteilung

Die beiden vorhergehenden Abschnitte haben die Lösung für isolierte und nicht-isolierte Leiter gezeigt, bei denen zwei Elektroden ihre Ladung verändern. Verallgemeinert man nun diese Lösung für  $M$  Elektroden, mit  $1 \leq M \leq N$ , die ihre Ladungen verändern, so erhält man für den Fall mit einem festen Potential eine  $M \times M$  Matrix, die invertiert werden muss:

$$\sum_{j=1}^M K_{ij}\sigma_j = U_i \quad (4.14)$$

Dabei entspricht  $K_{ij}$  der zuvor bereits in Gleichung 4.5 definierten Matrix. Für den Fall, dass  $M = 2$  ist, erhält man die obige Gleichung 4.12.

Dieselbe Verallgemeinerung lässt sich für den isolierten Fall machen, allerdings muss hier explizit die Ladungserhaltung bei der Lösung der Matrix berücksichtigt werden. Somit gilt

$$\sum_{j=1}^M \sigma_j = 0. \quad (4.15)$$

Da die Oberfläche äquipotential ist, sind alle Potentiale der Elektrode nach dem Ladungsaustausch gleich und man erhält

$$\sum_{j=1}^M (K_{i,j} - K_{i+1,j})\sigma_j = U_{i+1} - U_i. \quad (4.16)$$

Kombiniert man nun beide Bedingungen, so erhält man wieder eine  $M \times M$  Matrix, die für die Berechnung der Ladungsdichte  $\sigma_j$  invertiert werden kann.

#### 4.3.4. Vorteile der Robin Hood Methode und Umsetzung in Kassiopeia

Die Robin Hood Methode hat gegenüber der bislang eingesetzten Boundary Element Methode einige Vorteile.

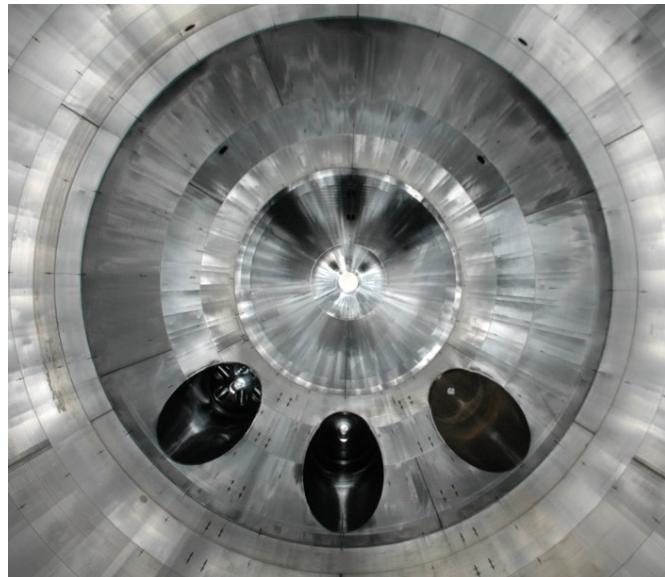
Da die RH Metode nach maximalen Abweichungen vom Durchschnittspotential sucht, kann sie Gebrauch von den effizienten MIN/MAX Funktionen für Arrays machen. Da die Korrektur nicht nur die Elemente, sondern auch die Nachbarelemente betrifft, konvergiert die Methode sehr schnell.

Auch die Berechnung der Matrixelemente  $I_{ij}$  erfolgt durch den Ladungsaustausch schneller und es muss kein großes Array angelegt werden, das viel Arbeitsspeicher benötigt. Die Abhängigkeit des Speicherverbrauchs wächst mit  $N$  statt mit  $N^2$  wie bei der BEM. Ein weiterer Vorteil ist, dass diese Methode Mehrkernprozessoren ausnutzen kann und somit weniger Rechenzeit benötigt.

Die Robin Hood Methode ist im neuen KATRIN Monte-Carlo-Framework *Kassiopeia* enthalten. Kassiopeia ist ein in ROOT geschriebenes Simulationsframework, das unter anderem auch elektrische und magnetische Felder berechnen kann. Hierfür wurden von B. Leiber die ecd Programme von C in ROOT übersetzt und auch die Robin Hood Methode implementiert. Eine weitere Implementierung der RH Methode ist im Programm *KEMField* von T. J. Corona. Bei beiden Programmen lässt sich die Berechnungs methode auswählen. Detaillierte Tests zur RH Methode in KEMField werden in [KAT10] diskutiert.

## 5. 3D Simulationen

Das elektromagnetische Design des KATRIN Hauptspektrometers und des inneren Elektrodenstems stand zu Beginn dieser Diplomarbeit bereits fest und wurde ausführlich in den Arbeiten [Hug08], [Zac09] und [Val09] diskutiert. Keine der bisherigen Simulationen berücksichtigt die drei Pumpports des Hauptspektrometers. Abbildung 5.1 zeigt ein Foto von den Pumpports im Inneren des Hauptspektrometers, die Ports befinden sich im flachen Konus des Hauptspektrometers und nutzen fast die gesamte Länge des flachen Konus. Die Ränder der Pumpports sind aufgrund von Potentialssprüngen Ursachen für zusätzliche Teilchenfallen und somit eine weitere Untergrundquelle. Das Ziel der durchgeführten Simulationen ist es, diese Sprünge zu vermeiden, indem eine zusätzliche Lage an Stäben in die Pumpports eingebaut wird.



**Abbildung 5.1.:** Ein Blick auf die Pumpports im Inneren des Hauptspektrometers auf der Detektorseite.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die mit elcd3\_3 durchgeführten Simulationen, die neu erstellten Geometrien und wieso trotz der neuen Geometrien für das Design der zusätzlichen Elektrode rotationssymmetrische 2D Simulationen durchgeführt wurden. Diese Simulationen gewähren einen ersten Einblick in die zuvor erwähnten Effekte. Aufgrund der hohen Anzahl an Subelementen konnte mit den zur Verfügung stehenden Programmen keine befriedigende Potentialberechnung durchgeführt werden. Die hier vorgestellten Methoden stellen jedoch die Problematik vor. Mit einer erweiterten Boundary Element Methode lassen sich die Geometrien jedoch in Zukunft lösen.

## 5.1. Erweiterung des Mainspec Designers

Die Geometrie des Pumpports ist in erster Näherung ein rundes Loch, solche Geometrien ließen sich bislang noch nicht durch das Mainspec Programm beschreiben. Das Mainspecprogramm und elcd3\_3 unterstützen nur Rechtecke und Drähte, daher wurden zwei neue Geometrieklassen und neue Funktionen in der Elektrodenklasse programmiert. Für die Geometrie wurde eine Kreisring Klasse programmiert, die sowohl runde als auch gedehnte Kreise approximativ darstellen kann, weiterhin wurde eine Klasse für einen gekippten Zylinder erstellt, der dann auf den Kreisring gesetzt werden kann. Beide Klassen lassen sich mit verschiedenen Einstellungen diskretisieren. Die Geometrie wird dabei auf eine Anzahl an Rechtecken zurückgeführt, für die die Berechnung existiert. Die Elektrodenklasse wurde um die Funktionen *discretise\_alt*, eine alternative Diskretisierungsmethode, *move\_to\_plane*, eine Möglichkeit Elemente in eine Ebene zu verschieben, und *checkplane*, eine Möglichkeit um Elemente auf einer Seite einer Ebene abzuschneiden, erweitert.

### 5.1.1. Kreisring Klasse

Das Simulationsprogramm elcd3\_3 unterstützt nur Rechtecke und Drähte als Elektroden, daher müssen die Pumpports durch Rechtecke dargestellt werden. Für die Erstellung der Kreisring Geometrie sind verschiedene Parameter nötig, so lässt sich mit Hilfe von zwei Radien neben einem runden Loch auch ein gedehntes Loch erstellen. Da die Geometrie aus einzelnen Ringen besteht, benötigt die Klasse die Übergabe der Parameter *nrot* für die Anzahl der Elemente pro Ring, die Anzahl der Ringe *rings*, eine Längenskalierung *len\_scale* und einen Faktor *uber* für einen Überlapp. Die Bedeutung dieser Parameter wird im folgenden erklärt.

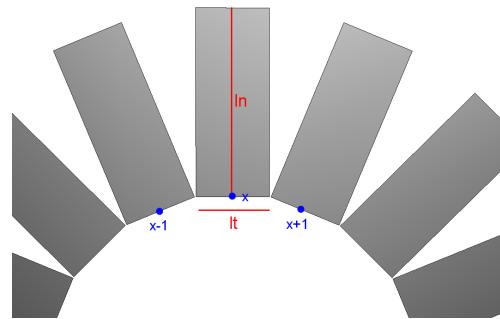
Zuerst werden die einzelnen Punkte auf dem Kreis mit Hilfe der Radien (*radx*, *rad*) und der Anzahl der Ringelemente (*nrot*) berechnet, dabei haben alle Ringelemente denselben Winkelabstand. Dafür werden die folgenden Formeln verwendet:

$$\phi = i * ((2 * \pi) / nrot) \quad (5.1)$$

$$x = centre_x + (radx * \cos(\phi)) \quad (5.2)$$

$$z = centre_z + (rad * \sin(\phi)) \quad (5.3)$$

Hierbei sind *centre<sub>x</sub>* und *centre<sub>z</sub>* die x- und z-Koordinaten des Mittelpunktes, *phi* der Winkel zwischen dem ersten und dem *i*-ten Element und *x* sowie *z* die x- bzw. z-Werte des *i*-ten Elements. Mit dieser Formel kann man nicht nur Kreise, sondern auch Ellipsen darstellen. Da die Koordinaten noch mit den entsprechenden Radien multipliziert werden, erhält man in Bereichen mit höherer Krümmung Elemente mit geringerer Breite, in diesem Bereich lässt sich die Geometrie dadurch genauer darstellen. An jedem Kreispunkt wird dann ein Rechteck mit den Längen *lt* in Tangentialrichtung und der *ln* in Normalenrichtung erstellt (vgl. Abbildung 5.2). Die Länge *lt* wird über Dreiecksberechnungen so bestimmt, dass die Rechtecke an den Punkten *p* und *p + 1* sich an den unteren Ecken berühren, aber nicht überschneiden (vgl. Abbildung 5.2), die Ringbreite *ln* wird über den zusätzlichen Parameter *len\_scale* festgelegt. Abbildung 5.3(a) zeigt zwei Rechtecke aus dem Ring, farbig markiert sind die Strecken,



**Abbildung 5.2.:** Ausschnitt aus der Geometrie, die Punkte  $x$  und  $x + 1$  sind zwei Punkte, die durch die Formeln 5.2 und 5.3 berechnet wurden.  $lt$  ist die Länge des Elements in Tangentialrichtung und  $ln$  die Breite in Normalenrichtung.

die zur Berechnung der Länge  $lt$  benötigt werden. Bei einem Wert von  $uber = 0$  sollen die Rechtecke sich nur im Punkt  $P$  berühren. Um nun die Länge  $lt$  berechnen zu können, wird die grüne Figur genutzt, diese ist in Abbildung 5.3(b) noch einmal dargestellt. Im Code bekannt sind die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Die Länge  $lt$  berechnet sich nun wie folgt:

$$dx = x(B) - x(A) \quad (5.4)$$

$$dz = z(B) - z(A) \quad (5.5)$$

$$dist = |\vec{c}| = \sqrt{dx^2 + dz^2} \quad (5.6)$$

$$lt = dist / \cos \gamma \quad (5.7)$$

Dabei sind  $x(B)$  und  $z(B)$  die  $x$  bzw.  $z$ -Koordinaten des Punktes B.

Anschließend wird jedes Rechteck um  $lt/2$  in Tangentialrichtung verschoben. Die Tangential- und Normaleneinheitsvektoren werden mit Hilfe der Ableitung in jedem Punkt erstellt:

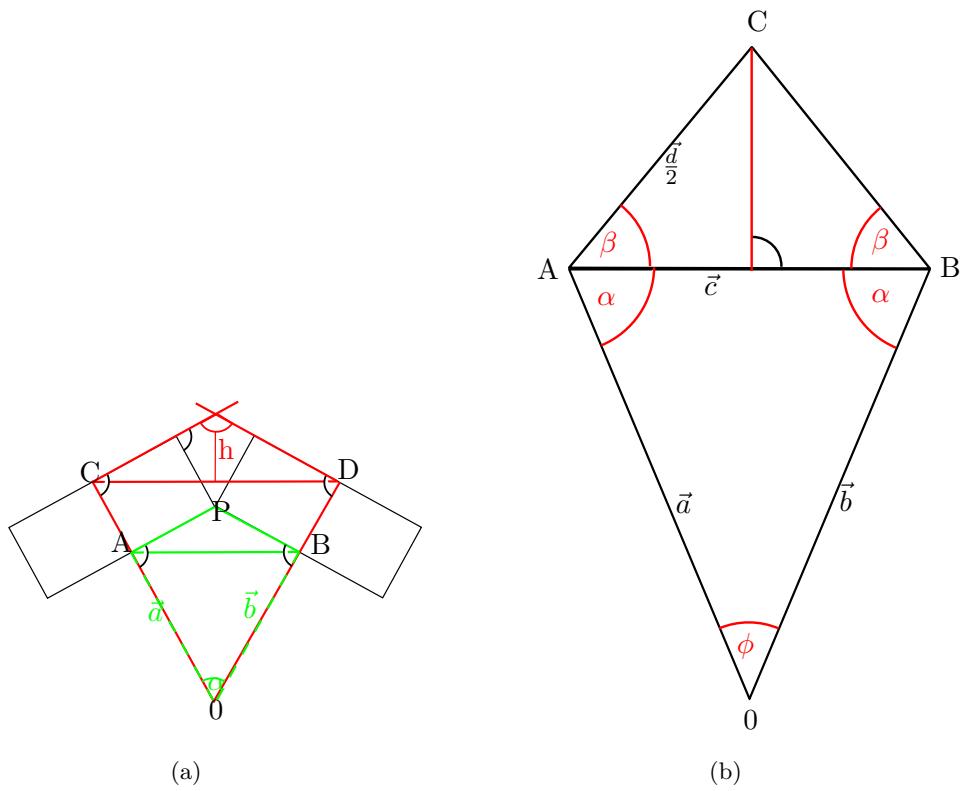
$$x' = \frac{d}{dphi} x = -rad * \sin(phi) \quad (5.8)$$

$$z' = \frac{d}{dphi} z = rad * \cos(phi) \quad (5.9)$$

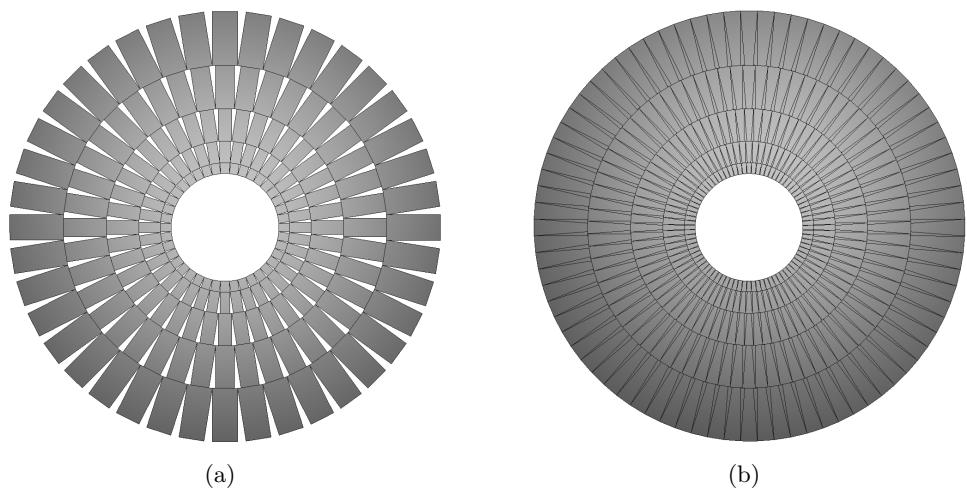
$$\vec{tn} = \frac{\text{Vector}(x', 0, z')}{|\text{Vector}(x, 0, z)|} \quad (5.10)$$

$$\vec{n\bar{n}} = \frac{\text{Vector}(x', 0, -z')}{|\text{Vector}(x, 0, -z)|} \quad (5.11)$$

Die Parameter  $len\_scale$  und  $rings$  legen die Breite und die Anzahl der Ringe um den Mittelpunkt fest. Die Ringbreite in Normalenrichtung  $ln$  wird mit jedem Ring um den Faktor  $len\_scale$  größer, wobei der erste Ring die Breite  $ln_1 = len\_scale$  und der  $n$ -te Ring die Breite  $ln_n = n \cdot len\_scale$  hat.



**Abbildung 5.3.:** 5.3(a) zeigt zwei Rechteckelemente aus dem Ring. Die grün und rot markierten Figuren sind in Abbildung 5.3(b) noch einmal dargestellt. Mit Hilfe dieser Figuren lassen sich über Dreiecksberechnungen die Längen der Rechtecke bestimmen.



**Abbildung 5.4.:** Loch Geometrie ohne und mit Überschneidungen.

Ein Problem dieser Geometrie ist jedoch, dass man grundsätzlich Löcher zwischen den einzelnen Ringelementen erhält (vgl. Abbildung 5.4(a)). Die Alternative zu den Löchern sind Überschneidungen zwischen den Ringelementen (vgl. Abbildung 5.4(b)). Um zwischen Löchern und Überschneidungen wählen zu können, gibt es den Skalierungsparameter *uber*, der zwischen null für keine und eins für totale Überschneidungen liegen sollte. Damit diese Überschneidungen zustande kommen, wird der Kreispunkt um die Länge *ln* in Normalenrichtung verschoben und wiederum über die obigen Dreiecksberechnungen der Abstand zwischen den Punkten *p* und *p + 1* bestimmt und von diesem wird dann die Länge *lt* abgezogen. Die hierdurch erhaltene Länge wird dann mit dem Parameter *uber* multipliziert um den Wert *extra* zu erhalten, der dann bei der Rechteckerstellung zu *lt* addiert wird. Der Wert *extra* wird mit den Formeln 5.4 bis 5.7 und der folgenden Formel berechnet:

$$extra = \text{uber} \cdot (d - lt) \quad (5.12)$$

Wie sich Überschneidungen und Löcher auswirken wird in Kapitel 5.2.3 gezeigt. Weiterhin gibt es noch eine zur Lochelektrode inverse runde Elektrode, die das Loch verschließen kann.

### 5.1.2. Schiefer Zylinder

Die Zylinder Geometrie basiert auf der Loch Geometrie und nutzt dieselbe Berechnung. Da jedoch ein Zylinder erstellt werden soll, wird anstelle des Normaleneinheitsvektors der kartesische Einheitsvektor in y-Richtung genutzt. Die daraus resultierende Geometrie ist in Abbildung 5.5(a) zu sehen.

Da der Pumpstutzen jedoch schräg auf dem Loch sitzt, muss auch der Zylinder gekippt werden. Hierfür wurde die bereits vorhandene Rotationsfunktion ausgenutzt, mit der sich Elektroden mit Hilfe einer Drehmatrix um einen Winkel drehen lassen. Der Nachteil ist jedoch, dass die Ebene des Zylinders mitgedreht wird und der Zylinder nicht mehr direkt am gesamten Loch ansetzt (vgl. Abbildung 5.5(b)). Die Möglichkeit dieses zu korrigieren bieten zwei neue Elektrodenfunktionen: *checkplane* und *move\_to\_plane*. Diese werden im folgenden Abschnitt beschrieben.

### 5.1.3. Erweiterung der Elektrodenklasse

Die speziellen Geometrien erfordern auch zusätzliche Funktionen in der Elektrodenklasse, mit der Elektroden manipuliert werden können. Der Zylinder nutzt die neue Methode *move\_to\_plane*, mit der die Basisebene des gekippten Zylinders in eine andere Ebene verschoben wird. Mit der *checkplane* Funktion lassen sich Elemente an einer Ebene abschneiden und die alternative Diskretisierungsmethode *discretise\_alt* diskretisiert Elektroden an einem Ende stärker als am Anderen.

#### **move\_to\_plane Funktion**

Die Funktion *move\_to\_plane(Aufpunkt)(Normalenvektor)(para1)* verschiebt die Grundebene des Zylinders, damit dieser wieder direkt am Loch ansetzt. Hierzu wird der Abstand zwischen dem Eckpunkt des Rechteckelements und der Schnittpunkt einer Geraden mit der Ebene berechnet. Die Funktion benötigt den Eckpunkt *p* des Rechtecks,

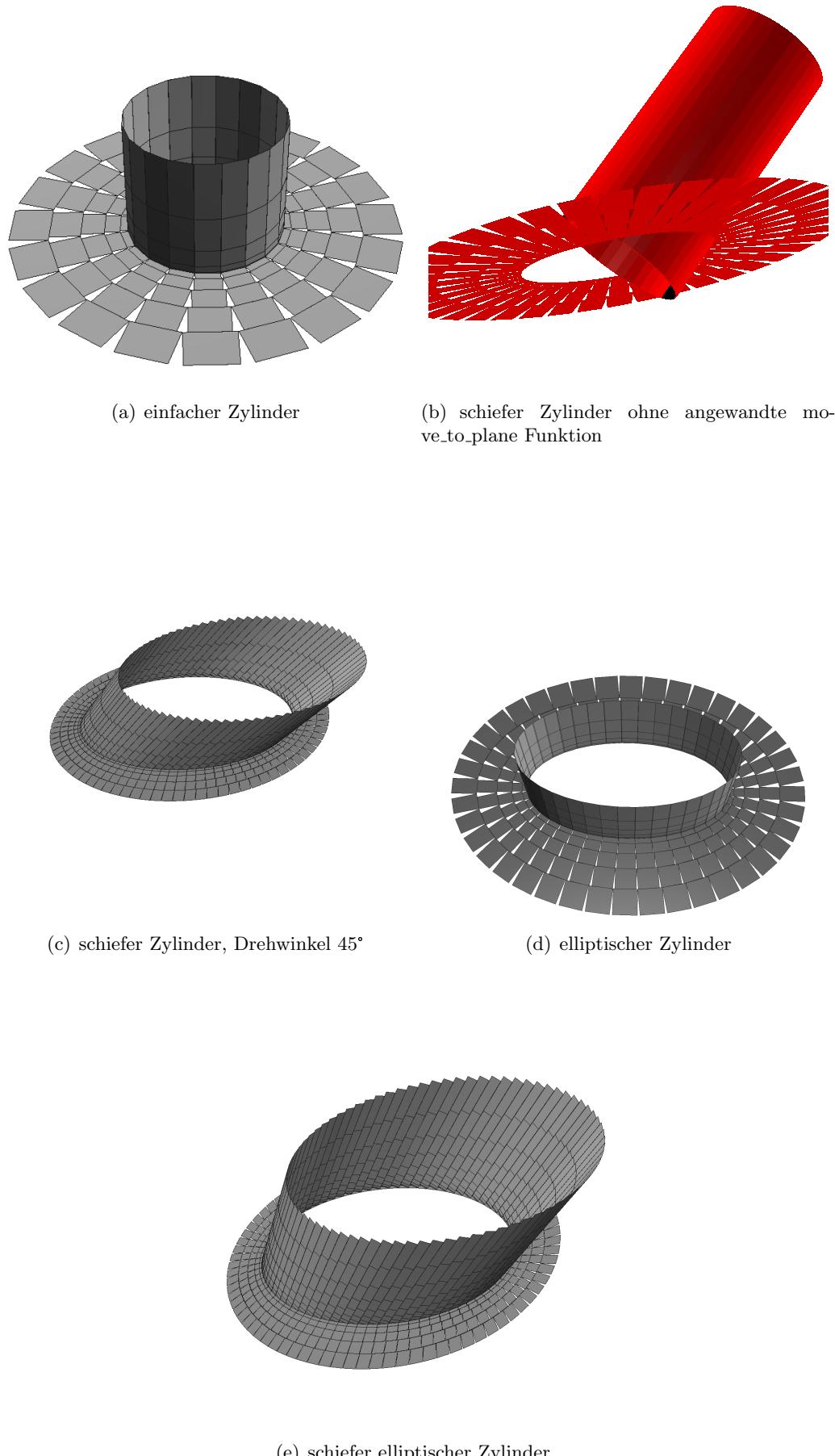


Abbildung 5.5.: Zylinder Geometrien

den Richtungsvektor  $\vec{r}_x$  für die Geradengleichung sowie einen Aufpunkt  $a$  und Normalenvektor  $\vec{n}$  für die Ebene. Den Richtungsvektor holt sich die Funktion automatisch aus dem zuvor erstellten Rechteck, daher genügt es eine 1 für den ersten oder eine 2 für den zweiten Normaleneinheitsvektor der Elektrode anzugeben. Zuerst wird der Abstand  $l$  des Eckpunktes (vgl. Formel 5.13) zur Ebene berechnet, anschließend wird der Eckpunkt mit Hilfe der Geradengleichung entsprechend verschoben (Formel 5.14)

$$l = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{\vec{n} \cdot \vec{r}_x} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{\vec{n} \cdot \vec{r}_x} \quad (5.13)$$

$$\vec{p}' = \vec{p} + l \cdot \vec{r}_x. \quad (5.14)$$

Das Ergebnis dieser Verschiebung ist in Abbildung 5.5(c) dargestellt.

### Die `checkplane` Funktion

Mit der Funktion `checkplane(Aufpunkt)(Normalenvektor)` schneidet Elektroden an einer Ebene ab. Mit Hilfe der vier Eckpunkte der Elektrode wird geprüft, ob die Elektrode unter, in oder über der angegebenen Ebene liegt. Liegen die vier Eckpunkte der Elektrode beziehungsweise deren Subelemente nicht in oder über der Ebene, so wird dieses Element verworfen.

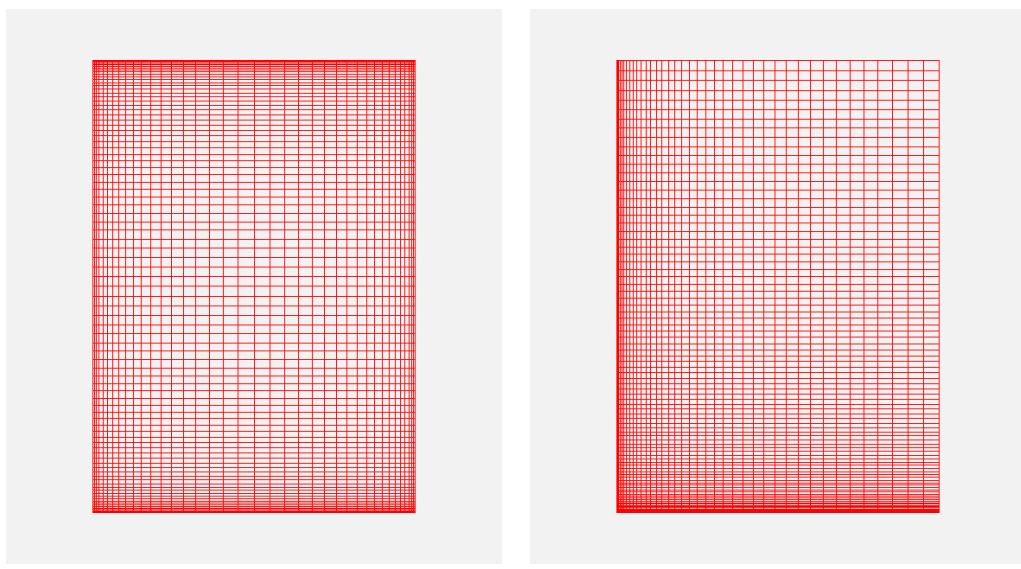
### Alternative Diskretisierung

Zusätzlich wurde eine alternative Diskretisierungsmethode implementiert. Im späteren Setup ist der Zylinder mit Lochplatte eine Seitenwand des Spektrometers. Da nur das elektrische Feld im Inneren des Spektrometers und somit am Ansatzpunkt des Zylinders interessiert, jedoch nicht das andere Ende, genügt es, wenn der Zylinder am Ansatzpunkt stärker diskretisiert ist als am anderen Ende. Mit der bisherigen Methode war dies nicht möglich, da beide Enden gleich stark und der Mittelteil weniger stark diskretisiert wurden. Die bisherige Diskretisierungsmethode berechnete die Länge der einzelnen Teile über die halbe Gesamtlänge und die halbe Anzahl der Subelemente, gab diesen Array sowie einen umgedrehten Array zurück, damit erhielt man die Gesamtanzahl der Subelemente.

Die neue Methode ist letztendlich eine vereinfachte Version der ursprünglichen Diskretisierungsmethode und berechnet die Längen der einzelnen Subelemente über die Gesamtlänge und die gesamte Anzahl der Teile. Diese Methode lässt sich genauso wie die ursprüngliche Methode mit `electrode.discretize_alt` nutzen. Ein grafischer Vergleich beider Methoden ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

## 5.2. Erste Tests: Plattenkondensator

Bevor diese neuen Geometrien im KATRIN Setup verwendet werden können, muss herausgefunden werden, wie sich die einzelnen Parameter auf das Ergebnis auswirken. Hierzu wird ein Plattenkondensator mit einem Loch verwendet. Dieser Plattenkondensator lässt sich in elcd3\_2 genau berechnen, da die runden Platten rotationssymmetrisch



**Abbildung 5.6.:** Gegenüberstellung der beiden Diskretisierungsmethoden.

dargestellt werden können. Diese Geometrie kann man dann als Grundlage für Vergleiche mit der elcd3\_3 Geometrie verwenden.

Beide Geometrien bestehen aus jeweils einer Platte mit Loch und einer Platte ohne Loch. Für elcd3\_2 werden runde Platten mit einem Durchmesser von 7 Metern genutzt, in elcd3\_3 ist die Größe der Platte mit Loch von der Anzahl der Ringe und der Ringbreite abhängig. Die zweite Platte ist eine rechteckige Platte mit einer Kantenlänge von 7 Metern,. Die Platte mit Loch hat ein Potential von 9000 V, während die andere Platte auf 0 V liegt. Der Abstand zwischen beiden Platten beträgt 0,3 m und das Loch hat einen Durchmesser von einem Meter. Bei anderen Plattengrößen, Potentialen und Lochgrößen erhält man vergleichbare Werte, hier werden jedoch nur die Berechnungen mit den oben genannten Werten aufgeführt.

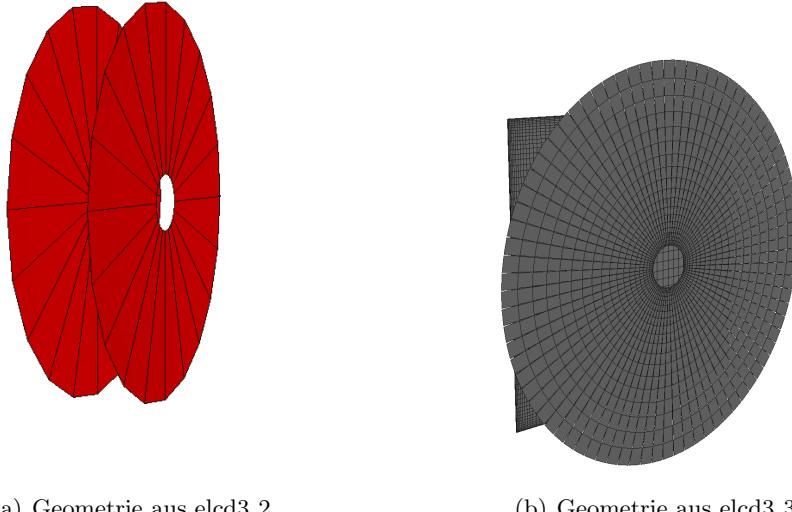
Die Diskretisierung der rechteckigen Platte in elcd3\_3 beträgt in beide Richtungen 60 Elemente, insgesamt somit 3600 Elemente. Die runde Platte wird durch die Faktoren *len\_scale*, *nrot* und *rings* diskretisiert. Die runden Platten in elcd3\_2 sind jeweils mit derselben Anzahl an Elementen diskretisiert.

Beide Geometrien sind in Abbildung 5.7 dargestellt.

### 5.2.1. Vergleich mit elcd3\_2

Im Gegensatz zu elcd3\_3 kann elcd3\_2 die Geometrie eines runden Plattenkondensators exakt berechnen. Hierfür wurden mehrere Berechnungen mit unterschiedlichen Diskretisierungen durchgeführt, die Ergebnisse sind in Abbildung 5.8 dargestellt. Beide Platten werden mit denselben Parametern diskretisiert. Das angegebene Potential ist dabei das Potential 5 cm unterhalb der Platte mit Loch.

Auch hier sind im Graphen mit dem Gesamtpotential keine Abweichungen erkennbar, daher wird die Potentialdifferenz zur am stärksten diskretisierten Platte (100/100) in



**Abbildung 5.7.:** Darstellung der Geometrien aus elcd3\_2 und elcd3\_3, für die Grafik wurde der Abstand zwischen den Platten auf 1,3 Meter gesetzt.

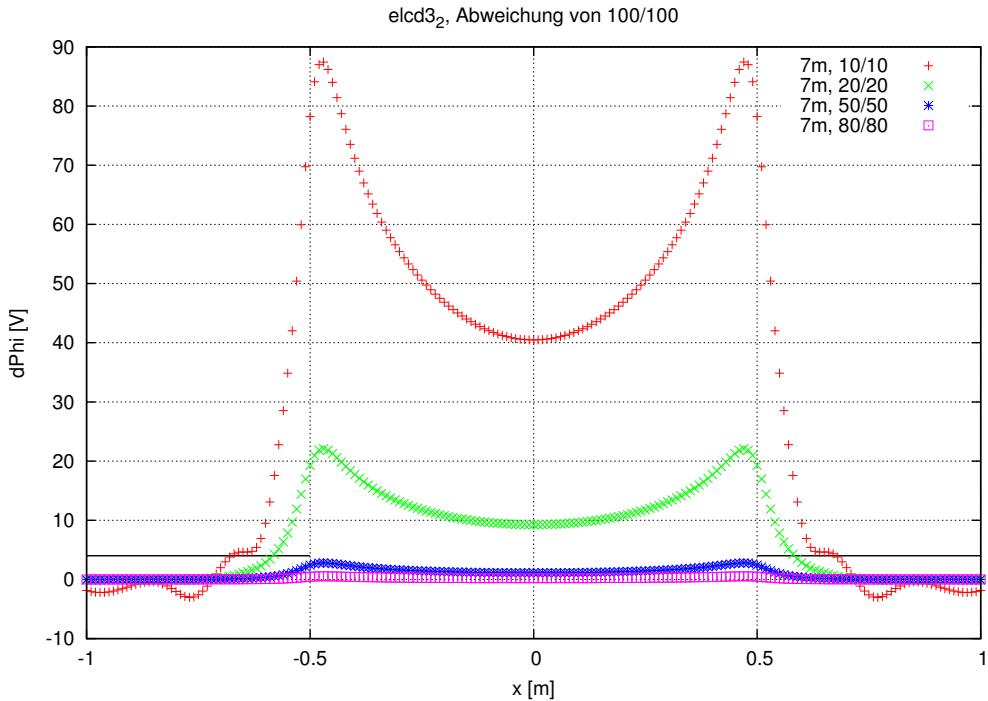
Abbildung 5.8 dargestellt. Wie zu erwarten war, sind die größten Abweichungen am Lochrand von maximal 90 Volt zu erkennen, dies entspricht einer Abweichung von 1,29% bei 7000 Volt an dieser Stelle. Bei einer Diskretisierung von jeweils 80 Elementen pro Platte beträgt die Abweichung nur noch maximal 0,5 Volt.

Die Simulation mit einer Diskretisierung von 100 Elementen wird im Folgenden als Referenzsimulation für den Vergleich mit den elcd3\_3 Simulationen genutzt. In diesem Abschnitt wird nur der elcd3\_3 Vergleich mit der Anzahl der Ringelemente *nrot* und der Ringbreite *len\_scale* diskutiert, die Überschneidungen folgen in Abschnitt 5.2.3.

Abbildung 5.9 zeigt den Vergleich der elcd3\_3 Simulationen mit den Genauen aus elcd3\_2. Der Parameter *nrot* verschiebt das Potential um wenige Volt, so beträgt die Potentialabweichung in der Lochmitte 70 Volt (1,75%) bei 40 Elementen, bei 320 Elementen jedoch nur noch 58 Volt (1,45%).

Betrachtet man den Parameter *len\_scale* (Abb. 5.9(b)), so sieht man deutlich größere Unterschiede im Potential. In der Lochmitte erhält man bei einer Ringbreite des ersten Rings von 0,05 m eine Abweichung von 136 V (1,75%) und am Lochrand eine Abweichung von 155 V (2,21%). Beide Abweichungen lassen sich minimieren, indem man die Ringbreite verringert. Ein weiterer Effekt der Ringbreite ist die Wellenform des Potentials zwischen den beiden Platten, so ist die Breite der Wellenberge abhängig von der Breite der Ringe.

Breite Wellenberge sind ein Anzeichen dafür, dass die Geometrie nicht ausreichend genug diskretisiert ist. Mit einer kleineren Ringbreite lässt sich das Potential genauer berechnen, da die Geometrie in mehr Subelemente unterteilt ist und die Ladungsdichteverteilung genauer berechnet werden kann.



**Abbildung 5.8.:** Potentialdifferenz eines runden Plattenkondensators mit Loch in elcd3\_2 für verschiedene Diskretisierungen im Vergleich zur Diskretisierung mit 100/100 Elementen.

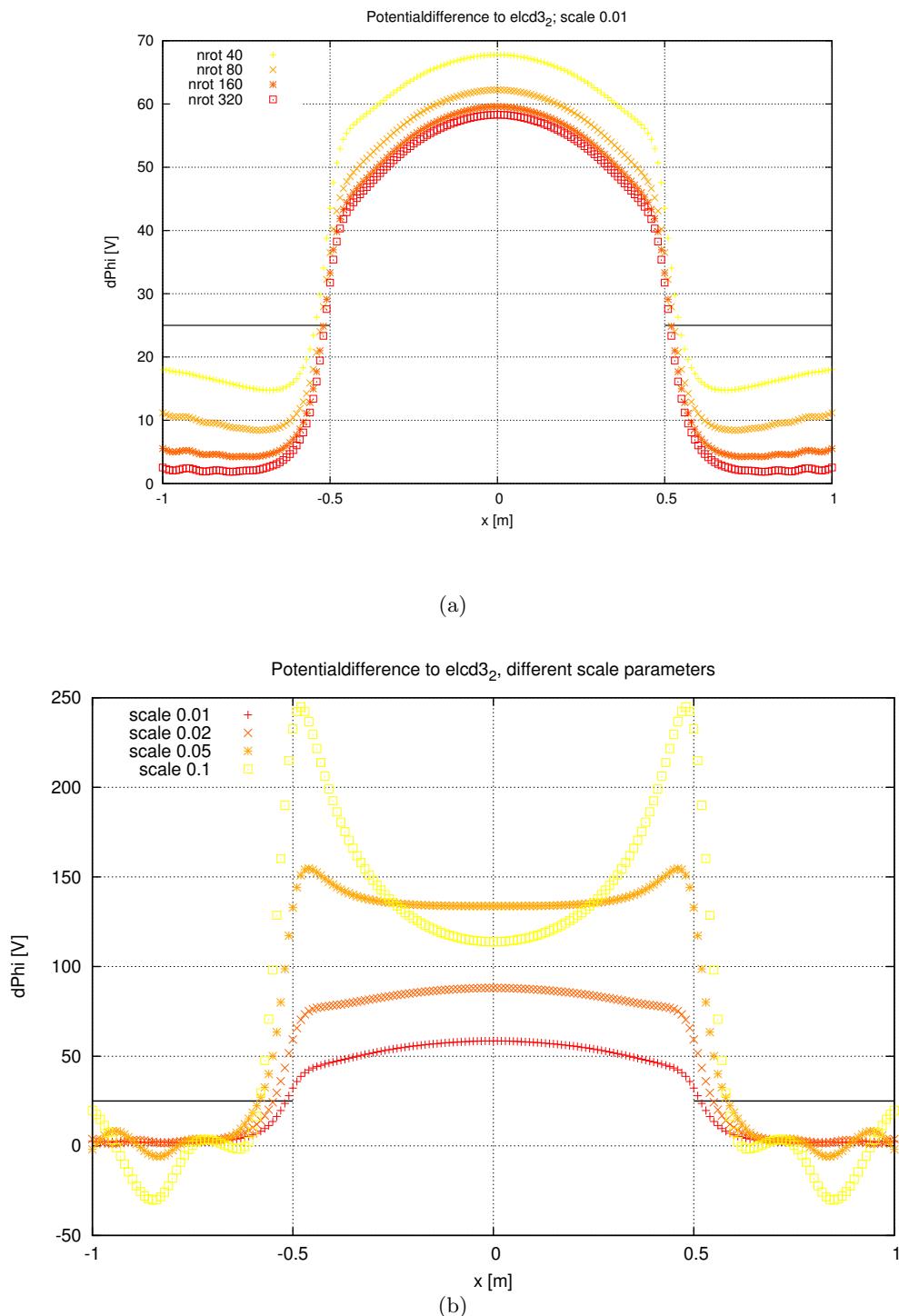
### 5.2.2. Vergleich innerhalb von elcd3\_3

Bei der neuen Geometrie in elcd3\_3 müssen mehrere Faktoren für Vergleiche berücksichtigt werden: dies sind die Angabe *nrot* mit der Anzahl der Ringelemente, der Skalierungsparameter *len\_scale* und zum Schluss auch noch der Parameter *uber* mit dem die Länge *ln* multipliziert wird, um Überschneidungen zu erhalten. Die Überschneidungen werden in Abschnitt 5.2.3 genauer diskutiert. Dieser Abschnitt konzentriert sich auf der Parameter *nrot* und *len\_scale*. Das Potential wurde jeweils 0,05 m unter der oberen Platte mit Loch bestimmt.

#### Ringelemente *nrot*

Die Anzahl der Ringelemente *nrot* legt fest, aus wievielen Rechtecken ein Ring aufgebaut sein soll. Je mehr Elemente der Ring nutzt, desto genauer wird der Kreis approximiert. Durch die höhere Anzahl an Elementen erhöht sich aber auch die Rechenzeit und der Speicherverbrauch, daher muss man feststellen, wieviele Elemente sinnvoll genutzt werden können. Die gezeigten Simulationen wurden bei einer Ringbreite des ersten Rings von *len\_scale* = 0,01 m durchgeführt.

Abbildung 5.10(a) zeigt das Potential innerhalb des Plattenkondensators bei einer unterschiedlichen Anzahl an Ringelementen. Berechnet man das Potential eines einfachen Plattenkondensators bei einem Abstand von 5 cm zur geladenen oberen Platte, so erhält man ein Potential von 7500 Volt. Bereits bei einem Abstand von 50 cm zum



**Abbildung 5.9.:** Abbildung (a) zeigt die Potentialdifferenz zum Referenzpotential aus elcd3\_2 des Plattenkondensators bei verschiedenen Ringelementen, len\_scale beträgt hier 0,01 m, (b) zeigt die Abweichung des Potentials verschiedener Ringbreiten. Der Ring besteht aus 160 Elementen.

Lochrand erhält man das erwartete Potential von 7500 Volt. Allerdings sind auf dem Plot keine Abweichungen zwischen den Ringelementen zu sehen. Daher zeigt Abbildung 5.10(b) die Abweichung bei 40, 80 und 160 Ringelementen zu 320 Ringelementen. Nun betrachtet man die Potentialabweichungen an drei verschiedenen Stellen: in der Lochmitte, am Lochrand und zwischen den beiden Platten. In der Lochmitte beträgt das Potential nur noch 4000 Volt und am Lochrand etwa 7000 Volt.

Innerhalb des Loches erhält man bei 40 Ringelementen eine Abweichung von 10 V, dies entspricht bei den vorhandenen 4 kV einer prozentualen Abweichung von 0,25%. Um diese Abweichung zu verringern, kann man die Anzahl der Ringelemente vergrößern, so erhält man bei 160 Ringelementen nur noch eine Abweichung von 1,5 V (0,04%).

Auch an den anderen beiden Stellen lässt sich dieser Effekt beobachten, am Lochrand lässt sich die Abweichung von 13 Volt auf 2 Volt und zwischen den Platten von 17 Volt auf 6 Volt verringern, jeweils bei 160 Ringelementen.

Weiterhin fällt auf, dass die Abweichung nach außen hin größer wird und eine Wellenform aufweist. Dieser Effekt hängt in erster Linie mit den Ringbreiten zusammen und wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

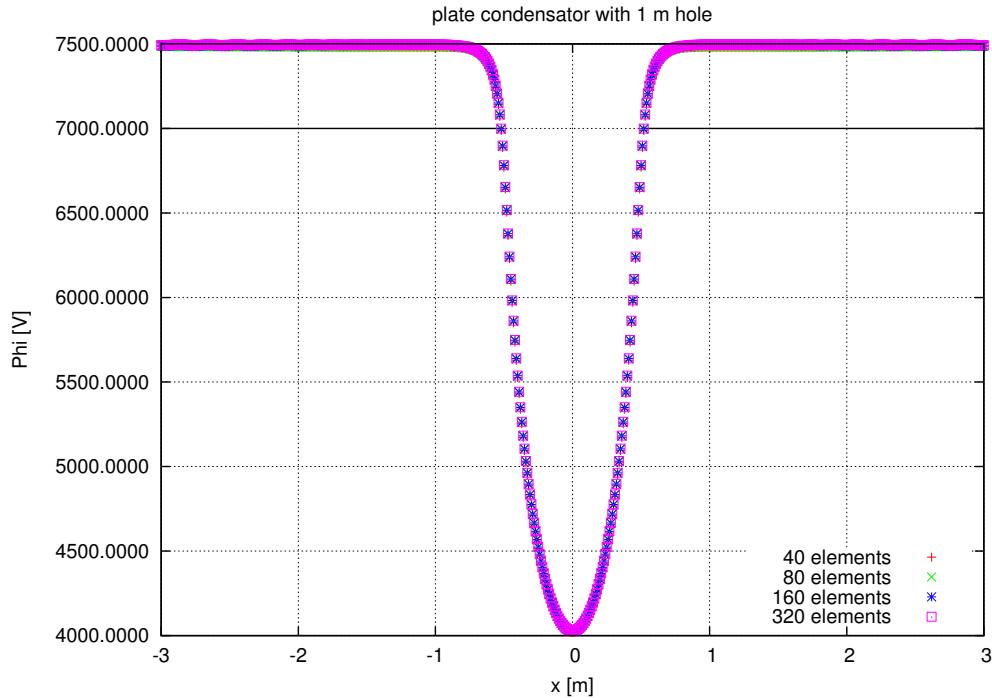
### **Ringbreite *len\_scale***

Neben der Anzahl der Ringelemente *nrot* wirkt sich auch die Ringbreite auf das Potential im Kondensator aus. In Abbildung 5.11 ist die Potentialdifferenz zu einer Rechnung mit einer Ringbreite im ersten Ring von *len\_scale* = 0,01 m bei 320 Ringelementen dargestellt, bei einer Ringbreite von 0,1 m erhält man am Lochrand eine Abweichung von 210 Volt, dies entspricht wiederum einer prozentualen Abweichung von 3%. Im Inneren des Loches beträgt das vorhandene Potential etwa 4000 Volt, die Differenz von 58 Volt an dieser Stelle entspricht dann 1,45%.

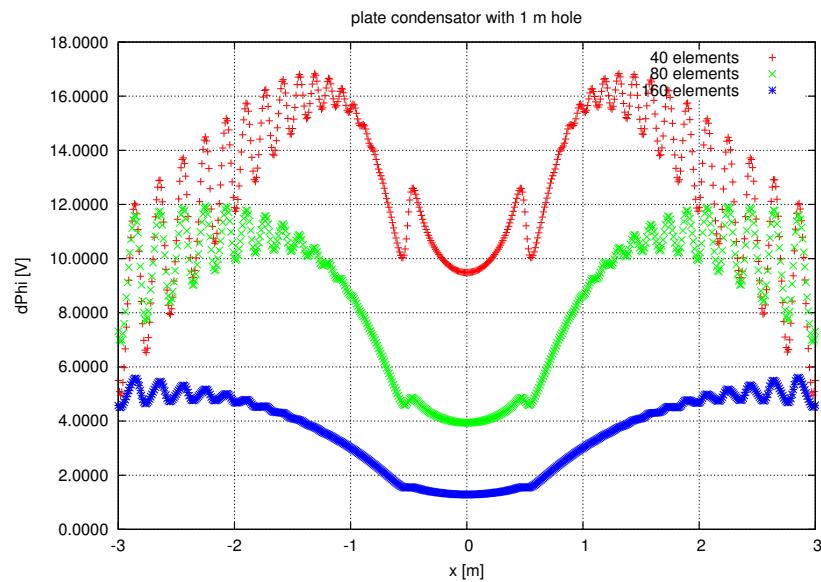
Senkt man die Ringbreite des ersten Rings auf 0,02 Meter, so erhält man eine Abweichung von 27 Volt am Lochrand, dies entspricht dann 0,39%. Innerhalb des Lochs unterscheidet sich die Abweichung kaum noch von der am Lochrand, sie beträgt in der Lochmitte 30 Volt, da das Potential hier geringer ist, liegt die prozentuale Abweichung bei 0,75%. Auch hier ist wiederum eine Wellenform zwischen den Platten zu erkennen. Der Faktor *len\_scale* ist auch die Ursache der Wellenform des Potentials zwischen den beiden Kondensatorplatten. Je größer man diesen Faktor wählt, desto schlechter ist die Diskretisierung und somit die Genauigkeit der Berechnung. Dieser Faktor definiert somit die Amplitude und die Breite eines einzelnen Wellenberges.

Die Vergleiche innerhalb von elcd3\_3 zeigen, dass die Ringbreite einen größeren Einfluss als die Anzahl der Ringelemente hat, allerdings sollte auch der Parameter *nrot* nicht zu gering gewählt werden. Verringert man die Anzahl der Elemente von 320 auf 160 pro Kreisring, so erhält man eine Abweichung von 4 V. Wird jedoch der Parameter *len\_scale* von 0,01 m auf 0,02 Meter erhöht, so erhält man eine Abweichung von 80 V. Während der Parameter *len\_scale* sich vor allem auf das Potential innerhalb des Lochs und den Rand auswirkt, hat *nrot* einen größeren Einfluss auf den Bereich zwischen den beiden Platten. Tabelle 5.1 listet noch einmal die Potentialdifferenzen für *nrot* und *len\_scale* auf.

Betrachtet man die Vergleiche, so zeigt sich, dass die Anzahl der Ringelemente mindestens 160 betragen sollte und die Ringbreite maximal 0,01 Metern betragen darf,

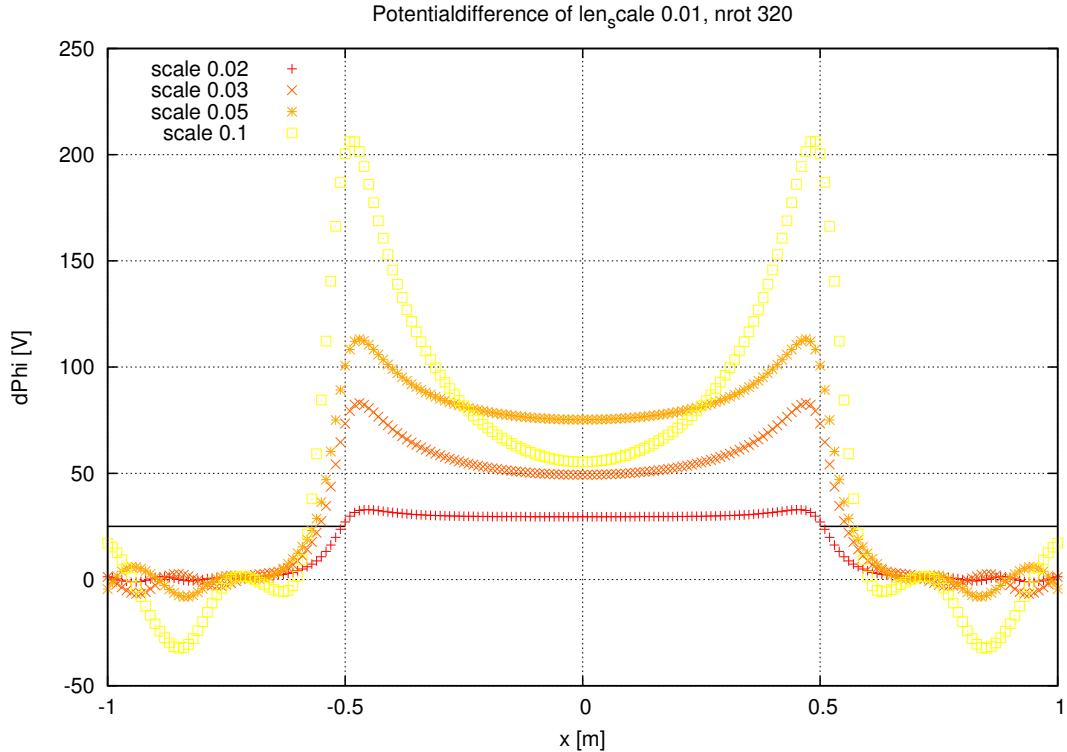


(a) Absolutpotential im Plattenkondensator bei verschiedenen Ringelementen, die x-Achse ist parallel zu den Kondensatorplatten. Die eingezeichneten waagerechten Striche zeigen den Lochrand an.



(b) Potentialabweichung von 320 Ringelementen bei Änderung des *nrot* Parameters

**Abbildung 5.10.:** Abbildung (a) zeigt das Absolutpotential des Plattenkondensators bei verschiedenen Ringelementen, (b) zeigt die Abweichung des Potentials verschiedener Ringelemente von 320 Ringelementen.



**Abbildung 5.11.:** Abweichung von einer Ringbreite von 0,01 Metern, verschiedene Ringbreiten.

da sonst die Abweichungen zu groß werden. Der limitierende Faktor ist hier der Arbeitsspeicher des Computers. Da die meisten Simulationen auf einem Cluster mit 2 GB Arbeitsspeicher pro Node durchgeführt wurden, liegt die Grenze für die Anzahl der unabhängigen Elemente bei etwa 18000. Wechselt man vom Cluster zur Nubase, einem Computer mit 16 GB Arbeitsspeicher, so kann man Simulationen mit bis zu ca. 50000 unabhängige Elemente rechnen lassen.

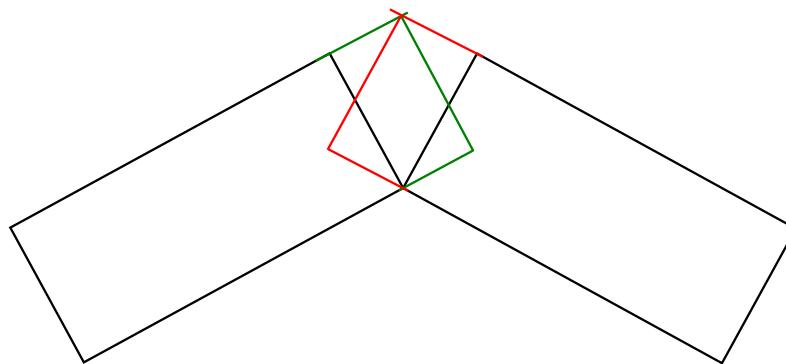
### 5.2.3. Überschneidungen

Neben den Parametern *nrot* und *len\_scale* muss auch der Faktor *uber* für Überschneidungen berücksichtigt werden. Mit Hilfe des Parameters *uber* wird angegeben, wie die

<i>nrot</i>		<i>len_scale</i>	
40	13 V	0,02 m	27 V
80	5 V	0,04 m	75 V
160	1,5 V	0,05 m	100 V
		0,1 m	200 V

**Tabelle 5.1.:** Potentialabweichungen durch die Parameter *len\_scale* und *nrot* im Plattenkondensator für Berechnungen innerhalb von *elcd3\_3*.

einzelnen Elemente überlappen. Setzt man  $uber = 0$ , so berühren sich die einzelnen Elemente nur an den Ecken und man erhält Löcher zwischen den Elementen im Ring, mit  $uber = 1$  sind keine Löcher mehr vorhanden, dafür ist der Überlapp zwischen den Elementen maximal. Dies ist in Abbildung 5.12 einmal grafisch dargestellt, die beiden farbigen Rechtecke erhält man zusätzlich bei einem maximalen Überlapp. In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse mit verschiedenen Überlappwerten und deren Auswirkungen diskutiert, im folgenden Abschnitt wird dann auf die mathematischen Auswirkungen der Überlappung auf die Boundary Element Methode eingegangen. Wie bereits in den vorherigen Abschnitten wird auch hier das Potential zwischen den Platten in einem Abstand von 0,05 Meter zur Platte mit Loch betrachtet.

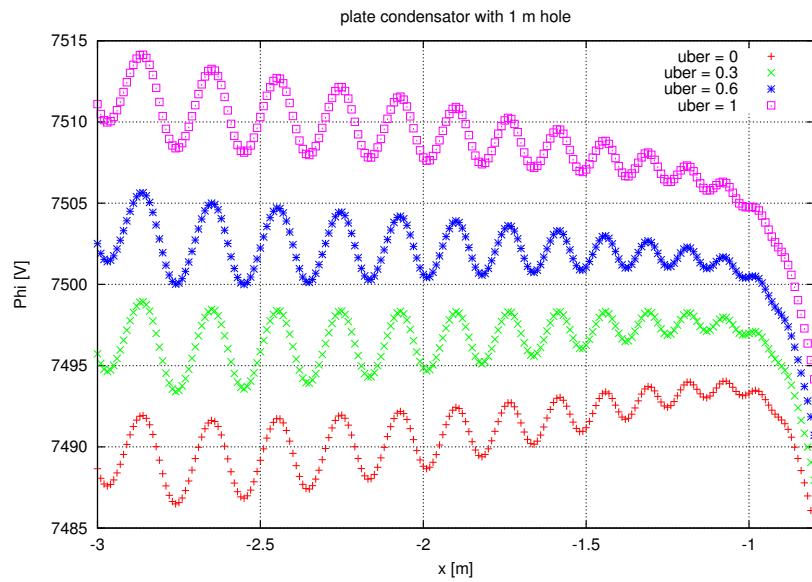


**Abbildung 5.12.:** Der Parameter  $uber$  bestimmt die Überlappung zwischen zwei Ringelementen. Ist  $uber = 0$ , so berühren sich die beiden Elemente nur an den beiden unteren Ecken, dies sind die schwarzen Rechtecke. Bei einem Wert von  $uber = 1$  erhält man zusätzlich die beiden farbigen Rechtecke und erhält einen Überlapp.

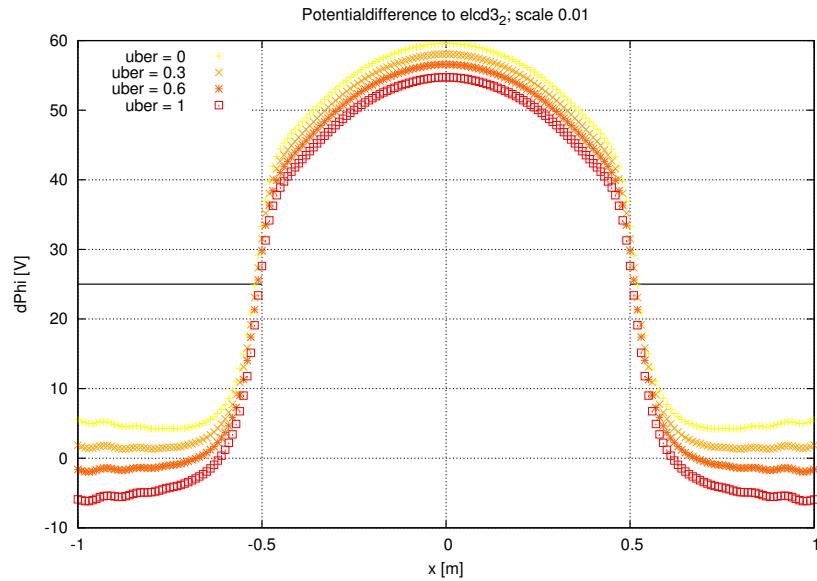
Den größten Effekt haben die Überlappungen zwischen den beiden Kondensatorplatten. Als Auswirkung des Überlapps verschiebt sich das Potential. Zwischen den Platten erwartet man mit den Formeln zu einem einfachen Plattenkondensator ein Potential von 7500 Volt, das tatsächliche Potential hängt jedoch von der Größe des Überlapps ab. Ist kein Überlapp vorhanden, so ist das Potential im Mittel geringer als das erwartete Potential, wird der Überlapp erhöht, so nimmt auch das Potential zu. Bei einer totalen Überschneidung von  $uber = 1$  ist das vorhandene Potential im Mittel höher als das erwartete Potential. Dies entspricht auch den Erwartungen zum Überlapp (vgl. 5.2.4). Diese Abhängigkeit des Potentials in elcd3\_3 ist in Abbildung 5.13(a) dargestellt, die zweite Abbildung 5.13(b) zeigt diese Verschiebung zum Potential in elcd3\_2.

Um diesen Effekt zu verringern, hat man verschiedene Optionen:

1. die Anzahl der Ringelemente  $nrot$  erhöhen,
2. die Ringbreite  $len\_scale$  verringern und
3. den Wert für  $uber$  optimieren.



(a)



(b)

**Abbildung 5.13.:** Abbildung (a) zeigt das Potential zwischen den Kondensatorplatten bei verschiedenen Überlappen, (b) zeigt die Abweichung des Potentials der Simulationen zu den elcd3\_2 Simulationen, die Anzahl der Ringelemente beträgt 160 und die Ringbreite 0,01 m.

Erhöht man die Anzahl der Ringelemente, so erhält man jedoch wieder mehr Gesamt-elemente. Dasselbe gilt für die Ringbreite, bei einer geringeren Ringbreite benötigt man mehr Ringe und somit auch wieder mehr Elemente. Bei beiden Optionen wird mehr Arbeitsspeicher und Rechenzeit benötigt, die Genauigkeit wird jedoch deutlich erhöht. Die Verringerung der Ringbreite hat auch den Vorteil, dass die Wellenstruktur zwischen den Platten aufgrund der höheren Diskretisierung verringert wird.

Gleichzeitig sollte man aber auch die dritte Option beachten und einen optimalen Wert für den Überlappparameter  $uber$  finden. Den Abbildungen 5.13 zufolge, liegt dieser Wert bei etwa  $uber = 0,5$ , bei diesem Wert sind die Flächen von Überlapp und dem Loch zwischen den Elementen in etwa gleich groß. Wie genau dieser jedoch sein muss, lässt sich durch Überlegungen zu den Auswirkungen des Überlapps bei der Boundary Element Methode herausfinden.

Betrachtet man noch einmal Abbildung 5.13(b), so stellt man fest, dass innerhalb des Lochs noch eine Potentialdifferenz von 50 V existiert, die sich nicht mit dem Überlapp erklären lässt. Dies deutet darauf hin, dass die Geometrie noch fehlerhaft ist.

#### 5.2.4. Die Boundary Element Methode und Überschneidungen

Auch bei den bisherigen Simulationen des Hauptspektrometers existieren im Konusbereich kleine Überlapp, da ein Konus durch eine Vielzahl von Rechtecken approximiert werden muss. Allerdings ist der Überlapp bei der Anzahl an Elementen so gering, dass er bislang nicht beachtet und somit auch nicht untersucht wurde. Wie Abschnitt 5.2.3 zeigt, muss dieser jedoch bei den hier vorgestellten Geometrien beachtet werden, da er hier deutlich größer ist.

In diesem Abschnitt wird noch einmal auf die in Kapitel 4 vorgestellte Boundary Element Methode eingegangen und die Auswirkungen des Überlapps werden erklärt.

Die runde Elektrode wird in mehrere Subelemente mit gleichem Potential unterteilt. Das Potential  $U_i$  im Mittelpunkt eines Elementes  $i$  ist dann

$$U_i = \sum_j \Phi_{ij} \quad (5.15)$$

dabei ist  $\Phi_{ij}$  der Potentialbeitrag der durch das Element  $j$  im Mittelpunkt von  $i$  erzeugt wird (vgl. Formel 4.4):

$$\Phi_{ij} = \frac{\sigma_j}{4\pi\epsilon_0} \int d^2 r_j \frac{1}{|r_j - r_i|} \equiv \sigma_j k_{ij} \quad (5.16)$$

Um den Potentialbeitrag des Elements  $j$  zu erhalten, wird über die komplette Fläche des Elements  $j$  mit der Ladungsdichte  $\sigma_j$  integriert, da angenommen wird, dass die Ladungsdichte über die gesamte Oberfläche des Elements konstant ist. Um nun auch die Potentialbeiträge der weiteren Elemente zum Element  $i$  zu erhalten, summiert man über alle Potentialbeiträge und erhält ein Gleichungssystem:

$$U_i = \sum_{j=1}^N \Phi_{ij} = \sum_{j=1}^N \sigma_j k_{ij} \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow U = K\sigma \quad (5.18)$$

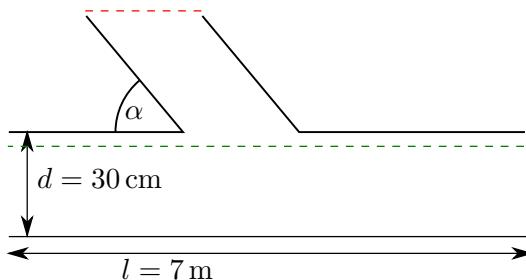
Dabei ist die Matrix  $K = (k_{ij})$  und von der bekannten Elektrodengeometrie abhängig. Weiterhin ist das Potential bekannt und die Oberflächenladungsdichte  $\sigma$  lässt sich über eine Matrixinversion berechnen. Da man an den elektrischen Potentialen und Feldern interessiert ist, summiert man über alle Oberflächenladungsdichten

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sigma_i \int d^2 r_i \frac{1}{|r - r_i|}. \quad (5.19)$$

Für den Überlapp von entscheidender Bedeutung ist die Integration über die gesamte Oberfläche mit anschließender Summation über die Beiträge aller Elemente. Da jedoch der Überlapp ein Teil von zwei Elementen ist, trägt der überschneidende Teil doppelt zum Potential bei. Die Folge ist ein zu hoher Potentialbeitrag bei Überlappungen und ein zu geringer Beitrag bei Löchern. Um nun einen im Mittel korrekten Potentialbeitrag zu erhalten, müssen die Flächen des Überlapps und der Löcher gleich sein, falls sich die berechneten  $\sigma_j$  nicht ändern.

### 5.2.5. Auswirkungen eines Zylinders

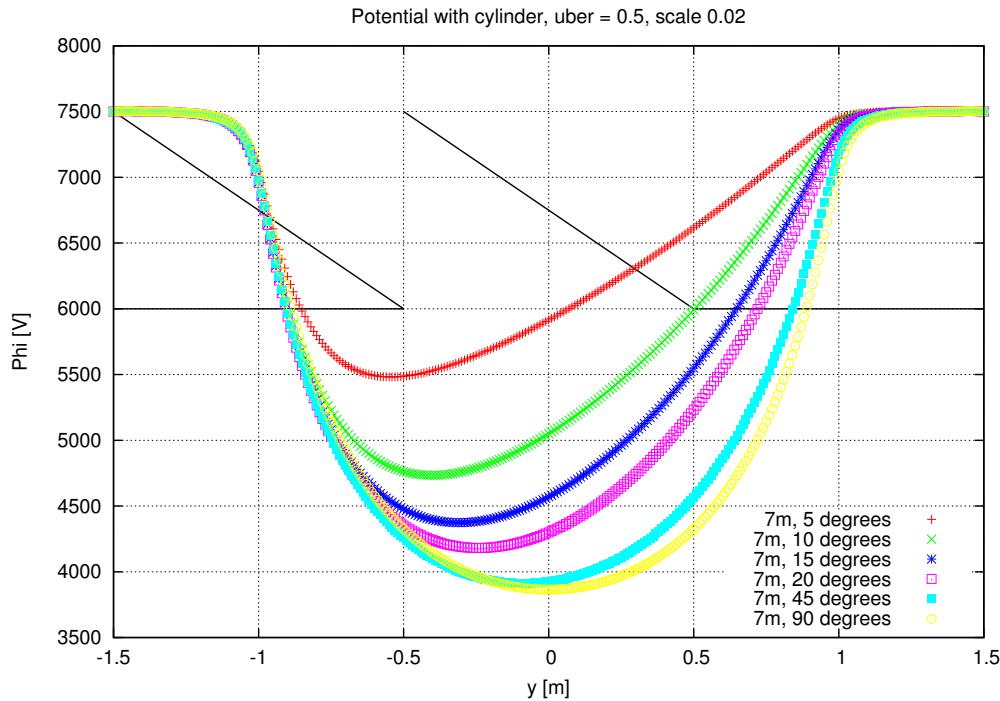
In den bisherigen Betrachtungen war noch kein Zylinder in der Geometrie enthalten. Der Pumpstutzen ist jedoch ein langer Zylinder, der direkt an den Pumpport anschließt und somit auch einen Einfluss auf das Potential innerhalb des Ports hat. Um die grundsätzlichen Auswirkungen eines solchen Zylinders zu analysieren, wurde die bisherige Geometrie eines Plattenkondensators um den Zylinder erweitert. Dieser schließt sich direkt an das Loch an und lässt sich mit verschiedenen Winkeln kippen. Die Geometrie ist in Abbildung 5.14 dargestellt. Weiterhin nutzt der Zylinder die alternative Diskretisierungsmethode, da nur das Potential im Plattenkondensator (grün gestrichelte Linie), jedoch nicht am anderen Ende des Zylinders (rot gestrichelte Linie) untersucht werden soll. Wie die Platte mit Loch des Kondensators beträgt auch das Potential des Zylinders 9000 Volt.



**Abbildung 5.14.:** Geometrie des Plattenkondensators mit Zylinder. Die grüne Linie stellt den Bereich dar, in dem das Potential berechnet wurde. Die rote Linie deutet den Bereich an, in dem das Potential nicht von Interesse ist.

Die Ergebnisse dieser Simulationen sind in Abbildung 5.15 dargestellt, mit eingezzeichnet ist die Geometrie der oberen Platte und des Zylinders. Ein senkrechter Zylinder (90°) vergrößert noch einmal den Potentialdurchgriff zwischen Loch und Plattenkondensator um etwa 150 Volt. Wird nun der Zylinder gekippt, so steigt auf der einen Seite

der Einfluss der Wand des Zylinders und das Potential fällt nicht so schnell ab. Ein weiterer Effekt der Wand ist, dass der Potentialdurchgriff an sich auch geringer wird. Das Potentialminimum verschiebt sich auch in Richtung der Kante mit weniger Einfluss der Zylinderwand. Der Winkel zwischen Hauptspektrometer und Pumpstutzen beträgt  $22,27^\circ$ .



**Abbildung 5.15.:** Potential eines runden Plattenkondensators mit Loch und einem Zylinder bei verschiedenen Kippungswinkeln in elcd3\_3.

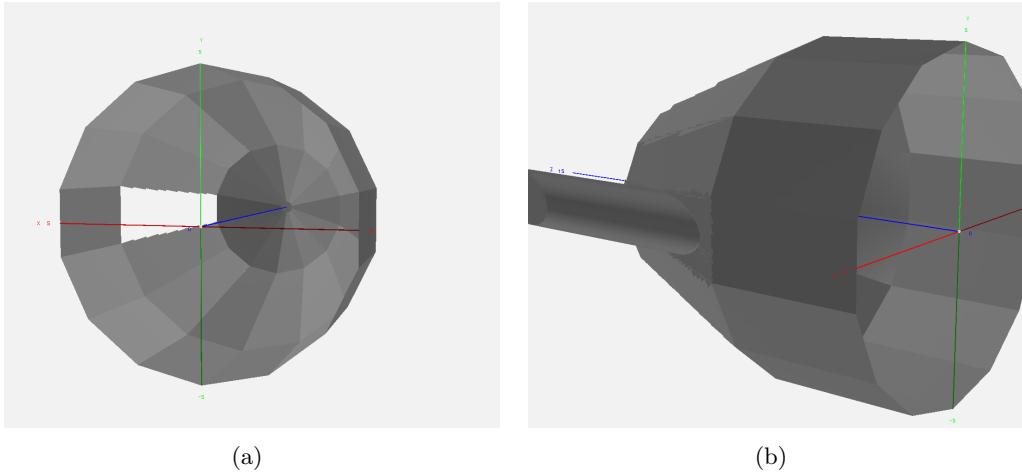
Für die Simulationen des Hauptspektrometers bedeutet dies, dass der Zylinder nicht vernachlässigbar ist und einen wichtigen Einfluss auf das Potential im Pumpportbereich hat. Alle bisherigen Simulationen zeigen auch, dass der Pumpport auch über seine Grenzen hinaus einen Einfluss auf das Potential hat. Der Übergang vom Pumpport zur Spektrometerwand muss auch genau untersucht werden.

### 5.3. Hauptspektrometer mit Pumpport

Im Hauptspektrometer wird der Pumpport einen ähnlichen, aber nicht so großen Einfluss haben wie bei einem Plattenkondensator. Zum Einen wird der Port noch durch die Drahtelektrode abgeschirmt, weiterhin ist die Groundelektrode wesentlich weiter vom Pumpport entfernt als die 0 V Platte im Kondensator und hat dadurch einen wesentlich geringeren Einfluss auf das Potential.

Um die neue Pumpportgeometrie nun in die Hauptspektrometergeometrie einzubauen, werden der Zylinderteil und die beiden Konen durch jeweils 13 Platten ersetzt. Die Anzahl der Platten berechnet sich dabei über die Lochbreite durch den Umfang des

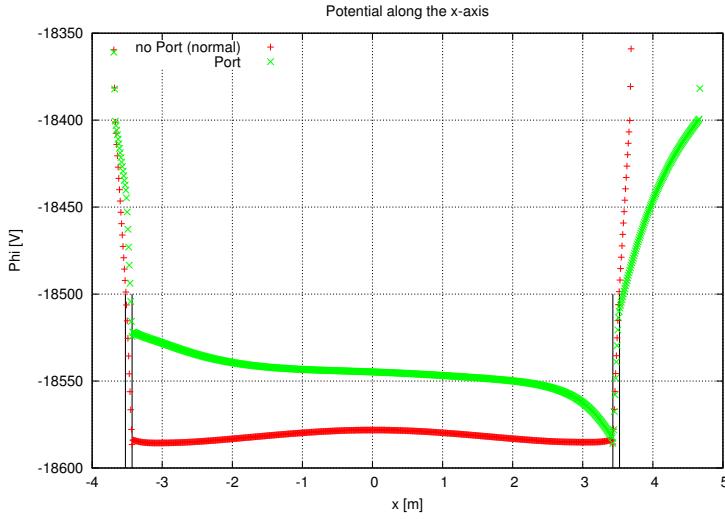
Konus, dies ergibt dann 13 Platten. Mit Hilfe des Parameters `use_pumpport` im Mainspec Programm lässt sich eine dieser Platten gegen eine Platte mit Loch und Zylinder als Pumpport ersetzen (Abbildung 5.16). In den hier vorgestellten Simulationen wurden diese Platten dann durch 1200 Platten (verteilt auf den gesamten Radius) ersetzt, lediglich für den Pumpport ist eine große Platte geblieben. Zusätzlich wird das Spektrometer noch so gedreht, dass der Pumpport senkrecht zur x-Achse ist (vgl. Abbildung 5.16(a)).



**Abbildung 5.16.:** Hauptspektrometergeometrie ohne und mit Pumpport, die freie Stelle im Konus in Abbildung (a) lässt sich durch eine Platte oder den Pumpport (b) ersetzen.

Aufgrund der Beschränkung der Elementanzahl durch den Arbeitsspeicher, wird die Drahtelektrode über die bereits vorhandenen Routinen im Mainspec Programm als rotationssymmetrische Elektrode hinzugefügt anstelle von unabhängigen Drähten. Die so erhaltene Geometrie enthält ca. 50000 unabhängige Elemente, wegen dieser hohen Elementanzahl lässt sich diese Geometrie nur noch auf einem Computer mit 16 GB Arbeitsspeicher berechnen. Das Ergebnis eines Scans entlang der x-Achse bei  $z = 7.5$  ist in Abbildung 5.17 mit und ohne Pumpportgeometrie dargestellt. Der Scan ohne Pumpport entspricht den Erwartungen, man erhält ein symmetrisches Potential mit einem Potentialdurchgriff. Nutzt man nun die Pumpportgeometrie, so erwartet man lediglich auf der Pumpportseite (in Abbildung 5.17 ist das die rechte Seite) eine Abweichung im Potential im Vergleich zur Geometrie ohne Pumpport, dieser Effekt tritt auch ein. Zwischen den Drähten und der Wand des Pumpstutzens nähert sich das Potential den -18,4 kV immer mehr an und erreicht es schließlich an der Wand des Pumpstutzens, ohne Pumpport werden die -18,4 kV bereits an der Tankwand erreicht. Allerdings tritt auch noch ein zweiter Effekt auf: Auf der dem Pumpport gegenüberliegenden Seite erhält man auch größere Abweichungen im Potential, die direkt hinter der Drahtelektrode beginnen.

Da diese Abweichungen nur bei der Pumpportgeometrie auftauchen und nicht am Spektrometer ohne Pumpport, muss das Problem bei der Geometrie mit Pumpport gesucht werden. Um auszuschließen, dass nicht die Überlappung und Löcher zwischen den Elementen die Ursache hierfür sind, wird der Pumpport mit einer runden Platte verschlossen



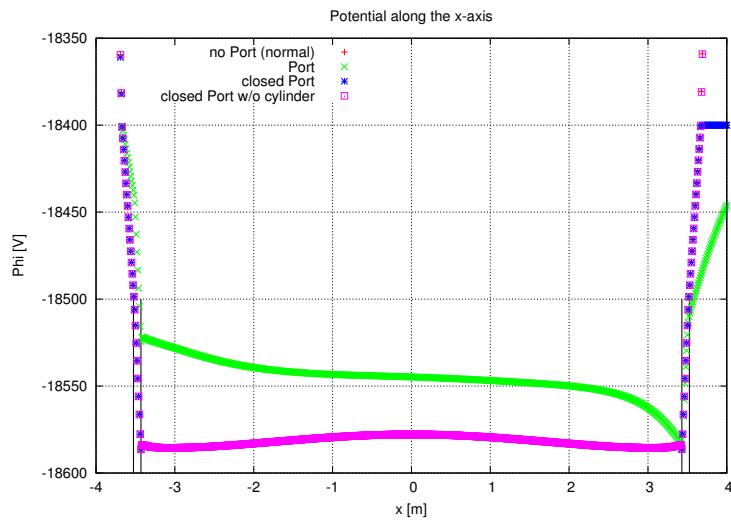
**Abbildung 5.17.:** *Potentialsan des Hauptspektrometers entlang der x-Achse mit und ohne Pumpport, ohne Pumpport erhält man ein symmetrisches Potential, mit Pumpport hat man an der dem Port gegenüberliegenden Seite größere Potentialdifferenzen. Das Potential des Hauptspektrometers liegt bei -18,4 kV, die Potentiale der Drahtlagen bei -18,5 und -18,6 kV.*

und in einer zweiten Simulation noch der Zylinder entfernt. Bei beiden Simulationen erhält man wieder das Potential ohne Pumpport (Abbildung 5.18). Dies ist ein deutslicher Hinweis darauf, dass der Überlapp und die Löcher nicht die Ursache für die Potentialabweichung an der gegenüberliegenden Seite sind.

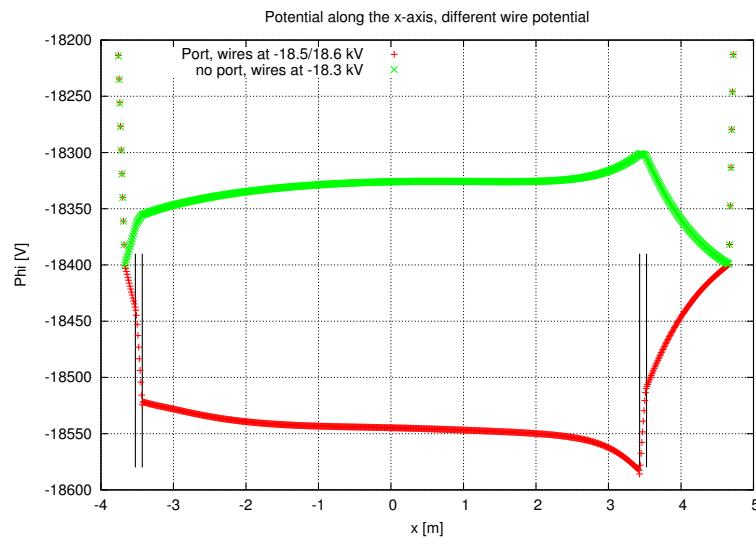
Die Fehlerquelle liegt in der Drahtelektrode, um dies zu untersuchen wurden die Drähte auf ein Potential von -18,3 kV gesetzt. Das Ergebnis dieser Simulationen zeigt Abbildung 5.19, zum Vergleich ist auch noch einmal die Simulation mit den normalen Drahtpotentialen von -18,5 und -18,6 kV mit eingezeichnet. Bei beiden Simulationen wird das Potential der Drahtelektrode auf der dem Port gegenüberliegenden Seite auf Tankpotential gezogen. Der Grund hierfür liegt letztendlich in der Implementation der Drahtelektrode und der physikalischen Annahme, die man für eine rotationssymmetrische Elektrode macht.

Bei der Implementation als roationssyssmetrische Elektrode wird für jedes Modul genau ein Draht erstellt und diesem Draht wird dann ein nrot Wert zugeordnet, mit dessen Hilfe in elcd dann die Drähte rotiert werden. Bei der Berechnung der Ladungsdichte wird nun nur für einen Draht die Ladungsdichte berechnet und dieser Wert wird dann für alle weiteren Drähte angenommen. Allerdings ist die Ladungsdichteverteilung im Pumpportbereich eine Andere als im Rest des Spektrometers und man erhält eine falsche Ladungsdichte. Das Potential wird dann mit dieser falschen Ladungsdichte berechnet und ist dann auch falsch.

Um nun diesen Fehler zu korrigieren, müssen die Drähte alle unabhängig von einander



**Abbildung 5.18.:** Potentialscan des Hauptspektrometers entlang der  $x$ -Achse bei verschiedenen Geometrien. Sobald der Pumpport verschlossen wird, erhält man das Potential ohne Pumpport.



**Abbildung 5.19.:** Potentialscan des Hauptspektrometers entlang der  $x$ -Achse bei verschiedenen Drahtpotentialen, irgendetwas scheint das Drahtpotential auf Tankpotential zu ziehen.

sein und dürfen nicht über die Rotationssymmetrie eingebunden werden. Dies hat dann zur Folge, dass die Anzahl der Elemente stark ansteigt. Die so erhaltene Geometrie hat über 150000 Elemente und lässt sich nicht mehr mit der Boundary Element Methode berechnen, da der verfügbare Arbeitsspeicher hierfür nicht ausreicht. Eine Möglichkeit diese Geometrie doch noch zu berechnen, stellt die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Robin Hood Methode dar.

Die Robin Hood Methode ist in dem neuen Simulationsframework Kassiopeia in den Programmen KEMField von T.J. Corona und ELCD von B. Leiber enthalten. Bei KEM-Field handelt es sich um ein neues Programm, das elektrische und magnetische Felder berechnen kann. ELCD hingegen ist eine Umsetzung der bisherigen elcd Programme in C++ und unterstützt auch die Robin Hood Methode. Beide Programme lassen sich in Zukunft hier anwenden und wurden in Vorabversionen auch schon eingesetzt. Allerdings enthielten beide Programme noch Fehler und konnten teilweise nicht einmal Referenzgeometrien berechnen. Diese Referenzgeometrien sind Geometrien die unter anderem im Rahmen der Diplomarbeit von M. Zacher [Zac09] genutzt wurden.

Da sich der Pumpport in einer nicht rotationssymmetrischen Geometrie aufgrund der hohen Elementanzahl nicht lösen lässt, muss eine alternative Möglichkeit gefunden werden. Eine Möglichkeit um das Pumpportproblem zu lösen, stellen rotationssymmetrische Geometrien dar, die im folgenden Kapitel beschrieben werden.



# 6. 2D Simulationen

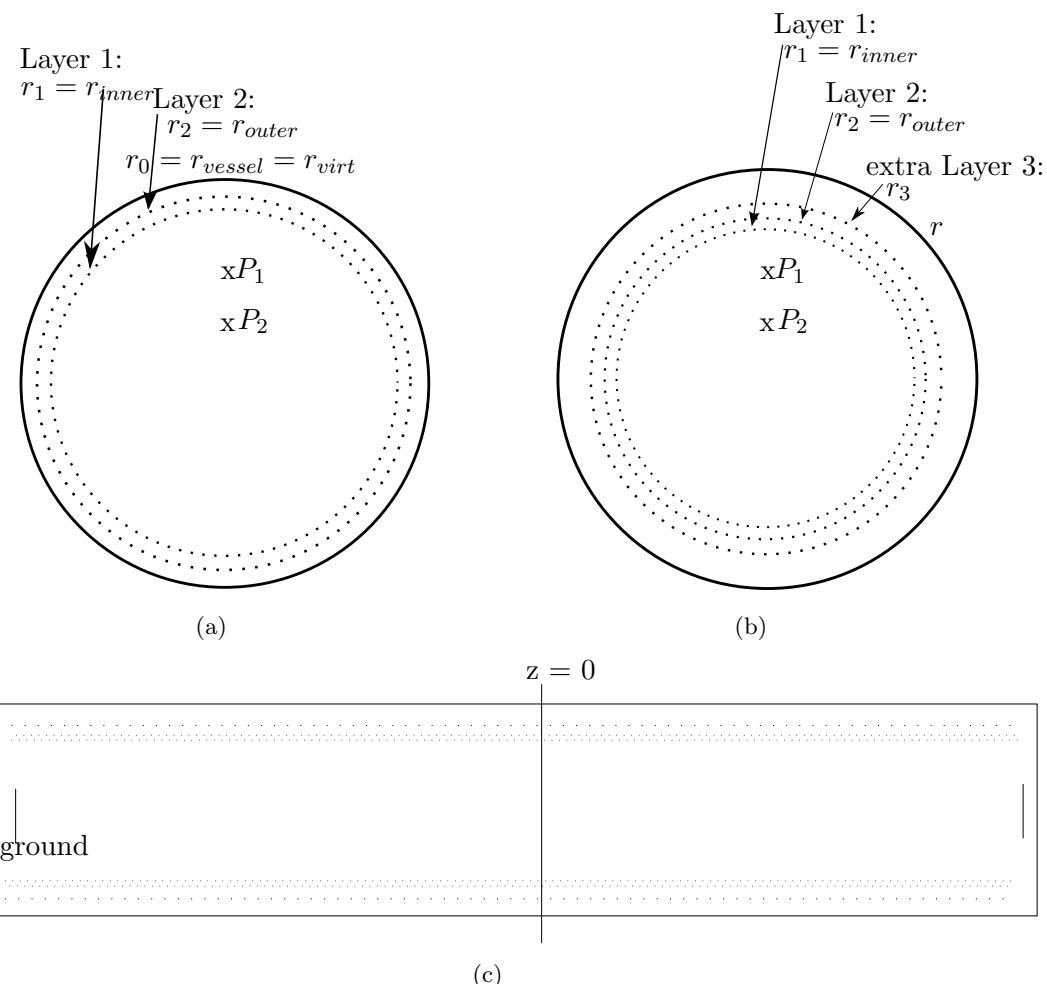
Im vorherigen Kapitel wurden die 3D Simulationen besprochen, aufgrund der hohen Elementanzahl sind die dort vorgestellten Geometrien nicht mehr mit dem in elcd3\_3 genutzten Gaussalgorithmus zu lösen. Um dennoch das Pumpportproblem lösen zu können, wird eine alternative Herangehensweise benötigt. Hierzu wird das Problem auf einen rotationssymmetrischen Zylinder zurückgeführt, der sich mit elcd3\_2 berechnen lässt.

Um die durch die Pumpports entstandenen Potentialdifferenzen auszugleichen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, so kann man zusätzlich eine Drahtlage einbauen. Anstelle der Drähte können jedoch auch Stäbe mit verschiedenen Dicken verwendet werden. In diesem Kapitel werden die Vor- und Nachteile dieser Möglichkeiten sowie die technische Umsetzung diskutiert.

## 6.1. Geometrie

Für jeden  $z$ -Wert  $z_{spec}$  im Spektrometer gelten für die Drahtlagen und die ideale Tankwand genau definierte Radien. Im Pumpportbereich ist der Abstand zwischen Tankwand und den Drahtlagen jedoch deutlich größer. Diese bekannten Werte werden dann auf einen Zylinder übertragen, der dann genau diese Radien und Abstände enthält. Für diesen  $z$ -Wert wird dann eine Lösung mit elcd3\_2 berechnet. Da sich die Pumpports im konischen Teil des Spektrometers befinden, gelten für jeden  $z$ -Wert andere Kenngrößen, die auf den Zylinder übertragen werden müssen. So wird für verschiedene Werte jeweils eine eigene Lösung erarbeitet und aus allen Lösungen ein Kompromiss vorgeschlagen. In den hier vorgestellten Simulationen mit elcd3\_2 wurde die Pumpportregion vereinfacht durch einen Zylinder der Länge 20 m mit zwei Drahtlagen dargestellt. Hierbei wurde zuerst ein Zylinder mit einem Radius  $r_0$  und zwei Drahtlagen mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  erstellt (vgl. Abb. 6.1(a)). Der Radius  $r_0$  wird im Folgenden als Radius des virtuellen Tankwandzyinders bezeichnet. Dieses Setup wurde dann simuliert und das Potential an zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  als Referenzwert berechnet. Abbildung 6.1(c) zeigt einen Schnitt in z-Richtung durch den Zylinder, an beiden Zylinderenden sorgen Erdelektroden für die Randbedingungen. Der Zylinder und die Drähte sind jeweils mit 2000 Elementen diskretisiert.

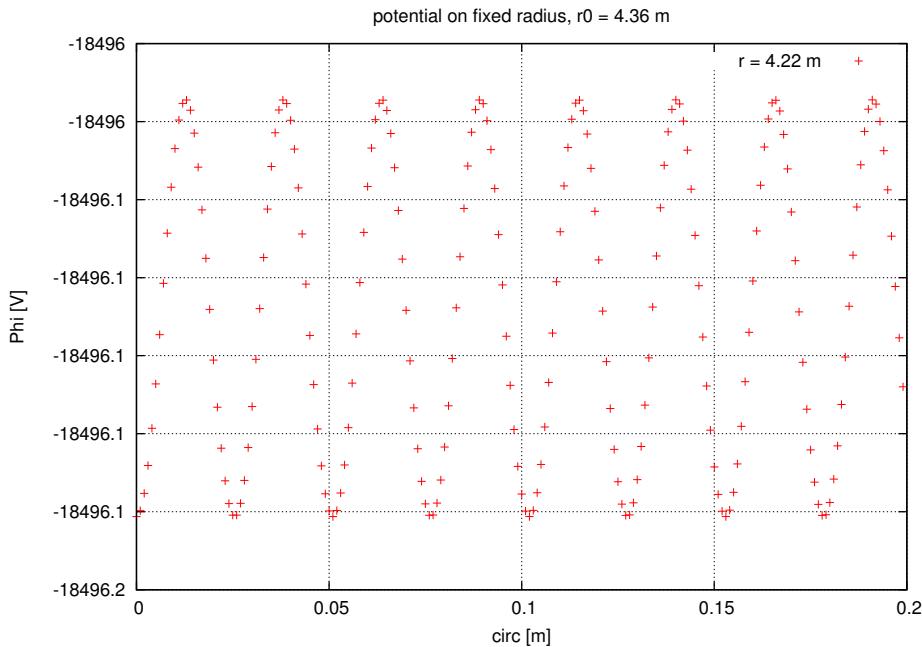
In einem zweiten Schritt wurde der Radius  $r_0 = r$  vergrößert und wiederum das Potential an den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt. Die so erhaltene Potentialdifferenz soll in weiteren Simulationen durch eine zusätzliche Drahtlage mit einem Radius  $r_3$  (vgl. Abb. 6.1(b)) minimiert werden, hierbei bleiben  $r_0$ ,  $r_1$  und  $r_2$  konstant. Die massive Tankwand soll durch eine Drahtlage ersetzt werden, da sich zwischen den Drähten Lücken befinden, ist der Einfluss der Drahtlage geringer als der der Tankwand. Daher nähert sich der Radius der zusätzlichen Drahtlage in den verschiedenen Simulationen dem Radius  $r_2$ , startend beim ursprünglichen Wandradius  $r_0$ , der Einfluss der Drahtlage auf



**Abbildung 6.1.:** Querschnitt der Zylinder mit (a) normalem Zylinderradius und (b) größerer Zylinderradius mit zusätzlicher Drahtlage, (c) zeigt einen Schnitt in  $z$ -Richtung, die Randbedingungen werden durch Erdelektroden am Zylinderende hergestellt.

das Potential im Inneren des Spektrometers wird somit größer. Der Abstand zwischen den Radien  $r_0$  und  $r_3$  wird im Folgenden  $d$  genannt.

Die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  müssen dabei so weit von den Drahtlagen entfernt sein, dass die einzelnen Drähte im Potential nicht mehr sichtbar sind, sondern ein effektives Potential verursachen. Befindet man sich noch im Nahfeld der Drähte, so erkennt man auf einem konstanten Radius ein wellenförmiges Potential, da zwischen den Drähten noch das Tankpotential durchscheint (Abbildung 6.2). Wenn man jedoch weit genug von den Drähten entfernt ist, so erhält man ein effektives Potential der Drähte und die Wellenstruktur verschwindet. Bereits bei einem Abstand von 10 Zentimetern tritt dieser Effekt nicht mehr auf, die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Berechnungen wurden jeweils in einem Meter Abstand zu den Drahtlagen durchgeführt.



**Abbildung 6.2.:** Auswirkungen der Drähte im elektrischen Nahfeld. Simuliert wurde ein Zylinder mit einem Radius  $r_0 = 4,36\text{ m}$  sowie zwei Drahtlagen mit  $r_1 = 4,206\text{ m}$ , das Zylinderpotential beträgt  $-18400\text{ V}$ , die Potentiale der Drahtlagen betragen  $-18500\text{ V}$  für die äußere und  $-18600\text{ V}$  für die innere Drahtlage.

Das Effektivpotential  $U_{eff}$  hinter der Drahtelektrode im Inneren des Spektrometers beträgt dabei

$$U_{eff} = U_{wire} + \delta U \quad (6.1)$$

mit

$$\delta U = \frac{U_{vessel} - U_{wire}}{S}. \quad (6.2)$$

Dabei ist  $U_{vessel}$  das Tankpotential und  $U_{wire}$  das Potential der Drahtelektrode,  $S$  ist der Abschirmfaktor und ist definiert als

$$S = 1 + \frac{2\pi L}{s \ln \frac{s}{\pi d}}. \quad (6.3)$$

Hierbei ist  $s$  der Abstand zwischen den Drähten mit dem Durchmesser  $d$  und  $L = r - r_2$  der Abstand zwischen Tankwand und den Drähten.

Für zwei Drahtlagen gilt dann entsprechend ([Val04]):

$$U_{eff,2} = U_{wire,2} + \frac{1}{S_2} (U_{wire,1} + \frac{U_{vessel} - U_{wire,1}}{S_1} - U_{wire,2}). \quad (6.4)$$

Der Einfluss des Tankpotentials auf das Effektivpotential  $U_{eff,2}$  ist nach Gleichung 6.4 nur noch gering. Berechnet man nun das Effektivpotential für einen Zylinder mit einem Radius von  $r_0 = 4,9\text{ m}$  und zwei Drahtlagen mit jeweils 1200 Drähten und den Radien  $r_1 = 4,75\text{ m}$  und  $r_2 = 4,68\text{ m}$ , so erhält man ein Effektivpotential von  $U_{eff,2} = -18581,701\text{ V}$ . Dabei beträgt das Zylinderpotential  $U_{vessel} = -18400\text{ V}$  und die Drahtpotentiale  $U_{wire,1} = -18500\text{ V}$  sowie  $U_{wire,2} = -18600\text{ V}$ . Vergrößert man nun den Abstand zwischen der Tankwand und den Drahtlagen auf  $1,4\text{ m}$  ( $r_0 = 6,3\text{ m}$ ), sollte dies auch nur einen geringen Einfluss auf das Effektpotential haben. Das so berechnete Effektivpotential beträgt  $U'_{eff,2} = -18582,893\text{ V}$ , die Potentialdifferenz zwischen diesen beiden Potentialen beträgt demnach  $1,192\text{ V}$ . In Tabelle 6.1 sind alle Werte zusammengefasst.

	$r_0$ [m]	$L_1$ [m]	$S_1$	$S_2$	$U_{eff,2}$ [V]
Referenz	4,9	0,15	12,58	5,9	-18581,701
Pumpport	6,15	1,4	109,06	5,9	-18582,893

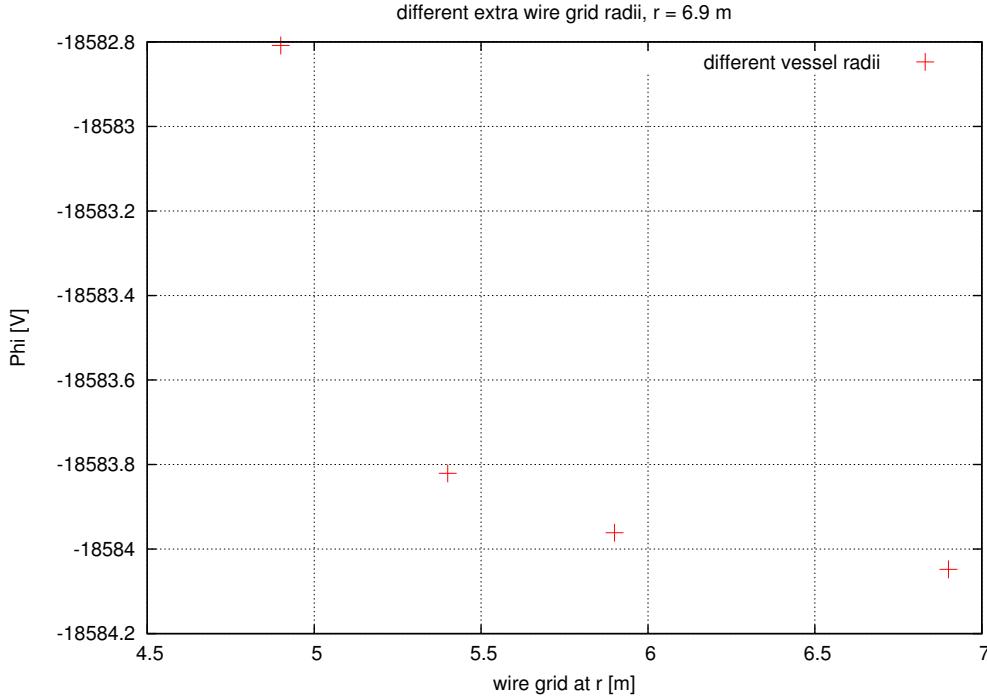
**Tabelle 6.1.:** Berechnete Abschirmfaktoren und Effektivpotentiale aus Gleichung 6.4.

## 6.2. Machbarkeitsnachweis und Drähte

Eine erste Simulation soll zeigen, ob sich die weit entfernte Zylinderwand durch eine Drahtlage ersetzen lässt. Hierzu wird der Radius  $r_0$  auf Werte von  $4,9\text{ m}$ ,  $5,4\text{ m}$ ,  $5,9\text{ m}$  und  $6,9\text{ m}$  festgelegt, die Drahtradien haben die Werte  $r_1 = 4,75\text{ m}$  und  $r_2 = 4,68\text{ m}$ . Die Simulation mit  $r_0 = 4,9\text{ m}$  dient als Referenzsimulation im Vergleich zu den Anderen. Das Potential der Zylinderwand beträgt  $-18400\text{ V}$  und das Potential der Drahtlagen beträgt  $-18500\text{ V}$  bzw.  $-18600\text{ V}$ . Die Drähte der ersten Lage haben eine Dicke von  $0,2\text{ mm}$ , die der zweiten Lage  $0,3\text{ mm}$ , die zweite Lage ist gegenüber der ersten Drahtlage um den halben Winkel zwischen zwei Drähten versetzt, um einen maximalen Einfluss auf das Potential zu haben.

Nun bestimmt man das Potential in einem Meter Abstand zur ersten Drahtlage. Abbildung 6.3 zeigt die Abhängigkeit des Potentials vom Tankwandradius, die Abweichung nimmt zu, je weiter die Tankwand von den Drahtlagen entfernt ist. Weiterhin stellt sich ab einem gewissen Abstand zu den Drahtlagen eine Sättigung ein und der Einfluss der Drahtlagen auf das Potential nimmt zu.

Um diese Differenz zu kompensieren wird eine zusätzliche Drahtlage mit einem Radius  $r_3$  und 1200 Drähten eingesetzt, der Drahtdurchmesser beträgt  $0,3\text{ mm}$ . Die zusätzliche Lage ist gegenüber der zweiten Lage um den halben Winkel zwischen den Drähten verschoben, so dass sich die zusätzlichen Drähte in den Lücken der äußeren Drahtlage



**Abbildung 6.3.:** Potential bei unterschiedlichen Wandradien  $r$ . Das Potential wird in einem Meter Abstand zur ersten Drahtlage bestimmt.

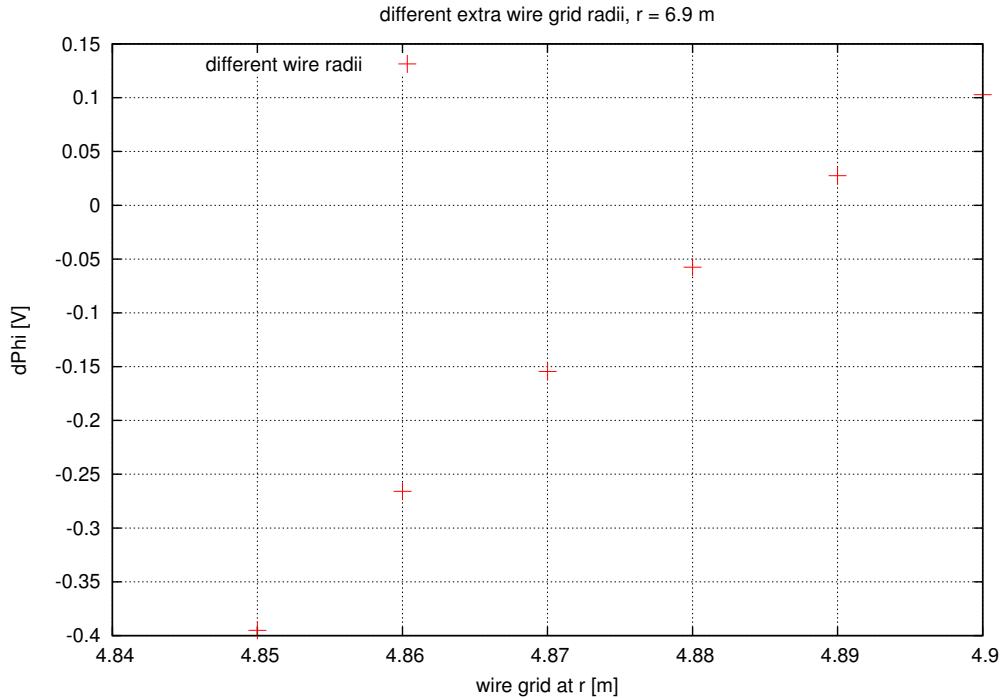
befinden und wiederum einen maximalen Einfluss auf das Potential hat. Der Radius wird in den einzelnen Simulationen jeweils um einen Zentimeter kleiner. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.4 zu sehen. Bereits auf dem normalen Wandradius  $r_0$  ist eine deutliche Verbesserung des Potentials erkennbar, verkleinert man den Radius um 2 cm, so erhält man bereits eine Überkompensation.

Diese Simulation zeigt, dass eine Korrektur des Potentials durch eine zusätzliche Drahtlage grundsätzlich möglich ist. Dies kann man nun auch auf den Pumpportbereich anwenden.

Die Pumpports im KATRIN Hauptspektrometer (vgl. Abbildung 5.1) sind Löcher mit einer Länge von 4,44 m und einer Breite von 2,68 m. Aufgrund der Länge liegen die Pumpports im Bereich der Module zwölf, dreizehn und vierzehn. Sie beginnen im Spektrometer bei der z-Koordinate  $z_{spec} = 5,07$  m und enden bei  $z_{spec} = 9,51$  m. Der Pumpstutzen liegt in z-Richtung und beginnt bei  $z_{spec} = 5,07$  m, der Radius der Tankwand an dieser Stelle beträgt 4,67 m. Für die weiteren Simulationen des Pumpports wird daher für die Tankwand ein fester Radius von  $r = 4,67$  m benutzt.

Da der Pumpport sich im flachen Konus befindet, hat jedes Modul eine unterschiedliche Anzahl an Drähten je Lage, in Modul zwölf liegt diese bei 1040, in Modul 13 bei 840 und in Modul 14 bei 680 Drähten. Im Bereich mit kleineren Radien liegen die Drähte somit auch näher zusammen als im Bereich mit größeren Radien.

Simulationen für verschiedene z-Koordinaten sollen zeigen, wie eine zusätzliche Drahtelektrode platziert werden muss, damit diese das Potential innerhalb des Spektrometers korrigiert. Für verschiedene z-Werte  $z_{spec}$  im Spektrometer wurden die Radien der

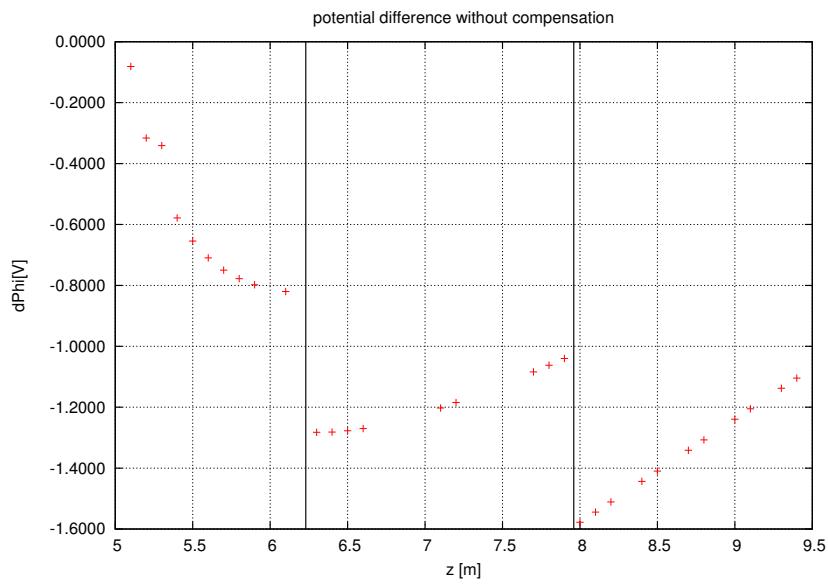


**Abbildung 6.4.:** Einfluss einer zusätzlichen Drahtlage auf die Potentialabweichung zum Referenzpotential.

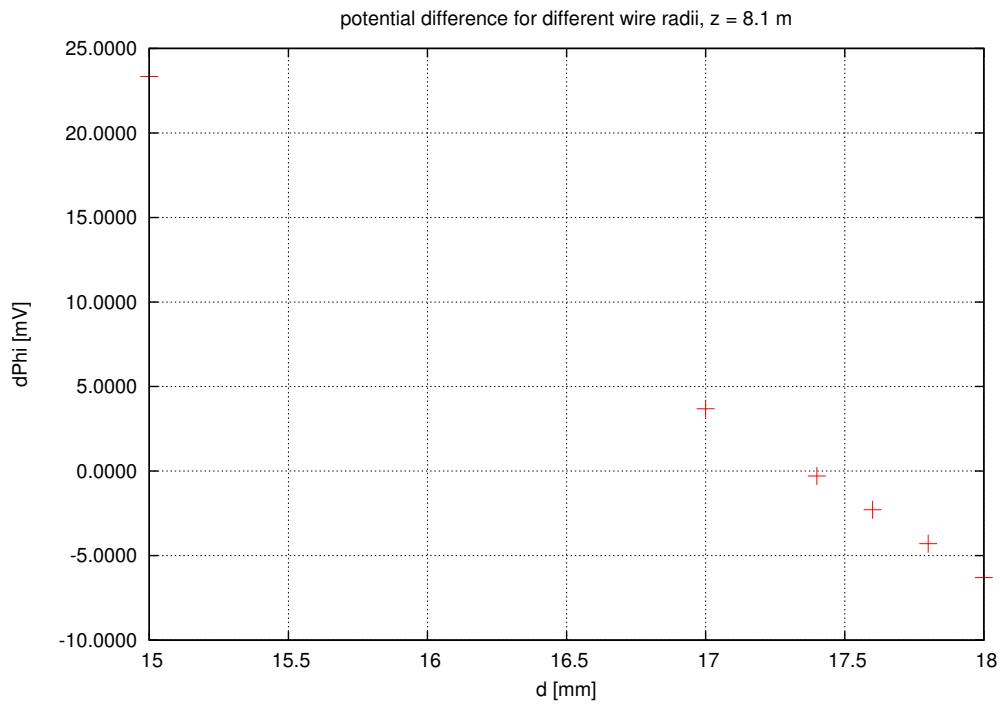
Tankwand und der beiden Drahtlagen bestimmt und dann als Radien für den Zylinder genommen. Wie im vorherigen Teil ist der Zylinder wieder 20 m lang und es wurde das Potential an zwei Punkten im Abstand von 1 m und 1,5 m zur inneren Drahtlage berechnet.

In weiteren Simulationen wurden dann die Potentialabweichungen für verschiedene z-Werte bei einem Radius von  $r = 4,67$  m bestimmt. Abbildung 6.5 zeigt die Ergebnisse dieser Simulationen, die senkrechten Striche innerhalb des Plots stellen die Modulgrenzen dar. Im Modul 12 stellt sich am Modulende eine Sättigung ein, in den Modulen 13 und 14 ist ein linearer Verlauf der Potentialdifferenzen zu erkennen.

Um nun diese Potentialdifferenzen auszugleichen, wird wiederum eine zusätzliche Drahtlage in den Zylinder gelegt und der Radius so lange verschoben, bis die Potentialabweichung minimal ist. Die mechanische Präzision beim Einbau der Stäbe liegt bei maximal  $\pm 2$  mm, daher wird die Position der dritten Drahtlage auf maximal 0,2 mm genau bestimmt. Beispielhaft wird dies im Folgenden für die z-Koordinate  $z_{spec} = 8,1$  (Ring 14) gezeigt, für alle anderen z-Koordinaten wurde dasselbe durchgeführt. Das Potential mit einer zusätzlichen Drahtlage bei unterschiedlichen Radien ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Der Abstand  $d$  ist dabei der Abstand zwischen der Drahtlage und dem virtuellen Tankwandradius. Wird die Drahtlage zu weit verschoben, erhält man eine Überkompensation. Der optimale Abstand liegt bei einer Potentialdifferenz von  $dU = 0$  V. Da der Abstand jedoch nur auf 0,2 mm optimiert wird, erhält man eine minimale Potentialabweichung von 0,3 mV bei einem Abstand von 17,4 mm anstelle der 1,54 V ohne Kompensation.



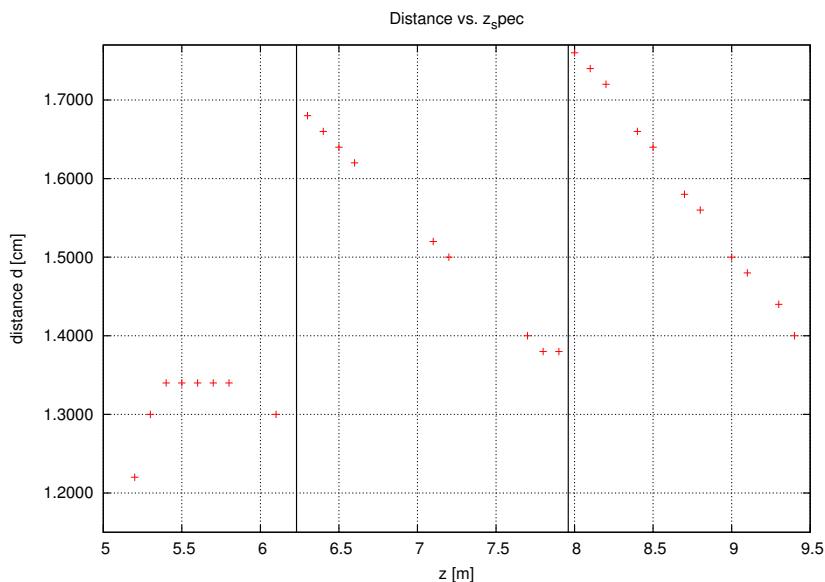
**Abbildung 6.5.:** Potentialabweichungen zum Referenzpotential im Pumpportbereich ohne Kompensation. Die senkrechten Striche stellen die Modulgrenzen dar.



**Abbildung 6.6.:** Potentialdifferenzen zum Referenzpotential bei verschiedenen Drahtradien bei  $z = 8,1$  m.

Führt man diese Simulationen auch für andere z-Werte durch, so erhält man für die Module 13 und 14 eine sägezahnförmige Kompensationsdrahtlage (vgl. Abbildung 6.7). Im Bereich des Moduls 12 ist zu erkennen, dass der optimale Abstand  $d$  erst bis zu einem Wert von 13,4 mm ansteigt, dann bei einem konstanten Abstand bleibt und anschließend wieder abfällt. Der Anstieg lässt sich durch den steigenden Abstand zwischen Pumpportwand und virtueller Tankwand erklären. Um den Potentialunterschied zu minimieren, muss die Drahtlage weiter ins Innere des Zylinders gelegt werden. Der Abfall des Abstandes am Modulende ist eine Folge der geringeren Drahtabstände der normalen Drahtelektrode. Da der Pumpport im konischen Teil des Spektrometers liegt, liegen die Drähte zu Beginn eines Moduls weiter von einander entfernt als am Ende des Moduls, hierdurch wird ein Teil der Potentialdifferenz bereits kompensiert. In Modul 12 gleichen sich zwischenzeitlich beide Effekte aus und es entsteht ein Bereich mit konstantem Abstand.

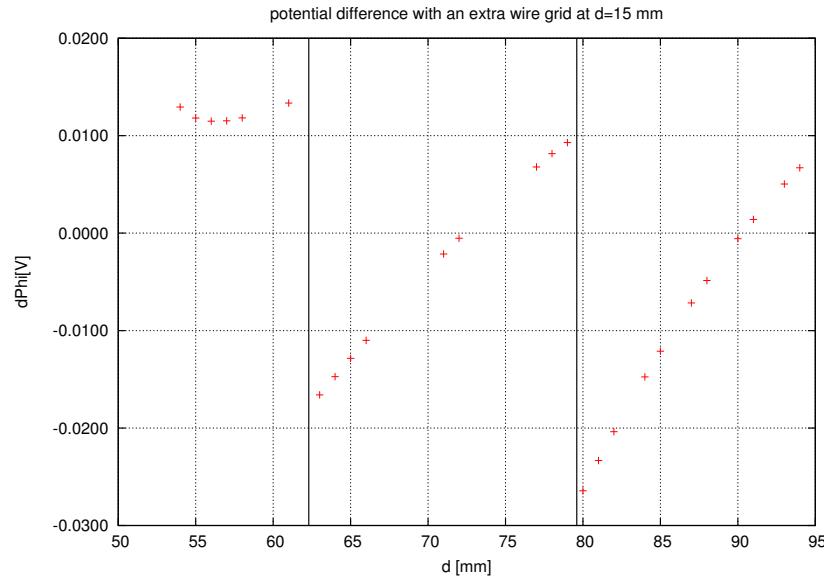
Innerhalb der Module 13 und 14 ist ein linearer Verlauf des optimalen Abstandes zu sehen. Der Abstand zur virtuellen Tankwand  $d$  ist zu Beginn des Moduls größer als am Ende des Moduls, dies ist wiederum mit dem Drahtabstand der Drahtelektrode erklärbar, die auch hier wiederum einen Teil der Potentialabweichung ausgleicht.



**Abbildung 6.7.:** Optimaler Abstand für eine Drahtelektrode zur Kompensation.

Der Radius der Tankwand ist aufgrund von mechanischen Toleranzen nicht konstant und schwankt um bis zu 20 mm, bereits 10 mm Abweichung führen zu einer Potentialabweichung von 90 mV (dies wird in Abschnitt 6.4.2 genauer erläutert). Diese Abweichungen erlauben es, dass die Drahtlage auch auf einem konstanten Abstand zur virtuellen Tankwand eingebaut werden kann. Der konstante Abstand sollte dann möglichst dem Mittelwert der Abstände entsprechen. Mittelt man über alle Module alle Abstände, so

erhält man einen Mittelwert von  $d_a = 14,8$  mm. Da für fast alle z-Positionen Simulationen mit  $d = 15$  mm vorliegen, zeigt Abbildung 6.8 die Potentialabweichungen für eine Drahtlage bei 15 mm. Die größte Differenz liegt hier bei 30 mV und variiert innerhalb der Module.



**Abbildung 6.8.:** Potentialabweichungen bei einer konstanten Drahtlage bei 15 mm.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, einen mittleren Radius pro Modul zu berechnen und die Zusatzelektrode in drei Module aufzuteilen. Für Modul 12 erhält man einen Radius von 13,2 mm, für Modul 13 15,3 mm und 15,9 mm für Modul 14. Dies sollte die Situation besser beschreiben als der mittlere Abstand über alle Module. Allerdings wurde der Ansatz einer Drahtlage zu Gunsten einer Stablage verworfen.

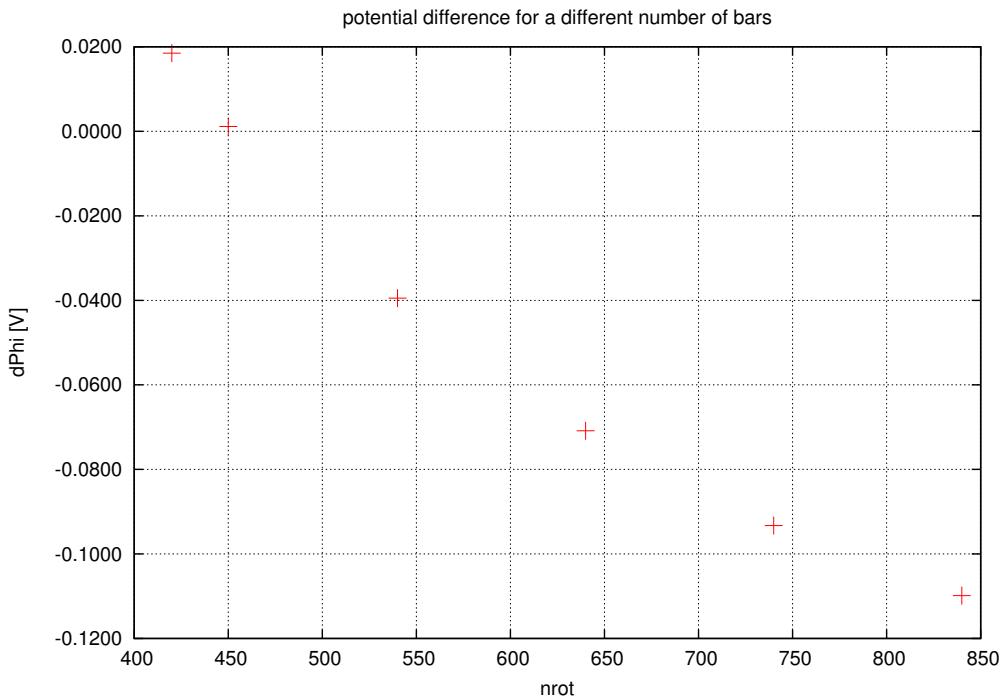
### 6.3. Kompensation durch Stäbe

Eine weitere Möglichkeit zur Kompensation stellt eine Lage aus Stäben dar, diese lassen sich mechanisch einfacher in den Pumpport einbauen als eine dritte Drahtlage, da für die Stäbe kein zusätzlicher Rahmen benötigt wird und sie sich segmentieren lassen. Bei den Stäben müssen verschiedene Möglichkeiten berücksichtigt werden, durch die größere Fläche haben die Stäbe mehr Einfluss auf das Potential und können auf einem anderen Radius als die Drahtlage sein. Wenn der Radius der zusätzlichen Drahtlage beibehalten werden soll, so muss sich der Abstand zwischen den Stäben vergrößern beziehungsweise die Anzahl der Stäbe (der Parameter  $n_{rot}$ ) verkleinert werden. Außerdem lässt sich auch hier wieder der Abstand  $d$  ändern.

Da der Durchmesser der Stäbe sich auch auf das Potential auswirkt, werden im Folgen-

den erst Simulationen mit 3 mm und dann mit 5 mm dicken Stäben vorgestellt.

Möchte man die Stablage mit 3 mm dicken Stäben auf demselben Radius wie die Drahtlage einbauen, so muss die Anzahl der Stäbe verringert werden. Abbildung 6.9 zeigt dies beispielhaft für den z-Wert  $z_{spec} = 6,3$  m, der Abstand soll konstant bei  $d = 1,68$  cm bleiben. Um wieder ein optimales Ergebnis zu erhalten, muss die Anzahl der Stäbe auf 450 reduziert werden, die noch vorhandene Potentialabweichung zum normalen Zylinder beträgt dann nur noch 1 mV.



**Abbildung 6.9.:** Potentialdifferenz für 3 mm dicke Stäbe bei einer unterschiedlichen Anzahl an Stäben.

Die zweite Möglichkeit ist die Anzahl der Stäbe, also den Parameter  $nrot$ , festzusetzen und den optimalen Abstand für diesen Wert zu bestimmen. Die Abstände betragen  $d = 1,86$  cm für  $nrot = 420$  und  $d = 0,62$  cm für 840 Stäbe.

Bislang wurde das Potential jedoch nur an einzelnen Punkten betrachtet und nicht über einen größeren Bereich innerhalb des Zylinders. Abbildung 6.10 zeigt die Potentialabweichungen der verschiedenen Möglichkeiten zum Zylinder mit normalem Radius über einen größeren Wertebereich startend bei  $r = 0$  bis  $r = 3,7$  m, die innere Drahtlage befindet sich bei  $r_1 = 3,99$  m. Aufgetragen sind die oben beschriebenen drei Berechnungen sowie zum Vergleich die Drahtlage bei einem optimalen Radius. Die Drahtlage hat einen zusätzlichen Potentialdurchgriff von 0,5 mV, die Stäbe mit  $nrot = 840$  haben einen zusätzlichen Durchgriff 1 mV und die anderen beiden Stablagen 2 mV. Dieser Durchgriff sollte auch minimiert werden, daher ist die sinnvollste Alternative zur Drahtlage die Stablage mit  $nrot = 840$  Stäben.

Mit einem Ringabhängigen  $nrot$  Wert von 1040, 840 bzw. 680 wurden jetzt für die weiteren  $z_{spec}$  Werte dieselben Simulationen wie für die zusätzliche Drahtlage durchgeführt,

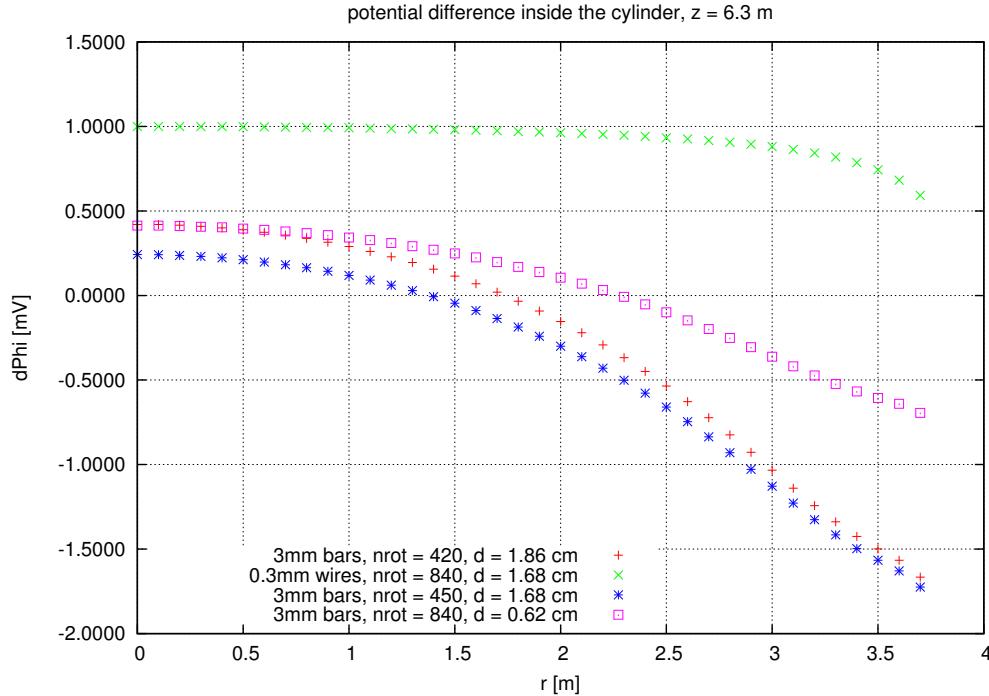


Abbildung 6.10.: Potentialdifferenzen innerhalb des Zylinders im Vergleich.

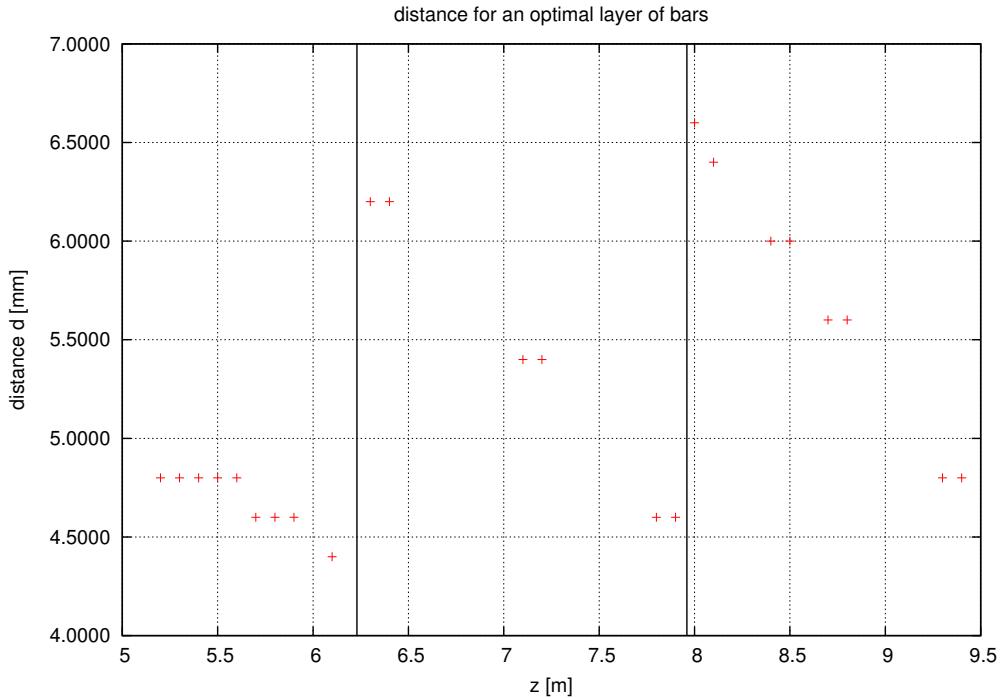
um den optimalen Abstand  $d$  zu bestimmen. Durch die größere Fläche der Stäbe ist der Einfluss auf das Potential auch größer und man kann diese im Vergleich mit den Drähten auf einen größeren Radius setzen. Dass dem auch so ist, zeigt Abbildung 6.11, in welcher der Abstand  $d$  gegen  $z_{\text{spec}}$  aufgetragen wurde.

Wie bereits bei den Drähten ist der Abstand vom Modul abhängig und es zeigt sich wiederum eine Sägezahnstruktur. Auch hier ist im Bereich des Moduls sechs wieder ein Plateau vorhanden, in dem der Abstand konstant bleibt.

Nutzt man nun Stäbe mit 5 mm Durchmesser anstelle der Stäbe mit einem Durchmesser von 3 mm, so wird der Radius für die optimale Positionierung der Stablage wiederum aufgrund der größeren Fläche vergrößert. Der optimale Abstand zwischen virtueller Tankwand und der Drahtlage liegt dann zwischen 2,8 und 4 mm.

### 6.3.1. Durchhang und Haltering

Ein Vorteil der Stäbe gegenüber den Drähten besteht beim Durchhang. Da die Zusatzelektrode über eine Länge von mehreren Metern gespannt werden müsste, haben die Drähte und Stäbe einen Durchhang in der Mitte. Bei Stäben mit einem Durchmesser von 3 mm beträgt der Durchhang 4-6 mm, bei den 5 mm Stäben sind dies nur 2-3 mm. Um den Durchhang zu simulieren wurde die Stablage um die entsprechenden Werte verschoben. Die Auswirkungen dieses Durchhangs sind in Abbildung 6.13 dargestellt. Bei den 3 mm Stäben beeinflusst ein Durchhang von 4 mm (grün) bereits das Potential mit 30 mV, zum Vergleich ist auch die Potentialdifferenz ohne Durchhang (blau) dargestellt.

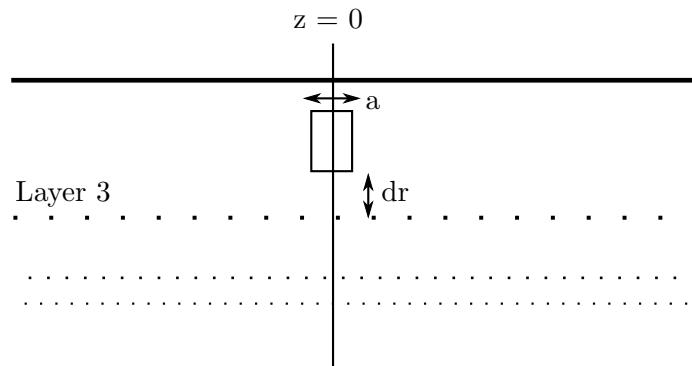


**Abbildung 6.11.:** Abstand  $d$  gegen  $z_{spec}$  bei einer Lage Stäbe anstelle von Drähten. Die Stäbe haben einen Durchmesser von 3 mm. Die Anzahl der Stäbe pro Ring liegt bei 1040 in Ring 12, 840 in Ring 13 und 640 in Ring 14.

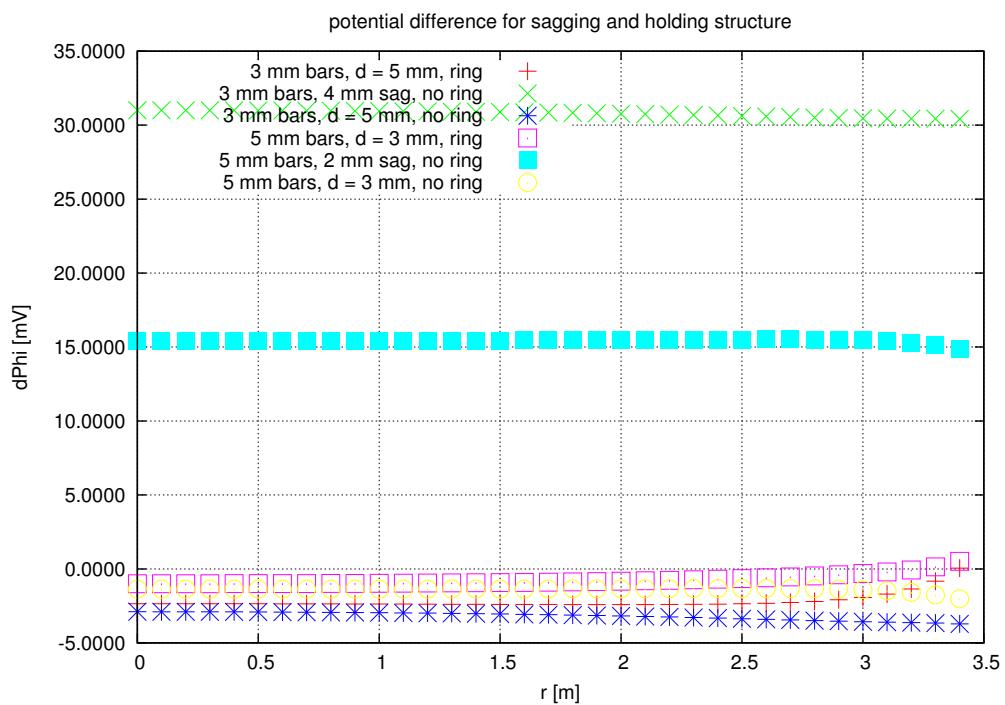
Um diese Differenz auszugleichen, kann eine zusätzliche Haltestruktur eingebaut werden. Da sich mit elcd3.2 nur rotationssymmetrische Geometrien berechnen lassen, ist diese Haltestruktur ein Ring zwischen den Stäben und der Tankwand. Der Ring hat eine Breite von 6 mm und eine Tiefe von 50 mm, ein Ausschnitt aus der Geometrie ist in Abbildung 6.12 dargestellt.

Dieser Ring korrigiert den Durchhang und beeinflusst gleichzeitig auch das Potential im Zylinder, das Ergebnis ist die rote Kurve in Abbildung 6.13. Da bereits bei der blauen Kurve die Stablage auf einem nicht optimalen Abstand mit  $d = 5$  mm liegt, korrigiert der Halterung sogar noch zusätzlich das Potential. Die so erhaltene Differenz beträgt 2,5 mV bei  $z = 0$ . Betrachtet man die Potentialdifferenz zwischen einer Stablage ohne Durchhang und einer Stablage mit Haltestruktur in  $z$ -Richtung (Abbildung 6.14), so sieht man, dass der größte Einfluss auf das Potential in der Mitte der Haltestruktur bei  $z = 0$  ist. Die Differenz zwischen diesen beiden Werten liegt bei 1,15 mV.

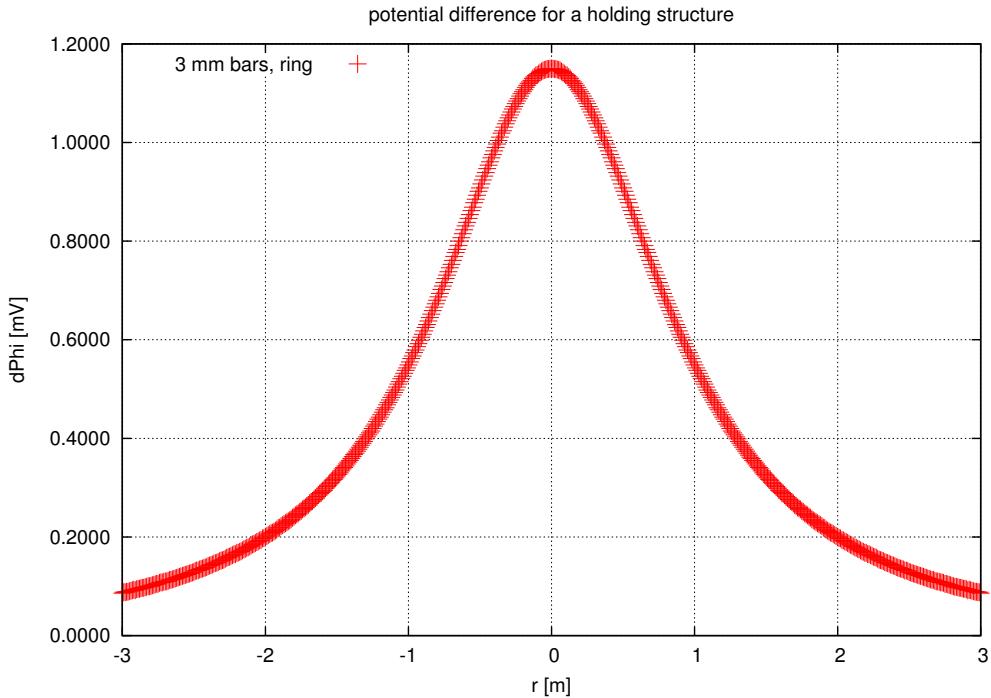
Auch auf die 5 mm Stäbe treffen diese Aussagen zu, da hier der Durchhang nur  $\approx 2$  mm beträgt, fällt die Potentialabweichung mit 15 mV auch geringer aus. Wiederum hat der Halterung im Vergleich mit der korrigierten Stablage auf das Potential einen geringen Einfluss, so dass man den Halterung an sich vernachlässigen kann. Der Durchhang kann jedoch nicht vernachlässigt werden und muss mit einem Halterung korrigiert werden.



**Abbildung 6.12.:** Skizze der Haltestruktur.



**Abbildung 6.13.:** Einfluss des Durchhangs und eines zusätzlichen Halterungs auf das Potential.



**Abbildung 6.14.:** Potentialdifferenz einer korrigierenden Stablage mit Haltering zum Potential einer korrigierenden Stablage ohne Haltering in  $z$ -Richtung.

### 6.3.2. Entfernung Tankwand - Stablage

Die zusätzliche Stablage lässt sich in einem Abstand von  $\approx 15$  mm einfacher einbauen als in einem Abstand von 5 mm. Um diesen Abstand zu erreichen, kann man die Anzahl der Stäbe pro Modul verringern, die dadurch entstandene Potentialdifferenz wird dann durch einen verkleinerten Radius in den verschiedenen Modulen ausgeglichen.

Um nun die entsprechende Anzahl an Stäben zu bestimmen, bei denen die Potentialdifferenz minimal ist, wird der Radius auf 15 mm festgesetzt und verschiedene Simulationen mit einer unterschiedlichen Anzahl an Stäben (Parameter  $n\text{rot}$ ) durchgeführt. Die Ergebnisse für 5 mm dicke Stäbe zeigt Tabelle 6.2.

	Modul 12		Modul 13		Modul 14	
$n\text{rot}$	400		400		300	
$z$ [m]	5,2	6,1	6,3	7,9	8,0	9,4
$d$ [mm]	14,6	15,6	15,2	11,6	18,4	13,8
Drahtabstand [mm]	72,24	66,44	65,15	54,91	79,94	60,31

**Tabelle 6.2.:** Anzahl, Abstände und Drahtabstände der Stäbe.

Auch hier zeigt sich wiederum die Sägezahnstruktur im modularen Aufbau der Zusatzelektrode. Setzt man nun einen festen Abstand zwischen Tankwand und Stablage

von 15 mm fest, so erhält man eine maximale Abweichung von 35 mV. Diese ist unter Berücksichtigung von weiteren technischen Anpassungen und Gegebenheiten vergleichbar mit anderen Störungen des Potentials. Diese Anpassungen werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

## 6.4. Weitere technische Anpassungen

Die bisherigen Ergebnisse berücksichtigen noch nicht alle technischen Details. Aufgrund mechanischer Toleranzen schwankt der Tankwandradius um mehrere Millimeter, auch wurden bislang noch nicht die HV-Verbinder zwischen den Modulen der Drahtelektrode berücksichtigt. Beide Effekte haben Auswirkungen auf das Potential innerhalb des Spektrometers. Weiterhin wurde für den Einbau der zusätzlichen Elektrode im Bereich des Rings 14 ein Haltesystem konstruiert, das nach ersten Plänen nach dem Einbau im Spektrometer verbleiben sollte. Auch die Effekte dieses Haltesystems müssen untersucht werden.

Die Stäbe haben in den folgenden Simulationen einen Durchmesser von 5 mm.

### 6.4.1. HV-Verbinder

Die einzelnen Module und Ringe der Drahtelektrode sind über HV-Verbinder miteinander verbunden, diese befinden sich zwischen der Tankwand und der äußeren Drahtlage in einem Abstand von 3 cm zur Drahtlage und haben dasselbe Potential wie die innere Drahtlage (-18600 V). In den Simulationen werden diese in der bisherigen Geometrie durch einen zusätzlichen 1 cm breiten Fassring dargestellt. Die Geometrie ist ähnlich der in Abbildung 6.12 dargestellten Geometrie für einen Haltering, statt eines massiven Rings wird hier jedoch nur ein Fassring simuliert.

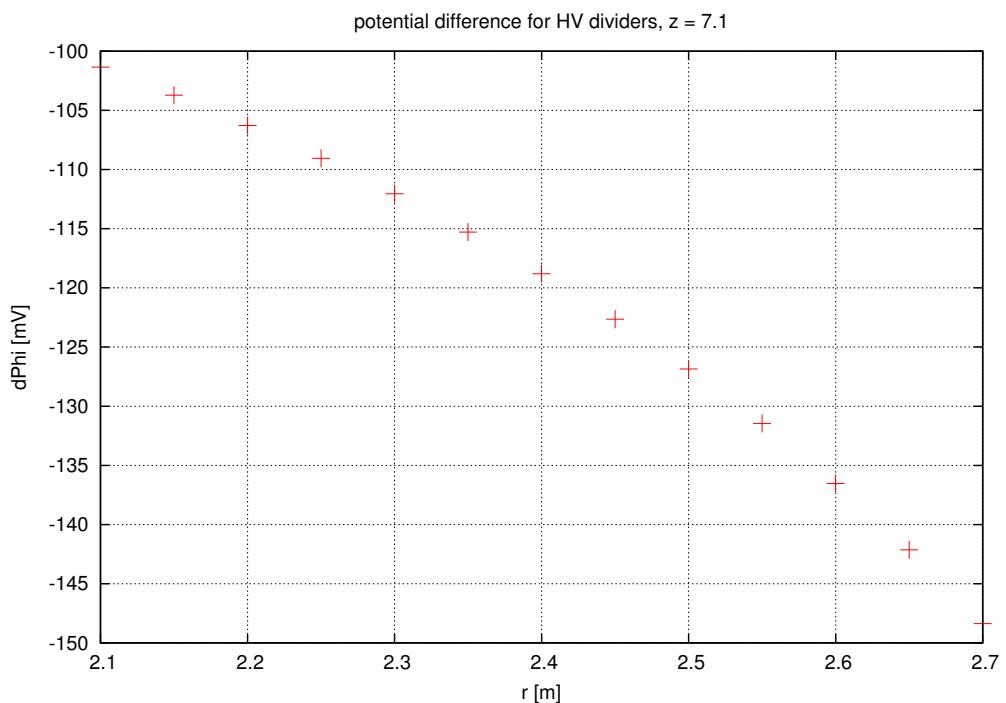
Der Einfluss der HV-Verbinder auf das Potential bei verschiedenen Radien ist in Abbildung 6.15 dargestellt. In einem Meter Abstand zur inneren Drahtlage (Layer 1) beträgt die Differenz 145 mV, dieses Ergebnis stimmt mit vergleichbaren Berechnungen von M. Zacher überein [Zac12].

Der Einfluss HV-Verbinder ermöglicht den Einbau der Stablage auf einem konstanten Radius von 15 mm zur Tankwand. Die Abweichungen durch die HV-Verbinder sind mit 145 mV deutlich größer als die Abweichungen durch den konstanten Radius von 35 mV.

### 6.4.2. Nicht konstanter Tankwandradius

Aufgrund mechanischer Toleranzen ist der Radius der Tankwand nicht überall konstant. Die Vermessungen der Bolzen in den Pumpportbereichen haben Abweichungen zum theoretischen Radius zwischen +1,8 mm und +18,4 mm ergeben (Abbildung 6.16).

Um die Auswirkungen auf die Position der Stablage zu untersuchen, wird zunächst der Pumpportradius um bis zu 20 mm verschoben und die Position der Stablage bei einem Abstand von 15 mm zur virtuellen Tankwand konstant gehalten und die Potentialdifferenz zur Referenzsimulation berechnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.17 durch die roten Punkte dargestellt. Die Verschiebung der Pumpportwand hat jedoch keinen Einfluss auf die Potentialabweichung, diese beträgt unabhängig vom verschobenen Radius 15 mV.



**Abbildung 6.15.:** Einfluss der HV-Verbinder auf das Potential im Inneren des Spektrometers im Vergleich mit dem Potential ohne Verbinder. Die HV-Verbinder werden durch einen Fassring simuliert.

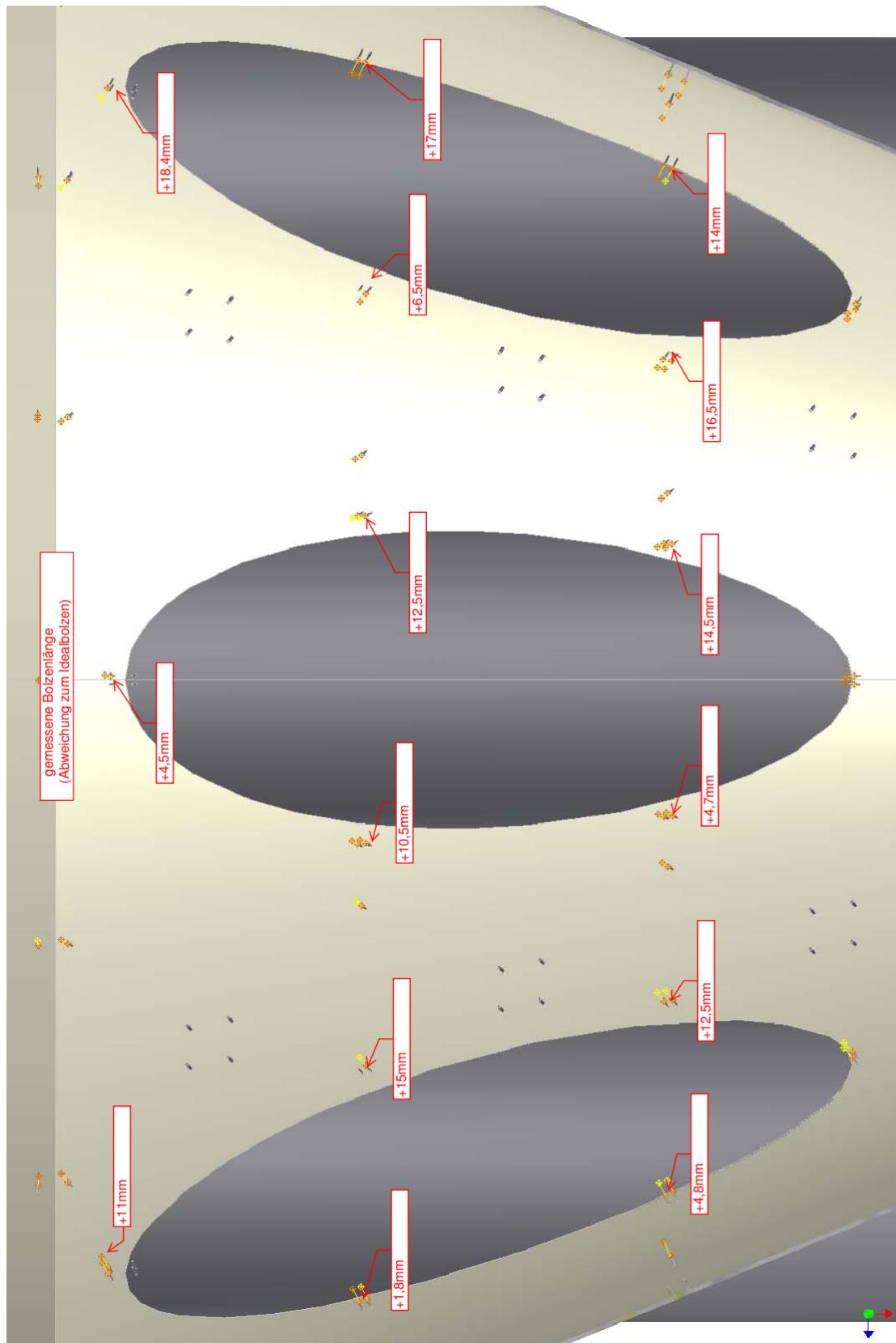
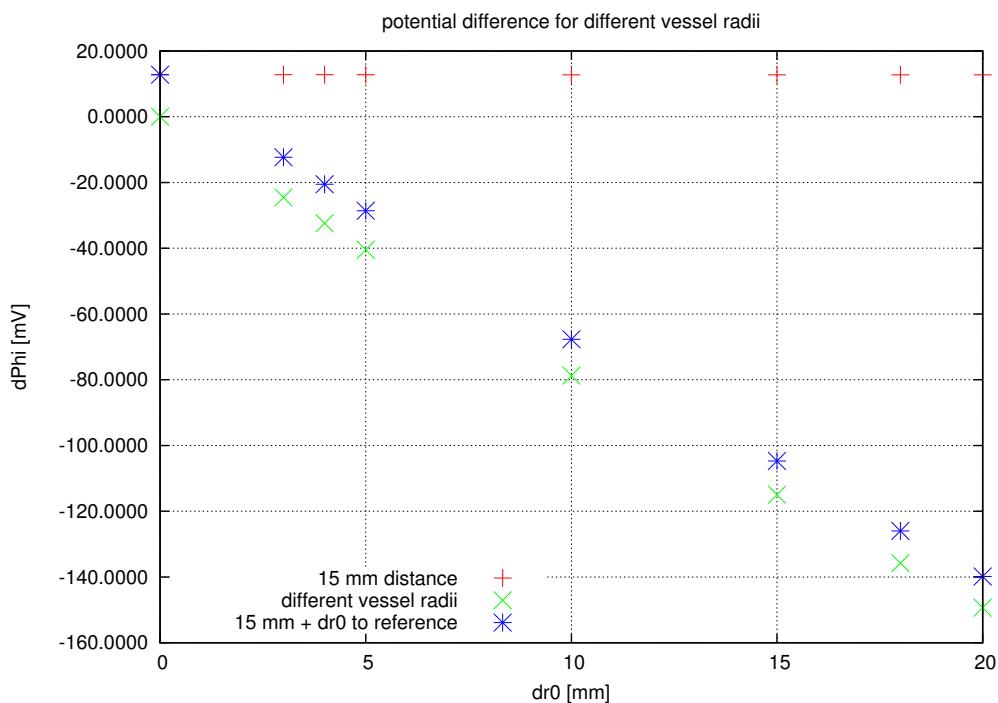


Abbildung 6.16.: Abweichung der gemessenen Bolzenlänge zu den idealen Bolzen. Die Bolzen sind um den angegebenen Wert nach innen versetzt.

Verschiebt man nun den Radius  $r_0$  der virtuellen Tankwand in den Referenzsimulationen um bis zu  $dr_0 = 20$  mm und berechnet die Potentialabweichung zu der Referenzsimulation mit  $dr_0 = 0$  mm, so erhält man die grünen Punkte in Abbildung 6.17. Die hierdurch entstandenen Abweichungen sind von der Verschiebung des Radius um  $dr_0$  abhängig und betragen bis zu -150 mV.

Um diese Abweichungen nun im Pumpportbereich zu korrigieren, muss die Stablage die zusätzlichen -150 mV kompensieren. Dafür wird die Stablage um denselben Wert  $dr_0$  wie die virtuelle Tankwand verschoben. Dies zeigen in Abbildung 6.17 die blauen Punkte. Wiederum wurde die Potentialdifferenz zum Referenzwert berechnet. Die so erhaltene Potentialdifferenz beträgt bis zu -140 mV und entspricht, bis auf eine geringe Abweichung von 12 mV, der Potentialabweichung durch den verschobenen Tankwandradius.

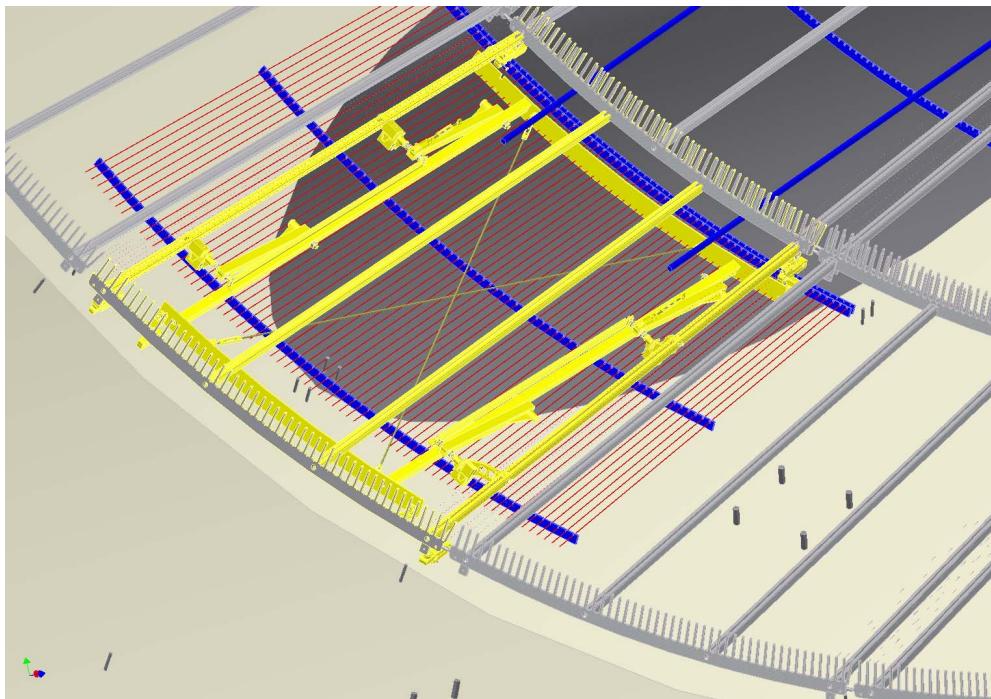


**Abbildung 6.17.:** Einfluss eines schwankenden Tankwandradius auf die Position der Stablage.  $dr_0$  ist die Differenz zum theoretischen Tankwandradius in mm. Verschiebt man die Stablage um denselben Wert wie den Radius, führt dies, bis auf eine Abweichung von 12 mV, zur selben Potentialdifferenz wie die verschobene Tankwand.

Diese Simulationen zeigen, dass die Position der Korrekturstablage vom Tankwandradius abhängig ist und mit diesem verschoben werden muss. Hält man den Abstand zwischen Korrekturelektrode und der Tankwand konstant bei 15 mm, erhält man die geringsten Abweichungen. Durch den konstanten Abstand der Stablage zum virtuellen Tankwandradius ist ein Offset von etwa 15 mV vorhanden, der auch bei der Verschiebung der Tankwand und der Stablage erhalten bleibt.

### 6.4.3. Haltestrukturen

Für den Einbau des letzten Moduls in den Pumpstutzen ist eine Haltestuktur nötig, eine technische Zeichnung einer solchen Struktur ist in Abbildung 6.18 dargestellt. Um festzustellen, wie sich diese Struktur auf das Potential auswirkt und was nach dem Einbau im Tank verbleiben kann, wurde ein 30 mm breiter Ring mit einer Tiefe von 30 mm bei verschiedenen Abständen zum Tank und verschiedenen Potentialen simuliert.

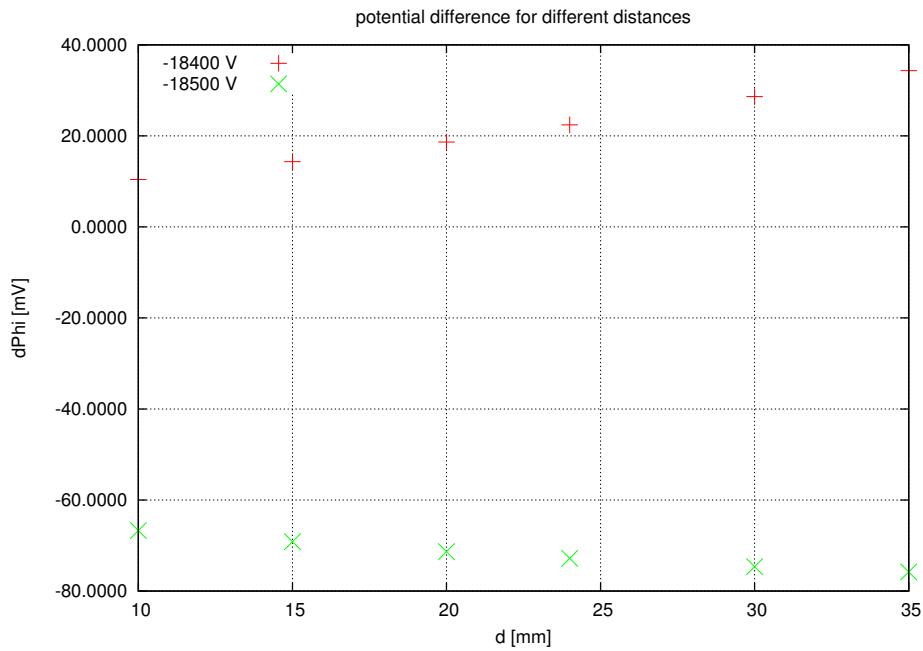


**Abbildung 6.18.:** Zusätzliche Haltestruktur für den Einbau einer Zusatzelektrode in Ring 14.

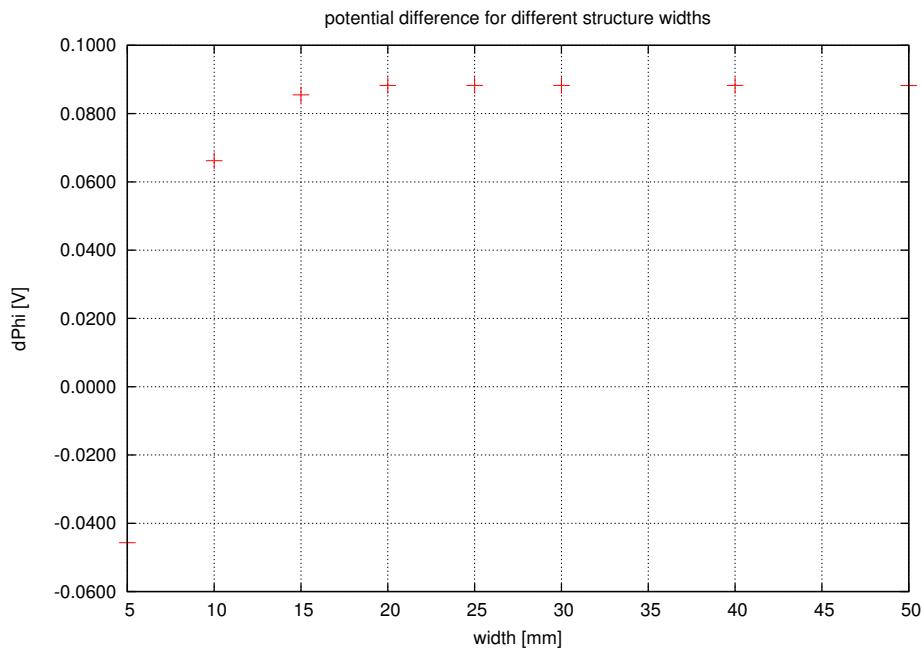
Abbildung 6.19 zeigt die Ergebnisse dieser Simulationen für Potentiale von -18400 V und -18500 V bei  $z_{spec} = 8,4\text{ m}$ . Je geringer der Abstand zur Tankwand ist, desto geringer ist auch die Potentialdifferenz im Inneren. Je nach Abstand und Potential erhält man eine Potentialdifferenz von -15 bis -35 mV (bei -18400 V) oder 66 bis 76 mV bei einem Ringpotential von -18500 V. Bei einem Potential von -18400 V ist die Differenz im selben Bereich wie die durch einen konstanten Radius der Stablage verursachte Potentialabweichung und ist geringer als die Abweichung durch die HV-Verbinder.

Im Pumpportbereich werden jedoch noch weitere Haltestrukturen benötigt, daher soll untersucht werden, wie stark sich Änderungen im Radius und der Breite von einzelnen Stangen auf das Potential auswirken. Der simulierte Ring hat eine Tiefe von 60 mm bei einem Potential von -18400 V und  $z_{spec} = 7,1\text{ m}$ . Abbildung 6.20 zeigt den Einfluss einer solchen Struktur bei verschiedenen Breiten des Rings. Der Abstand  $dr$  zwischen Ring und Stablage beträgt 5 mm. Die Abweichungen liegen bei bis zu 90 mV, jedoch wirkt sich die Breite des Rings ab 20 mm nur noch geringfügig auf diese Abweichung aus.

Abbildung 6.18 zeigt noch Stäbe außerhalb des Pumpports, im finalen Setup sind die Stäbe jedoch auf den Pumpportbereich begrenzt und stehen nicht über.



**Abbildung 6.19.:** Potentialdifferenz zum Referenzpotential in einem Meter Abstand zu den Drahtlagen für eine Haltestruktur in Ring 14. Aufgetragen ist die Potentiadifferenz zum Referenzpotential gegen den Abstand des Trägers zur Tankwand bei Trägerpotentialen von -18400 und -18500 Volt.



**Abbildung 6.20.:** Potentialabweichung in einem Meter Abstand zu den Drahtlagen für eine Haltestruktur mit einer Tiefe von 60 mm. Aufgetragen ist die Potentialabweichung zum Referenzpotential gegen die Breite des Halteringes.

Nicht beachtet wurde hierbei allerdings, dass der Abstand zwischen der Drahtelektrode und der Wand des Pumpports nicht konstant ist.

## 6.5. Fazit und vorgeschlagene Geometrie

In diesem Kapitel wurde der Pumpport durch eine Näherung mit Zylindern dargestellt. Die berechneten Potentialdifferenzen durch den Pumpport sind dabei von der Position im Spektrometer abhängig und betragen bis zu 1,6 V, die durch eine Zusatzelektrode ausgeglichen werden müssen.

Es ist möglich, diese Potentialabweichungen durch eine zusätzliche Drahtelektrode zu korrigieren. Da es mechanisch jedoch einfacher ist Stäbe anstelle einer zusätzlichen Drahtelektrode einzubauen, besteht die Zusatzelektrode aus Stäben. Der Einfluss von Stäben auf das Potential ist aufgrund der größeren Fläche gegenüber Drähten deutlich größer, daher kann bereits eine geringere Anzahl an Stäben im Vergleich mit den Drähten das Potential korrigieren. Der Durchhang von 5 mm dicken Stäben ist geringer als der von 3 mm dicken Stäben und erfordert daher auch weniger zusätzliche Haltestrukturen, die den Durchhang korrigieren.

Wie Abschnitt 6.4.3 zeigt, sollten weitere Haltestrukturen in den Pumpports in einem geringen Abstand zur Korrekturelektrode eingebaut werden, da so die zusätzliche Potentialabweichung gering gehalten wird. Eine zusätzliche Abweichung von bis zu 145 mV im Potential, die sich nicht korrigieren lässt, wird durch die HV-Verbinder verursacht (siehe 6.4.1). Diese machen es auch möglich, dass die Stäbe auf einem konstantem Abstand von 15 mm zur virtuellen Tankwand eingebaut werden können. Die noch vorhandenen Abweichungen von bis zu 35 mV (Abschnitt 6.3.2) sind geringer als die durch den HV-Verbinder verursachten Differenzen.

Die Korrekturelektrode besteht daher aus 5 mm dicken Stäben in einem Abstand von 15 mm zur virtuellen Tankwand. Tabelle 6.3 fasst noch einmal die wichtigsten Werte zusammen.

	Modul 12		Modul 13		Modul 14	
$n_{rot}$	400		400		300	
$z$ [m]	5,2	6,1	6,3	7,9	8,0	9,4
d [mm]	14,6	15,6	15,2	11,6	18,4	13,8
Drahtabstand [mm]	72,24	66,44	65,15	54,91	79,94	60,31

**Tabelle 6.3.:** Anzahl, Abstände und Drahtabstände der Stäbe



## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel des KATRIN-Experiments ist die Bestimmung der Masse des Elektronantineutrinos mit einer Obergrenze von  $0,2 \text{ eV}/c^2$  bei 90% C.L.. Dies geschieht über die Vermessung der Endpunktsregion des  $\beta$  Spektrums in einem Spektrometer vom MAC-E Filter Typ. Mit der angestrebten Sensitivität wird die direkte Bestimmung der Neutronenmasse um den Faktor 10 gegenüber vorherigen Messungen verbessert.

Das Hauptspektrometer enthält zur Untergrundreduktion ein inneres Elektrodensystem, bestehend aus Drahtelektrodenmodulen. In den Bereichen der Pumpports ist die Außenwand des Spektrometers unterbrochen. An allen anderen Stellen sorgt die Außenwand auf Hochspannung mit den beiden Ebenen der Drahtelektrodenmodulen für das effektive Retardierungspotential. Da die Außenwand in den Pumpportbereichen fehlt, ist dort das effektive Retardierungspotential gestört. Zusätzlich kann es dort zu Teilchenfallen kommen. Beide Effekte sollen durch eine zusätzliche Elektrode vermieden werden.

Ziel der hier vorgelegten Arbeit war es, eine Korrekturelektrode zu berechnen. Im ersten Teil dieser Arbeit wird das Hauptspektrometer mit einem Pumpport durch neue Geometrien dargestellt. Hierbei wird ein Kreisring durch Rechtecke dargestellt. Aufgrund der Darstellung durch Rechtecke kommt es zu Überlappen und Lücken zwischen einzelnen Elementen, die sich auf die Berechnung des Potentials auswirken. Die Überlappung von einzelnen Elementen war in vorherigen Geometrien auch schon der Fall, wurde aber noch nicht untersucht. Überlappung zwischen den einzelnen Elementen erhöhen das vorhandene Potential im Mittel, während Lücken das Potential im Mittel verringern. Um die Überlappung und Lücken zwischen den Elementen zu verringern, muss die Anzahl der Elemente pro Ring erhöht werden. Die Anzahl der Elemente ist jedoch durch den Arbeitsspeicher des Computers begrenzt. Da durch die Pumpports die Rotationssymmetrie des Spektrometers gebrochen ist, müssen die Elemente und Drähte unabhängig von einander eingebunden werden. Die so erhaltene Geometriedatei enthält zu viele Elemente, um mit dem Gaussalgorithmus in *elcd3\_3* noch berechnet werden zu können. Eine alternative Lösung des Pumpportproblems wird im zweiten Teil der Arbeit vorgestellt. Ein lokaler Ausschnitt aus dem Pumpportbereich wird hier durch einen Zylinder approximiert und jeweils die Potentialdifferenz zwischen einer Referenzgeometrie und der Pumpportgeometrie berechnet. Die Ergebnisse zeigen, dass die Potentialdifferenz vom Modul im Spektrometer und dem Abstand zwischen den Drähten abhängig ist. Diese Methode stellt zwar einen Kompromiss dar, erlaubt aber, eine konkrete Korrektorelektrode vorzuschlagen.

Die erhaltene Differenz lässt sich durch eine Zusatzelektrode aus Drähten kompensieren. Anstelle von Drähten lassen sich Stäbe mechanisch einfacher verwenden und haben auch einen geringeren Durchhang als Drähte. Der Durchhang der Stäbe lässt sich mit zusätzlichen Haltestrukturen lösen. Der Einfluss dieser Haltestrukturen auf das Potential ist geringer als der Einfluss des Durchhangs.

Technische Anpassungen wie die HV-Verbinder machen es möglich, dass die Stablage mit einem Stabdurchmesser von 5 mm auf einem konstanten Abstand zur virtuellen Tankwand eingebaut werden kann. Die Potentialdifferenz durch die HV-Verbinder ist größer als die Abweichung der Stablage auf einem konstanten Abstand zur virtuellen Tankwand.

Mit dem neuen Simulationsframework Kassiopeia wird die nicht rotationssymmetrische Pumpportgeometrie in Zukunft gelöst werden können. Die in Kassiopeia implementierte Robin Hood Methode benötigt aufgrund eines iterativen Algorithmus weniger Arbeitsspeicher als der Gaussalgorithmus aus den *elcd* Programmen. Ein weiterer Vorteil von Kassiopeia ist die Implementation von Dreiecken in der Potentialberechnung. Ein Kreisring lässt sich mit Dreiecken ohne Lücken darstellen. Leider war es im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr möglich, das Problem mit Kassiopeia zu betrachten.

# A. Geometrie Klassen

```
##Steiler Konus
def build_stEEP_cone(self):

    #variables for the cone part
    posarray_z = [9.75, 10.670, 11.613]
    rad1 = 2.75 - (tan(self.angle_cone2)*(posarray_z[1]-posarray_z[0]))
    rad2 = rad1 - (tan(self.angle_cone2)*(posarray_z[2]-posarray_z[1]))
    # print "rad2: ",rad2
    posarray_r = [2.75, rad1, rad2]
    array_nrot = [400, 200]
    group = Group()
    scale = 5
    power = 2

    for i in range (0,2):
        z1 = posarray_z[i]
        z2 = posarray_z[i+1]
        r1 = posarray_r[i]
        r2 = posarray_r[i+1]

        #easy way to build the steep cone
        electrode = Cone(z1, r1, z2, r2, self.potential_vessel)
        steep = electrode.discretise(scale,power,array_nrot[i])

        #append the steep cone to the group, which we return
        group.append(steep)

    return group

def build_hole(self, centre, rad, rady, nrot, circles, len_scale, uber, drehwinkel):
    """Build a plate with an elliptic hole and return it as a group"""

    if drehwinkel == 90:
        alpha = 0
    else:
        alpha = (2.*pi/(360./(90.-drehwinkel)))

    rady = rady
    rad = rad/cos(alpha)
    #Debug Msg
    print rad
    rad_cyl = 4.9
```

```
nrot = int(nrot)
centre_r = centre[1]
centre_z = centre[2]
centre_rc = centre[0]-rad_cyl
centre_zc = centre[1]-rad_cyl
group = Group()
group2 = Group()
power = 1
#discretisation in nn direction
nnnum = 1
U = self.potential_vessel
#the length scale parameter is for the additional length of each element
circles = int(circles)
drad = 0
phin = Vector(0,1,0)

for k in range (0,circles):
    rpoint = []
    rspoint = []
    zpoint = []
    zspoint = []
    ln = len_scale*k+len_scale
    drad = 0
    for l in range (0,k):
        drad += l*len_scale+len_scale
    rad2 = rad+drad
    rady2 = rady+drad
    rad_cyl2 = rad_cyl+drad

    #create points on ellipse
    for i in range (0, nrot):
        phi = i * ((2.*pi)/nrot)
        rpoint.append(centre_r + (rady2 * cos(phi)))
        zpoint.append(centre_z + (rad2 * sin(phi)))
    #create points for the normal vectors
    rspoint.append(-rady2 * sin(phi))
    zspoint.append(rad2 * cos(phi))

    #create starting point again for last electrode element
    rpoint.append(rpoint[0])
    zpoint.append(zpoint[0])

    rspoint.append(rspoint[0])
    zspoint.append(zspoint[0])

    tn = []
    nn = []
    eckpunkt = []
    lt = []
    extra = []
```

```

for m in range (0,nrot):

    #calculate the tangential and normal vectors
    tn.append(Vector(0,rspoint[m],zspoint[m])/abs(Vector(0,rspoint[m],zspoint[m])))
    nn.append(Vector(0,zspoint[m],-rspoint[m])/abs(Vector(0,zspoint[m],-rspoint[m])))

    #calculate the vectors angles for triangles
    Vec1 = Vector(0,rpoint[m],zpoint[m])
    Vec2 = Vector(0,rpoint[m+1],zpoint[m+1])
    alpha = acos(Vec1*Vec2/(abs(Vec1)*abs(Vec2)))
    gamma = pi/2.-(pi-alpha)/2.

    #dr and dz are the distances in r and z direction,
    #lt is the distance between the points
    dr = ((rpoint[m+1]) - (rpoint[m]))
    dz = ((zpoint[m+1]) - (zpoint[m]))
    dist = sqrt(dr**2 + dz**2)
    lt.append(dist/cos(gamma))

    tn.append(tn[0])
    nn.append(nn[0])
    lt.append(lt[0])

for n in range (0,nrot):

    #dr and dz are the distances in r and z direction,
    #lt is the distance between the points
    punkt1 = Vector(0,rpoint[n],zpoint[n]) + ln*nn[n]
    punkt2 = Vector(0,rpoint[n+1],zpoint[n+1]) + ln*nn[n+1]
    dr2 = (punkt2[1]-punkt1[1])
    dz2 = (punkt2[2]-punkt1[2])
    dist2 = sqrt(dr2**2 + dz2**2)
    d = dist2/cos(gamma)
    extra.append(uber*(d - lt[n]))

    eckpunkt.append(Vector(centre[0],rpoint[n],zpoint[n]) -
                   (extra[n]/2 + lt[n]/2) * tn[n])

    extra.append(extra[0])
    eckpunkt.append(eckpunkt[0])

for j in range (0,nrot):

    top = Rect(eckpunkt[j], tn[j], nn[j], extra[j] + lt[j], ln, U)
    rects_top = top.discretize(1,nnnum,power)
    group.append(rects_top)

return group

def build_cylinder(self, centre, rad, radx, nrot, drehwinkel):

```

```

nrot = int(nrot)
cylinder = Group()
if drehwinkel == 90:
    alpha = 0
else:
    alpha = (2.*pi/(360./(90.-drehwinkel)))
drehmatrix = matrix_rotation_y(-alpha)
rn = Vector(1.,0.,0.)
phin = Vector(0.,1.,0.)
zn = Vector(0.,0.,1.)
#this is for the discretisation interval in rn direction
n1num = 2
n2num = 1
power = 2
U = self.potential_vessel

rpoint = []
rspoint = []
zpoint = []
zspoint = []
centre_r = centre[1]
centre_z = centre[2]

#create points on ellipse
for i in range (0, nrot):
    phi = i * ((2.*pi)/nrot)
    rpoint.append(centre_r + (radx * cos(phi)))
    zpoint.append(centre_z + (rad * sin(phi)))
    #create points for the normal vectors
    rspoint.append(-radx * sin(phi))
    zspoint.append(rad * cos(phi))

#create starting point again for last electrode element
rpoint.append(rpoint[0])
zpoint.append(zpoint[0])

for j in range (0,nrot):
    #tn is the tangential unitvector
    tn = Vector(0,rspoint[j],zspoint[j])/abs(Vector(0,rspoint[j],zspoint[j]))

    #calculate the vectors angles for triangles
    Vec1 = Vector(0,rpoint[j],zpoint[j])
    Vec2 = Vector(0,rpoint[j+1],zpoint[j+1])
    alpha = acos(Vec1*Vec2/(abs(Vec1)*abs(Vec2)))
    gamma = pi/2.-(pi-alpha)/2.

    #dr and dz are the distances in r and z direction,
    #lt is the distance between the points
    dr = ((rpoint[j+1]) - (rpoint[j]))
    dz = ((zpoint[j+1]) - (zpoint[j]))

```

```

dist = sqrt(dr**2 + dz**2)
lt = dist/cos(gamma)

eckpunkt = Vector(centre[0],rpoint[j],zpoint[j]) - lt/2 * tn

inner = Rect(eckpunkt, tn, rn, lt, self.pumpstutzen_length, U)
inner.translate(-centre)
inner.transform(drehmatrix)
inner.translate(centre)
inner.move_to_plane_alt(centre,rn,2)
rects_inner = inner.discretize_alt(n2num,n1num,power)
cylinder.append(rects_inner)

return cylinder

def build_round_plate(self, centre, rad, radx, nrot, scale, drehwinkel):

    rund = Group()
    ypoint = []
    zpoint = []
    centre_y = centre[1]
    centre_z = centre[2]

    if drehwinkel == 90:
        alpha = 0
    else:
        alpha = (2.*pi/(360./(90.-drehwinkel)))

    radx = radx
    rad = rad/cos(alpha)

    phin = Vector(0.,1.,0.)
    zn = Vector(0.,0.,1.)

    #create points on ellipse
    for i in range (0, nrot):
        phi = i * ((2.*pi)/nrot)
        ypoint.append(centre_y + (radx * cos(phi)))
        zpoint.append(centre_z + (rad * sin(phi)))

    for j in range (1,nrot/2-1):
        eckpunkt = Vector(centre[0],ypoint[j],zpoint[j])
        punkt2 = Vector(centre[0],ypoint[nrot-j],zpoint[nrot-j])
        punkt3 = Vector(centre[0],ypoint[j+1],zpoint[j+1])
        length = abs(eckpunkt - punkt2)
        width = abs(ypoint[j]-ypoint[j+1])
        znum = int(length/scale) + 1

        element = Rect(eckpunkt, -zn, phin, length, width, self.potential_vessel)
        rund.add(element)

```

```

rects_element = element.discretize(znum,1,2)
rund.append(rects_element)

return rund

def build_konus_hole(self, centre, dr, dz, rad, length2):
    """Build the cylinder and cone part of the main spec including the pumpport"""

    #define some variables
    group = Group()
    cylinder = Group()
    konus = Group()

    nrot_cyl = self.num_modules_cylinder * self.num_wires_module_cylinder
    r1 = rad
    r2 = rad
    z1 = centre[2]
    z2 = centre[2]+length2
    scale = 1
    power = 2
    length = dz/cos(self.angle_cone)

    #easy way to build the cylinder
    electrode = Cone(z1, r1, z2, r2, self.potential_vessel)
    cylinder = electrode.discretise(scale,power,nrot_cyl)

    #append the cylinder to the group, which we return later
    group.append(cylinder)

    #variables for the cone part
    posarray_z = [4.5, 6.23434, 7.96207, 9.75]
    r1 = 4.9 - (tan(self.angle_cone)*(posarray_z[1]-posarray_z[0]))
    r2 = r1 - (tan(self.angle_cone)*(posarray_z[2]-posarray_z[1]))
    posarray_r = [4.9, r1, r2]

    #other variables used
    rn = Vector(1,0,0)
    phin = Vector(0,1,0)
    zn = Vector(0,0,1)
    centre_r = centre[0]
    centre_z = centre[2]

    drehmatrix1 = matrix_rotation_y(-self.angle_cone)

    #build the cone
    for i in range (0,3):
        nrot = self.num_modules_cone * self.num_wires_module_cone[i]
#        print "nrot: ", nrot

```

```

rpoint = []
zpoint = []
rspoint = []
zspoint = []

#create points on circle
for k in range (0, nrot):
    phi = k * ((2.*pi)/nrot)
    rpoint.append(centre_r + (posarray_r[i] * cos(phi)))
    zpoint.append(centre_z + (posarray_r[i] * sin(phi)))
    #create points for the normal vectors
    rspoint.append(-posarray_r[i] * sin(phi))
    zspoint.append(posarray_r[i] * cos(phi))

#create starting point again for last electrode element
rpoint.append(rpoint[0])
zpoint.append(zpoint[0])

#tn is the tangential unitvector, nn the normal unitvector
tn = Vector(rspoint[0],zspoint[0],0)/abs(Vector(rspoint[0],0,zspoint[0]))
nn = Vector(zspoint[0],-rspoint[0],0)/abs(Vector(zspoint[0],-rspoint[0],0))
eckpunkt = Vector(rpoint[0],zpoint[0],centre[2]+posarray_z[i])

#the eckpunkt is for the pumpport later
if i == 0:
    eckpunkt1 = eckpunkt

dz2 = posarray_z[i+1]-posarray_z[i]
lz = dz2/cos(self.angle_cone)

#set start and end for leaving out the pumpport area
if self.use_pumpstutzen and i == 0:
    start = 32
    end = nrot-32
elif self.use_pumpstutzen and i == 1:
    start = 30
    end = nrot-29
elif self.use_pumpstutzen and i == 2:
    start = 25
    end = nrot-26
else:
    start = 0
    end = nrot

for j in range (start,end):
    #calculate the vectors angles for triangles
    Vec1 = Vector(rpoint[j],0,zpoint[j])
    Vec2 = Vector(rpoint[j+1],0,zpoint[j+1])
    alpha = acos(Vec1*Vec2/(abs(Vec1)*abs(Vec2)))
    gamma = pi/2.-(pi-alpha)/2.

```

```

#dr and dzz are the distances in r and z direction,
#lt is the distance between the points
dr = ((rpoint[j+1]) - (rpoint[j]))
dzz = ((zpoint[j+1]) - (zpoint[j]))
dist = sqrt(dr**2 + dzz**2)
lt = dist/cos(gamma)

inner = Rect(eckpunkt, tn, zn, lt, lz, self.potential_vessel)

#cone rotation
inner.transform(drehmatrix1)
#move to right position
inner.move_to_plane(eckpunkt,zn)
inner.move_to_plane(eckpunkt,nn)
inner.transform(matrix_rotation_z(2*pi/nrot*j))

#discretise and append
rects_inner = inner.discretize(1,scale,power) #10,10,1
konus.append(rects_inner)

if self.use_pumpstutzen and i == 0:
    eckpunkt2 = Vector(rpoint[start],zpoint[start],centre[2]+length2) + lt/2 * tn
    eckpunkt3 = Vector(rpoint[end],zpoint[end],centre[2]+length2) - lt/2*tn
    dx = abs(rpoint[43]-rpoint[0])/2

group.append(konus)

#variables for the hole plate and the outer cylinder
rad1 = 1.68/2
rad2 = 1.68/2
port_nrot = 40
#the cylinder takes the angle in degrees and not in radian!
angle = 360/(2*pi)*self.angle_cone
#variables for the hole
rings = 20
len_scale = 0.01
uber = 0.5

#build the pumpport
if self.use_pumpstutzen:
    #get some variables used for the building of the hole plate und outer cylinder
    stutzen = Group()
    nn1 = zn.cross(tn)
    cut1 = matrix_rotation_vec(nn1,self.angle_cone/40) * tn #falls nrot = 14: /4
    cut2 = matrix_rotation_vec(nn1,-self.angle_cone/40) * tn #falls nrot = 14: /4

```

```

#Build the plate with a hole inside
hole = self.build_hole(eckpunkt1, rad1, rad2, port_nrot, rings, len_scale,
uber, angle)

hole.translate(-eckpunkt1)
hole.transform(drehmatrix1)
hole.translate(eckpunkt1+lt/2*tn+length/2*(drehmatrix1*zn))

#Cut the not needed parts
hole = hole.checkplane(eckpunkt1,zn)
hole = hole.checkplane(eckpunkt1+dz*zn,-zn)
hole = hole.checkplane(eckpunkt3,matrix_rotation_x(-self.angle_cone/12.)*tn)
hole = hole.checkplane(eckpunkt2,matrix_rotation_x(self.angle_cone/12.)*(-tn))
stutzen.append(hole)

#Build the cylinder an append it to the rest of the group
cylinder = self.build_cylinder(eckpunkt1, rad1, rad2, port_nrot, angle)
cylinder.translate(-eckpunkt1)
cylinder.transform(drehmatrix1)
cylinder.translate(eckpunkt1+lt/2*tn+length/2*(drehmatrix1*zn))
stutzen.append(cylinder)

if self.use_port_plate:
    rund = self.build_round_plate(eckpunkt, rad1, rad2, nrot, 0.2, angle)
    rund.translate(-eckpunkt1)
    rund.transform(drehmatrix1)
    rund.translate(eckpunkt1+lt/2*tn+length/2*(drehmatrix1*zn))
    stutzen.append(rund)

rund2 = self.build_round_plate(eckpunkt1, rad1, rad2, nrot, 0.2, angle)
rund2.translate(-eckpunkt1)
rund2.transform(drehmatrix1)
rund2.translate(eckpunkt1+lt/2*tn+length/2*(drehmatrix1*zn))
rund2.translate(self.pumpstutzen_length*zn)
stutzen.append(rund2)
stutzen.translate(dx*(-rn))

group.append(stutzen)

if self.use_plate_instead:
    plate = Group()

    rect = Rect(eckpunkt1, tn, zn, dy, length, self.potential_vessel, 0)

    #rotation for the cone
    rect.transform(drehmatrix2)

    #move to the right position
    rect.move_to_plane(centre+length2*zn,zn)
    rect.move_to_plane(eckpunkt1,nn)
    rect.translate((lt/2-dy/2)*tn-dx*rn)

```

```
rect_plate = rect.discretize(85,18,1)

rect_plate = rect_plate.checkplane(eckpunkt3,
    matrix_rotation_x(-self.angle_cone/1.9)*tn)
rect_plate = rect_plate.checkplane(eckpunkt2,
    matrix_rotation_x(self.angle_cone/1.9)*(-tn))

plate.append(rect_plate)

group.append(rect_plate)

return stutzen
```

## B. Elektroden Klassen

```
def checkplane_coord(testpunkt,aufpunkt,normal):
    a = normal/abs(normal) * (testpunkt - aufpunkt)
    return a

def discretise_interval_alt(a, num, power):
    if num < 1:
        return []
    elif num == 1:
        return [a]
    elif num == 2:
        return [a / 2., a / 2.]
    else:
        d = []
        f = a
        J = num
        for j in range(0, J):
            jnum = abs((j + 1) / (1. * J))
            jnum1 = abs(j / (1. * J))
            d += [(math.pow(jnum, power) - math.pow(jnum1, power))*f]
        return d

class Electrode:
    def checkplane(self,aufpunkt,normal):
        pass

    def move_to_plane(self,aufpunkt,normal):
        pass

class Rect(Electrode):
    def discretize_alt(self, n1num, n2num, power):

        group = Group()
        a_dis = discretise_interval_alt(self.a, n1num, power)
        b_dis = discretise_interval_alt(self.b, n2num, 1)
        aufpunkt = self.p
        for i in a_dis:

            for j in b_dis:
                plate = Rect(aufpunkt, self.n1,self.n2,i,j,self.U)
                group.append(plate)
                aufpunkt = aufpunkt + (j * self.n2)

        aufpunkt = aufpunkt + (i * self.n1) - (self.b * self.n2)
```

```
    return group

def checkplane(self,aufpunkt,normal):
    flag = []
    for a in self.get_corners():
        if checkplane_coord(a,aufpunkt,normal) < 0:
            flag.append(-1)
        if checkplane_coord(a,aufpunkt,normal) == 0:
            flag.append(0)
        if checkplane_coord(a,aufpunkt,normal) > 0:
            flag.append(1)
    if flag == [-1,-1,-1,-1]:
        ruck = -1
    elif flag == [1,1,1,1]:
        ruck = 1
    elif flag == [0,0,0,0]:
        ruck = 0
    else:
        ruck = 0
    return ruck

def move_to_plane_alt(self,aufpunkt,normal,richtung):
    array = []
    if richtung == 1:
        for a in self.get_corners():
            array.append(-(normal * a)/(normal * self.n1) + (normal * aufpunkt)/
                         (normal * self.n1))
        l = max(array)
        self.p = self.p + l * self.n1
    elif richtung == 2:
        for a in self.get_corners():
            array.append(-(normal * a)/(normal * self.n2) + (normal * aufpunkt)/
                         (normal * self.n2))
        l = max(array)
        self.p = self.p + l * self.n2
    else:
        self.p = self.p
```

# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Abhängigkeit des Betaspektrums in der Endpunktsregion von der Neutronenmasse $\mu$ . Aus [Fer34]. . . . .	3
2.2.	Form des $\beta$ -Spektrums beim Tritium $\beta^-$ -Zerfall für verschiedene Neutronenmassen. Der Einfluss der Fermifunktion wurde vernachlässigt. Quelle: [Zac09]. . . . .	7
3.1.	Aufbau des KATRIN Experimentes: a) WGTS (Tritiumquelle), b) Pumpstrecke, c) Vorspektrometer, d) Hauptspektrometer, e) Detektor. . . . .	9
3.2.	Der Detektor ist in zwölf Ringe zu jeweils zwölf Segmenten und einem Ring mit vier Segmenten unterteilt und ermöglicht so eine Ortsauflösung (Quelle: [Val09]). . . . .	11
3.3.	Als Beispiel für einen MAC-E-Filter wird hier der schematische Aufbau des KATRIN-Hauptspektrometers gezeigt. In blau ist die Zyklotronbewegung eines Elektrons dargestellt, die Pfeile am unteren Rand zeigen den Verlauf der Umwandlung von Transversalenergie in Longitudinalenergie. Das Bild stammt aus [Hug08]. . . . .	12
3.4.	Analytische Transmissionfunktion eines MAC-E Filters, die Abbildung stammt aus [Wol08]. . . . .	15
3.5.	Abfall des elektrischen und magnetischen Feldes entlang der Analysierebene im KATRIN Hauptspektrometer. . . . .	16
3.6.	Monte-Carlo Simulation der Transmissionfunktion des KATRIN Hauptspektrometers. Gezeigt ist der Einfluss der Potential- und/oder Magnetfeldabweichungen mit $\Delta E \approx 1,2 \text{ V}$ und $\Delta B \approx 0,4 \text{ G}$ auf die Transmissionfunktion. . . . .	17
3.7.	Prinzip der Drahtelektrode, Quelle: [Hug08]. . . . .	18
3.8.	modulares Hauptspektrometer . . . . .	19
5.1.	Pumpports im Inneren des Hauptspektrometers . . . . .	27
5.2.	Ausschnitt aus der Geometrie, die Punkte $x$ und $x+1$ sind zwei Punkte, die durch die Formeln 5.2 und 5.3 berechnet wurden. $lt$ ist die Länge des Elements in Tangentialrichtung und $ln$ die Breite in Normalenrichtung. . . . .	29
5.3.	Dreiecksgeometrien zur Längenberechnung . . . . .	30
5.4.	Loch Geometrie ohne und mit Über schneidungen. . . . .	30
5.5.	Zylinder Geometrien . . . . .	32
5.6.	Gegenüberstellung der beiden Diskretisierungsmethoden. . . . .	34
5.7.	Plattenkondensator Geometrien . . . . .	35
5.8.	Potentialdifferenz eines runden Plattenkondensators mit Loch in elcd3_2 für verschiedene Diskretisierungen im Vergleich zur Diskretisierung mit 100/100 Elementen. . . . .	36

---

5.9. Vergleich von elcd3_3 mit elcd3_2 . . . . .	37
5.10. Potentialdifferenz bei verschiedenen Ringelementen im Plattendkondensator . . . . .	39
5.11. Abweichung von einer Ringbreite von 0,01 Metern, verschiedene Ringbreiten. . . . .	40
5.12. Auswirkungen des Parameters über auf zwei Elemente . . . . .	41
5.13. Auswirkungen des Überlapps . . . . .	42
5.14. Geometrie des Plattenkondensators mit Zylinder . . . . .	44
5.15. Potential des Kondensators mit Zylinder . . . . .	45
5.16. Hauptspektrometer 3D Geometrien . . . . .	46
5.17. Potentialsan des Hauptspektrometers mit und ohne Pumpport . . . . .	47
5.18. Potentialsan des Hauptspektrometers mit verschiedenen Pumpportgeometrien . . . . .	48
5.19. Verschiedene Drahtpotential im Hauptspektrometer mit Pumpport . . . . .	48
6.1. Querschnitte der 2d Zylindergeometrie . . . . .	52
6.2. Auswirkungen der Drähte im elektrischen Nahfeld . . . . .	53
6.3. Potential bei unterschiedlichen Wandradien $r$ . Das Potential wird in einem Meter Abstand zur ersten Drahtlage bestimmt. . . . .	55
6.4. Einfluss einer zusätzlichen Drahtlage auf die Potentialabweichung zum Referenzpotential. . . . .	56
6.5. Potentialabweichungen im Pumpportbereich ohne Kompensation . . . . .	57
6.6. Potentialdifferenzen zum Referenzpotential bei verschiedenen Drahtradien bei $z = 8,1 \text{ m}$ . . . . .	57
6.7. Optimaler Abstand für eine Drahtelektrode zur Kompensation. . . . .	58
6.8. Potentialabweichungen bei einer konstanten Drahtlage bei 15 mm. . . . .	59
6.9. Potentialdifferenz für 3 mm dicke Stäbe bei einer unterschiedlichen Anzahl an Stäben. . . . .	60
6.10. Potentialdifferenzen innerhalb des Zylinders im Vergleich. . . . .	61
6.11. Abstand $d$ gegen $z_{spec}$ bei einer Lage Stäbe anstelle von Drähten . . . . .	62
6.12. Skizze der Haltestruktur. . . . .	63
6.13. Durchhang und Halterung bei Stäben . . . . .	63
6.14. Einfluss einer korrigierenden Stablage mit einem Halterung auf das Potential in $z$ -Richtung . . . . .	64
6.15. Einfluss der HV-Verbinder . . . . .	66
6.16. Abweichung der gemessenen Bolzenlänge zu den idealen Bolzen . . . . .	67
6.17. Einfluss des schwankenden Tankwandradius auf die Position der Stablage	68
6.18. Zusätzliche Haltestruktur für den Einbau einer Zusatzelektrode in Ring 14. . . . .	69
6.19. Potentialdifferenz für eine Haltestruktur in Ring 14 . . . . .	70
6.20. Einfluss der Breite eines Halterings . . . . .	70

# **Tabellenverzeichnis**

3.1. Parameter der Drahtelektrode im KATRIN Hauptspektrometer . . . . .	18
3.2. Weitere Parameter der Drahtelektrode des KATRIN Hauptspektrometers . . . . .	19
5.1. Abweichungen in elcd3_3 . . . . .	40
6.1. Berechnete Abschirmfaktoren und Effektivpotentiale aus Gleichung 6.4. . . . .	54
6.2. Anzahl, Abstände und Drahtabstände der Stäbe. . . . .	64
6.3. Anzahl, Abstände und Drahtabstände der Stäbe . . . . .	71



# Literaturverzeichnis

- [Aha05] B. Aharmim et al., Phys. Rev. C **72** (2005)
- [Ahn06] M. H. Ahn et al. (K2K Collaboration), Phys. Rev. D **74**, 072003 (2006),  
[arXiv:hep-ex/0606032v3](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0606032v3)
- [Alt03] „Laboratory Limits on Neutrino Masses“, C. Weinheimer, in G. Altarelli and K. Winter (Eds.), Neutrino Mass, Springer, 2003
- [Ash05] Y. Ashie et al., Phys. Rev. D **71** (2005)
- [Cha14] „Intensitätsverteilung im magnetischen Spektrum der  $\beta$ -Strahlen von Radium B + C“, J. Chadwick, Verh. d. D. Phys. Ges. 16 (1914), 383-391
- [DON00] „Observation of Tau Neutrino Interactions“, DONUT Collaboration, Phys. Lett. B 504, 218-224 (2001)
- [Fer34] „Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen. I“, E. Fermi, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, Volume 88, Numbers 3-4, Pages 161-177 (März 1934)
- [Flat04] „Voruntersuchungen zu den Spektrometern des KATRIN Experimentes“, Dissertation B. Flatt, 2004
- [Glu05] „Background theory: radial motion of electrons from spectrometer electrodes to fluxtube“, F. Glück 2005, Internes KATRIN Dokument
- [Hil11] Dissertation B. Hillen, 2011
- [Hug08] „Design of the electrode system for the KATRIN main spectrometer“, Diplomarbeit K. Hugenberg 2008
- [Kam05] The KamLAND collaboration, Phys. Rev. Lett. **94** 081801 (2005),  
[hep-ex/0406035v3](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0406035v3)
- [KAT04] „KATRIN Design Report 2004“, KATRIN Collaboration, FZK Scientific Report 7090, <http://www-ik.fzk.de/katrin>
- [KAT10] „The Robin Hood Method and its Implementation“, Internes KATRIN Dokument, J. A. Formaggio, T. J. Corona, P. Lazic
- [Kay08] „Neutrino mass, mixing, and flavor change“, B. Kayser März 2008, Particle Data Group Booklet Kapitel 13

- [Kra05] „Final results from phase II of the Mainz neutrino mass searchin tritium b decay“, C. Kraus, B. Bornschein, L. Bornschein, J. Bonn, B. Flatt, A. Kovalik, B. Ostrick, E.W. Otten, J.P. Schall, T.Thümmler, C. Weinheimer, Eur.Phys.J.C **40** (2005)
- [Led62] „Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos“, L. M. Lederman et. al., Phys. Rev. Lett. 9, 36 - 44 (1962)
- [Les06] „Massive neutrinos and cosmology“, J. Lesgourges and S. Pastor, <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2006.04.001>, Phys. Rep. **429** (2006) 307
- [Lob03] „The search for the neutrino mass by direct method in the tritium beta-decay and perspectives of study it in the project KATRIN“, V. M.Lobashev, Nucl. Phys. A **719** C153-C160 (2003)
- [Pau30] „Offener Brief an die Gruppe der Radioaktiven bei der Gauvereinstagung zu Tübingen“, wiedergegeben in: R.Kronis and V.Weisskopf (Eds.), Wolfgang Pauli, Collected Scientific Papers, Vol. 2, New York (1964) 1316-1317
- [Rei59] „Free Antineutrino Absorption Cross Section. I. Measurement of the Free Antineutrino Absorption Cross Section by Protons“, F. Reines und C. L. Cowan Jr., Phys. Rev. 113, 273 - 279 (1959)
- [Val04] „Elektromagnetisches Design für das Hauptspektrometer des KATRIN Experiments“, Diplomarbeit K. Valerius, 2004
- [Val09] „Spectrometer-related background processes and their suppression in the KATRIN experiment“, Dissertation K. Valerius, 2009
- [Voe08] „Implementierung der Multipole Boundary Element Methode für das KATRIN-Experiment“, Diplomarbeit S. Vöcking, 2008
- [Wol08] „Entfaltung der Energieverlustfunktion beim KATRIN Experiment“, Diplomarbeit I. Wolf, 2008
- [Zac09] „Electromagnetic design and field emission studies for the inner electrode system of the KATRIN mainspectrometer“, Diplomarbeit M. Zacher, 2009
- [Zac12] Dissertation M. Zacher, 2012
- [Zub04] „Neutrino Physics“, K. Zuber



# **Eigenständigkeitserklärung**

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und Zitate kenntlich gemacht habe.

