

**Elektromagnetisches Design  
für das  
Hauptspektrometer  
des KATRIN Experiments**

von

**Kathrin Valerius**

**Diplomarbeit in Physik**

angefertigt im

**Helmholtz-Institut für Strahlen- und Kernphysik**

vorgelegt der

**Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät**

der

**Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität**

**Bonn**

im Dezember 2004



Ich versichere, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Dr. C. Weinheimer

Korreferentin: Dr. U. Thoma



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Der Beginn der Neutrino-physik . . . . .	1
1.2 Die experimentelle Suche nach Neutrinos . . . . .	3
1.3 Neutrinos jenseits des Standardmodells . . . . .	5
1.4 Relevanz der Neutrinomasse für Teilchenphysik und Kosmologie . . . . .	9
<b>2 Das KATRIN Experiment</b>	<b>15</b>
2.1 Das Energiespektrum des Tritium- $\beta$ -Zerfalls . . . . .	15
2.2 Das Prinzip des MAC-E-Filters . . . . .	18
2.2.1 Grundlagen . . . . .	19
2.2.2 Auflösung und Transmissionsfunktion . . . . .	21
2.3 Der Gesamtaufbau des KATRIN Experiments . . . . .	24
2.3.1 Quelle und Transportsystem . . . . .	25
2.3.2 Vorspektrometer . . . . .	26
2.3.3 Hauptspektrometer . . . . .	27
2.3.4 Detektor . . . . .	27
2.4 Anforderungen an ein Tritium- $\beta$ -Experiment der nächsten Generation . . . . .	28
<b>3 Simulationsprogramme</b>	<b>31</b>
3.1 Simion 3D Version 7.0 . . . . .	32
3.2 Magnetfeldberechnung mit Bfield_3d . . . . .	34
3.3 Neue Werkzeuge zur Feldberechnung und Bahnverfolgung . . . . .	35
3.3.1 Berechnung axialsymmetrischer Magnetfelder . . . . .	36
3.3.2 Berechnung axialsymmetrischer elektrostatischer Felder . . . . .	40
3.3.3 Bahnverfolgungsrechnungen . . . . .	44

---

<b>4 Anforderungen an das elektromagnetische Design des Hauptspektrometers</b>	<b>47</b>
4.1 Transmissionseigenschaften	47
4.2 Adiabasiceigenschaften	48
4.3 Homogenität der Felder	49
4.4 Vermeidung von Teilchenfallen	52
<b>5 Erste Simulationen und Untersuchungen zur Numerik</b>	<b>55</b>
5.1 Simulationsrechnungen mit Simion 3D	55
5.1.1 Eingabe der Feldgeometrien des Hauptspektrometers in Simion 3D	55
5.1.2 Erstellung und Auswertung von Bahnverfolgungsdateien	59
5.2 Resultate der ersten Simulationen	61
5.3 Weitere numerische Probleme mit Simion 3D	63
5.4 Simulationen mit neu entwickelten Programmen	64
5.4.1 Revision der Ergebnisse der Simulationen mit Simion 3D	64
5.4.2 Untersuchungen zur numerischen Genauigkeit	67
<b>6 Studien zur Optimierung des Hauptspektrometerdesigns</b>	<b>71</b>
6.1 Änderung der Hochspannung an der Zusatzelektrode	72
6.2 Änderung der Geometrie der Zusatzelektrode	73
6.3 Modifikation der Form des Spektrometertanks	74
6.3.1 Untersuchungen zu Transmission und Feldhomogenität	74
6.3.2 Untersuchungen zur Adiabasie	78
6.4 Übergang von 22 m zu 24 m Spektrometerlänge	84
6.4.1 Einfluss der Designveränderungen auf die Feldhomogenität	86
6.4.2 Überprüfung der Transmissionseigenschaften	89
6.4.3 Abschließende Designveränderungen	93
6.4.4 Addendum: Maßnahmen zur Kompensation des Erdmagnetfeldes am Ort des Hauptspektrometers	96
<b>7 Simulationen zum Design der Drahtelektrode</b>	<b>97</b>
7.1 Motivation für den Einsatz einer quasi-masselosen Innenelektrode	97
7.2 Analytischer Abschirmungsfaktor	99
7.2.1 Abschirmung durch eine einzelne Lage von Drähten	99
7.2.2 Abschirmung durch eine Doppellage von Drähten	101
7.3 Werkzeuge zur Simulation der Drahtelektrode	103
7.4 Konzeption einer Drahtelektrodengeometrie für das Hauptspektrometer	105

---

<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>A Ergänzende Betrachtungen zu adiabatischen Invarianten</b>	<b>117</b>
<b>B Runge-Kutta-Verfahren</b>	<b>119</b>
<b>C Formel zur Startenergiekorrektur</b>	<b>123</b>
<b>D Konfigurationsparameter des elektromagnetischen Designs</b>	<b>125</b>
D.1 Elektrodenkonfiguration des 22-m-Spektrometers . . . . .	125
D.2 Magnetkonfiguration . . . . .	128
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>129</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>133</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>135</b>



# Kapitel 1

## Einführung

Die Existenz des Neutrinos wurde zu einer Zeit postuliert, als der „Teilchenzoo“, wie wir ihn heute kennen, erst aus sehr wenigen Arten von bekannten Teilchen bestand. Obwohl seitdem fast 75 Jahre vergangen sind, wissen wir noch erstaunlich wenig über das Neutrino. Dies ist umso verwunderlicher, da Neutrinos bei weitem keine seltenen Teilchen sind. Sie werden zum Beispiel bei Fusionsprozessen im Inneren von Sternen erzeugt, und jede Sekunde treffen auf der Erde etwa 65 Milliarden Neutrinos pro Quadratzentimeter ein, welche in der Sonne produziert wurden. Noch verblüffender mag es klingen, dass auch der menschliche Körper aufgrund seiner natürlichen Radioaktivität ca. 340 Millionen Neutrinos am Tag aussendet. Dass wir von diesem stetigen Teilchenfluss nichts bemerken und auch keine spürbaren Schäden davontragen, hat denselben Grund, der es auch so schwierig macht, die Eigenschaften des Neutrinos auf direkte Weise im Experiment zu messen: es tritt kaum mit seiner Umgebung in Wechselwirkung. Mit modernen Experimenten in der Neutrino-physik werden derzeit verschiedene Fragestellungen untersucht – etwa, ob das Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist oder welche Masse es besitzt.

### 1.1 Der Beginn der Neutrino-physik

Im Gegensatz zum Myon, nach dessen völlig unvorhergesehener Entdeckung im Jahr 1937 der spätere Nobelpreisträger Isidor Isaac Rabi erstaunt die Frage stellte: „Wer hat *das* bestellt?“, hatten die Physiker das Vorhandensein des Neutrinos bereits erwartet, lange bevor es experimentell gefunden wurde. Die Umstände, unter denen die Einführung des Neutrinos stattfand, sollen hier kurz beschrieben werden.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts begann mit der Entdeckung der Radioaktivität eine Epoche, in der sich die Forscher intensiv mit der Untersuchung der Struktur des Atoms und der Eigenschaften der radioaktiven Strahlung beschäftigten. Es wurden bald drei Strahlungsarten unterschieden<sup>1</sup>, welche man  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlung nannte. Während E. Rutherford und H. Geiger herausfanden, dass die  $\alpha$ -Strahlung aus Heliumkernen besteht [Rut08], wurden die

---

<sup>1</sup>Frühe Untersuchungen der Absorption radioaktiver Strahlung in Materie u.a. durch E. Rutherford ergaben, dass mehrere Komponenten mit unterschiedlichem Durchdringungsvermögen existieren. Die am leichtesten zu absorbierende Form wurde mit dem griechischen Buchstaben  $\alpha$  und die etwas durchdringendere mit  $\beta$  bezeichnet. Später fand P. Villard eine noch durchdringendere Strahlungsart [Vill00], die den Namen „ $\gamma$ -Strahlung“ erhielt.

$\beta$ -Strahlen als Ströme von Elektronen identifiziert<sup>2</sup>. Dass es sich bei  $\gamma$ -Strahlung um elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge kürzer als der von Röntgenstrahlung handelt, konnte Rutherford 1914 nachweisen [Rut14].

Es stellte sich heraus, dass  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Strahlung Spektren mit diskreten Linien aufweisen. Aufbauend auf diesem Befund nahm man zunächst an, dass dies auch für  $\beta$ -Strahlung der Fall sei.

Um diese These zu überprüfen, wurden etwa ab 1907 von mehreren Forschergruppen<sup>3</sup> sorgfältige Experimente durchgeführt, deren Ergebnisse jedoch viele Jahre lang kontrovers diskutiert wurden<sup>4</sup>. Dank der Entwicklung effizienterer Detektionsverfahren konnte James Chadwick im Jahr 1914 die Existenz eines  $\beta$ -Spektrums mit *kontinuierlicher* Energieverteilung zeigen [Cha14]. Dieses überraschende Ergebnis war lange umstritten – schließlich bedeutete es, dass die beim  $\beta$ -Zerfall aus dem Atomkern emittierten Elektronen alle möglichen Energien unterhalb einer gewissen Grenzenergie forttragen können. Geht man davon aus, dass beim Zerfall von Kernen derselben Art stets eine feste Energiemenge freigesetzt wird, so stellt sich die Frage, was mit dem Differenzbetrag geschieht. Die Vorstellung, dass  $\beta$ -Teilchen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Richtungen relativ zu dem zweiten Zerfallsprodukt, dem Tochterkern, ausgesandt werden, ist für einen solchen Zweikörperzerfall unvereinbar mit den Gesetzmäßigkeiten der Energie- und Impulserhaltung. Als Charles D. Ellis und William A. Wooster 1927 das Ergebnis von Chadwicks Experiment mittels einer unabhängigen Methode bestätigten [Ell27], schien die Frage nach der Natur des  $\beta$ -Spektrums zwar endgültig entschieden, jedoch standen die Wissenschaftler weiterhin vor dem Problem, dass der Prozess des  $\beta$ -Zerfalls scheinbar den Energieerhaltungssatz verletzte.

Um diesem Widerspruch zu entgehen, ersann Wolfgang Pauli im Dezember 1930 einen „verzweifelten Ausweg“ [Pau30], den er seinen Kollegen in einem offenen Brief mitteilte: er postulierte die Existenz eines elektrisch neutralen Teilchens mit Spin  $\frac{1}{2}$  im Atomkern, welches er vorläufig „Neutron“ nannte. Dieses sollte beim  $\beta$ -Zerfall zusammen mit dem Elektron emittiert werden, „derart, daß die Summe der Energien von Neutron und Elektron konstant ist“ [Pau30]. Durch die Beschreibung des  $\beta$ -Zerfalls als Dreikörperprozess sind somit die oben beschriebenen kinematischen Probleme gelöst. Über die Masse dieser Teilchen nahm Pauli an, dass sie etwa in der Größenordnung der Elektronenmasse liegen könnte, jedoch in keinem Fall ein Hundertstel der Protonenmasse überschreite. Als Chadwick im Jahr 1932 den heute als Neutron bezeichneten Kernbaustein entdeckte, konnte wegen dessen höherer Masse ausgeschlossen werden, dass es sich um das von Pauli vorgeschlagene Teilchen handelte. Für dieses wird seither die von Enrico Fermi eingeführte Bezeichnung „Neutrino“ (kleines Neutron) verwendet.

Fermi formulierte 1934 eine Theorie des  $\beta$ -Zerfalls unter Berücksichtigung des Neutrinos [Fer34], in welcher er erstmals die  $\beta$ -Radioaktivität durch eine neue Form der Wechselwirkung zu beschreiben versuchte. Er verwendete dazu einen an die elektromagnetische Strahlungstheorie angelehnten Formalismus<sup>5</sup>. In Fermis Darstellung sind weder das Elektron noch das Neutrino vor dem Zerfall im Kern vorhanden, sondern werden erst zum Zeitpunkt der

<sup>2</sup>An diesen Untersuchungen waren viele Forscher, u.a. Pierre und Marie Curie, H. Becquerel und W. Kaufmann beteiligt. Nach Kaufmanns Veröffentlichung aus dem Jahr 1902 [Kau02] bestand kein Zweifel mehr daran, dass  $\beta$ -Teilchen Elektronen sind.

<sup>3</sup>u.a. Lise Meitner, Otto Hahn, Otto von Baeyer, James Chadwick und Charles Wilson

<sup>4</sup>Die Geschichte der Studien zum  $\beta$ -Spektrum wird z.B. in [Pai86] ausführlich beschrieben.

<sup>5</sup>In seinem „Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen“ spricht Fermi von einer „quantitative[n] Theorie [...], in welcher man die Existenz des Neutrinos annimmt, und die Emission der Elektronen und Neutrinos aus dem Kern [...] mit einer ähnlichen Methode behandelt, wie die Emission eines Lichtquants aus einem angeregten Atom in der Strahlungstheorie“ [Fer34].

Emission erzeugt. Er vereint damit die Hypothese Paulis von der Neutrinoemission beim  $\beta$ -Zerfall mit Heisenbergs Vorstellung, dass der Atomkern nur aus „massiven“ Teilchen, nämlich Protonen und Neutronen, besteht. Fermis Theorie lieferte eine erfolgreiche Beschreibung der Lebensdauer und der Form des kontinuierlichen  $\beta$ -Spektrums und bildet die Grundlage der heutigen Theorie der *schwachen Wechselwirkung*.

Mittels seiner Formel für den Verlauf des Spektrums war Fermi in der Lage, eine Methode anzugeben, mit der sich aus der Kinematik des  $\beta$ -Zerfalls Informationen über die Ruhemasse des Neutrinos extrahieren lassen<sup>6</sup>. Das Prinzip dieses Verfahrens wird noch heute in aktuellen Experimenten zur Bestimmung der Neutrinozuhemasse verwendet (siehe Abschn. 2.1). Fermi leitete einen Ausdruck für eine „Energieverteilungskurve“ der Elektronen aus dem  $\beta$ -Zerfall her, deren Form insbesondere nahe der Grenzenergie  $E_0$  der Elektronen stark von der Ruhemasse  $\mu$  des Neutrinos abhängt. Abb. 1.1 zeigt den Verlauf des Endbereichs der Verteilungsfunktion für verschiedene große Neutrinozuhassen. Aus einem Vergleich mit den damals verfügbaren experimentellen Daten schloss Fermi, dass „die Ruhemasse des Neutrinos entweder Null oder jedenfalls sehr klein in bezug auf die Masse des Elektrons ist“ [Fer34]. In der Folgezeit wurde eine Vielzahl von Experimenten mit dem Ziel durchgeführt, diese Aussage zu präzisieren. Über ein modernes Experiment dieser Art, das KATRIN Experiment, wird im Rahmen dieser Arbeit berichtet werden.

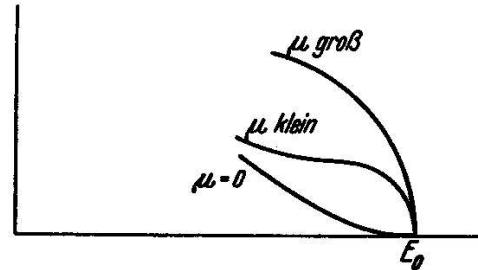


Abbildung 1.1: Von Fermi berechneter Einfluss der Neutrinozuhemasse auf die Form des  $\beta$ -Spektrums (Quelle: [Fer34], S. 171). Gezeigt sind die drei Fälle einer großen, kleinen bzw. verschwindenden Neutrinozuhasse  $\mu$ .

## 1.2 Die experimentelle Suche nach Neutrinos

Die Ideen Paulis und Fermis markieren den Beginn der Neutrinophysik – zumindest von der theoretischen Seite. Doch schon in seinem bereits zitierten Brief stellte Wolfgang Pauli den „radioaktiven Damen und Herren“ die bange Frage, „wie es um den experimentellen Nachweis eines solchen [Neutrinos] stände“ [Pau30]. Entscheidend für die Möglichkeit dieses Nachweises ist das Durchdringungsvermögen, oder besser gesagt die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit des Neutrinos mit Materie. Ausgehend von Fermis Theorie und der Überlegung, dass das Vorhandensein eines Prozesses zur *Erzeugung* von Neutrinos im Gegenzug auch die Existenz eines *Annihilations*prozesses impliziert, schätzten Hans Bethe und Rudolf Peierls [Bet34] den Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  für eine Reaktion ab, welche prinzipiell den Nachweis von Neutrinos ermöglichen sollte. Sie betrachteten den Prozess, in dem ein Neutrino beim Auftreffen auf einen Atomkern unter Emission eines Elektrons oder Positrons vernichtet wird, so dass sich die Kernladungszahl um eins verändert. Ihre einfache Abschätzung ergab  $\sigma \approx 10^{-44} \text{ cm}^2$  (für typische Energien  $E_\beta \approx 2 - 3 \text{ MeV}$ , entsprechend einer Durchdringungstiefe von  $10^{16} \text{ km}$  in dichter Materie) – ein Wert, der verglichen mit den bis dahin bekannten Wechselwirkungsmechanismen so unglaublich gering ist, dass Bethe und Peierls daraus schlossen, es sei praktisch unmöglich, Prozesse dieser Art experimentell zu beobachten [Bet34]. Dass der direkte Nachweis von Neutrinos schließlich doch gelang, ist vor allem zwei Umständen zu verdanken: zum

<sup>6</sup>Gleichzeitig und unabhängig von Fermi hat auch F. Perrin [Perr33] auf den Zusammenhang zwischen der Form des  $\beta$ -Spektrums und der Neutrinozuhasse hingewiesen. Bezuglich der Größe dieser Masse kam er zu der gleichen Schlussfolgerung wie Fermi.

einen der Entwicklung enorm starker künstlicher Neutrinoquellen, sowie zum anderen der Tatsache, dass die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit der Neutrinos bei höheren Energien zunimmt (diese Energieabhängigkeit geht schon aus Fermis Modell hervor).

Erst in den 1950er Jahren war die Technologie so weit fortgeschritten, dass den Experimentatoren Mittel zur „Neutrinomassenproduktion“ in Gestalt von Kernreaktoren zur Verfügung standen. Die Spaltprodukte im Reaktor sind aufgrund ihres Neutronenüberschusses  $\beta$ -Strahler und senden daher Antineutrinos ( $\bar{\nu}$ ) aus<sup>7</sup>. Frederick Reines und Clyde L. Cowan errichteten nahe eines Kernreaktors eine Apparatur bestehend aus mehreren Lagen von Flüssigszintillationsdetektoren, welche die Behälter mit dem Nachweismedium, wässriger Kadmiumchloridlösung, umgaben. Die Reaktor-Antineutrinos werden beim inversen  $\beta$ -Zerfallsprozess

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+ \quad (1.1)$$

durch ein Proton in der wässrigen Lösung eingefangen, wobei ein Neutron und ein Positron entstehen. Letzteres annihielt mit einem Elektron aus der umgebenden Materie zu zwei monoenergetischen Photonen und liefert so im Szintillator ein Signal. Das Neutron hingegen wird erst durch Stöße mit den Wassermolekülen moderiert und dann am Kadmium absorbiert, welches für den Neutroneneinfang einen erhöhten Wirkungsquerschnitt aufweist. Der dadurch angeregte Kadmiumkern geht unter Aussendung von  $\gamma$ -Strahlung in den Grundzustand über, wobei dieses Signal gegenüber dem des Positrons um eine charakteristische Zeit von einigen  $\mu\text{sec}$  verzögert auftritt. Auf diese Weise konnten Reines und Cowan einen Wirkungsquerschnitt von  $\sigma = (11 \pm 2.6) \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2$  für die Reaktion (1.1) (bei  $E_\nu \leq 8 \text{ MeV}$ ) ermitteln [Rei59], was mit der groben Abschätzung von Bethe und Peierls gut übereinstimmt.

Nur wenige Jahre nachdem das Neutrino endlich gefunden worden war, konnte von einer Gruppe von Wissenschaftlern um Melvin Schwartz, Leon M. Lederman und Jack Steinberger gezeigt werden, dass es sogar mehrere Arten von Neutrinos gibt [Dan62]. In dem Experiment erzeugten sie mit Hilfe eines Teilchenbeschleunigers einen Strahl von Pionen und fanden heraus, dass die im Pionzerfall

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu} \quad (1.2)$$

entstehenden hochenergetischen Neutrinos bei Wechselwirkungen mit Materie zwar die Erzeugung von  $\mu^\pm$ , aber nicht die von  $e^\pm$  induzieren können. Sie schlossen daraus auf die Existenz von mindestens zwei verschiedenen Neutrinosorten, von denen die eine ( $\nu_e, \bar{\nu}_e$ ) mit  $e^\pm$  und die andere ( $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ ) mit  $\mu^\pm$  assoziiert ist.

Doch auch dieses Bild beschreibt die Neutrinos noch nicht vollständig. Das sogenannte *Standardmodell* der Elementarteilchenphysik, das etwa seit den 1960er Jahren schrittweise aufgebaut wurde, teilt die fundamentalen Bausteine der bekannten Materie in die Gruppen der Quarks und Leptonen ein, welche noch durch die Wechselwirkungsträger ergänzt werden. Quarks und Leptonen sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, die nach aufsteigender Masse in drei „Familien“ oder „Generationen“ angeordnet werden. Die Quarks treten in sechs Sorten (*flavours*) (u, d, c, s, t und b) in jeweils drei „Farben“ (*colours*) auf; ihre elektrischen Ladungen sind Vielfache von  $\pm \frac{1}{3} \text{ e}$ . Hinzu kommen noch die entsprechenden Antiteilchen. Bei den Leptonen bilden ( $\nu_e, e$ ) und ( $\nu_\mu, \mu$ ) je eine Familie, wobei die Neutrinos ungeladen sind und ihre Lepton-Partner eine Elementarladung  $\pm \text{e}$  tragen. Das Standardmodell weist jedoch noch eine dritte Leptonfamilie ( $\nu_\tau, \tau$ ) auf. Seit der Entdeckung des elektrisch geladenen Bestandteils, des  $\tau$ -Leptons, im Jahr 1975 durch Martin L. Perl et al. [Per75], bestand wenig Zweifel daran,

<sup>7</sup>Nach Konvention wird beim  $\beta^-$ -Zerfall zusammen mit dem Elektron ein Antineutrino emittiert.

dass auch der neutrale Partner, das  $\nu_\tau$ , existieren sollte. Es wurde jedoch erst etwa 25 Jahre später am DONUT-Experiment gefunden [Kod01].

Angesichts dieser Entwicklungen stellt sich die Frage, ob es wirklich nur drei oder vielleicht doch mehr Neutrinoarten gibt. Die Zahl  $N_\nu$  der leichten Neutrino-Generationen<sup>8</sup> konnte allerdings schon vor der Entdeckung des  $\nu_\tau$  anhand der präzisen Vermessung der Zerfallsbreite des  $Z^0$ -Bosons am LEP-Beschleuniger (von 1989 bis 2000 am CERN in Betrieb) recht genau bestimmt werden. Als Ergebnis einer kombinierten Analyse aller vier LEP-Experimente wird  $N_\nu = 2.994 \pm 0.012$  angegeben [PDG04].

### 1.3 Neutrinos jenseits des Standardmodells

Lange nach Paulis eher zaghafter Einführung der Neutrinos sind diese nun als elementare Bestandteile fest in das Standardmodell der Teilchenphysik integriert. Dieses geht davon aus, dass Neutrinos neben ihrer fehlenden elektrischen Ladung auch kein elektrisches oder magnetisches Dipolmoment aufweisen (und somit nicht elektromagnetisch wechselwirken können). Außerdem sind Neutrinos im Standardmodell masselos. Den übrigen Fermionen wird durch den Mechanismus sogenannter Yukawa-Kopplungen zwischen rechts- und linkshändigen Komponenten der Fermionfelder eine Masse zugewiesen (die Massen selbst werden vom Modell jedoch nicht vorhergesagt und müssen stattdessen als freie Parameter experimentell bestimmt werden). Nun hat die schwache Wechselwirkung, welche als einzige für die Erzeugung von Neutrinos in Frage kommt, die besondere Eigenschaft, dass sie „maximal paritätsverletzend“ ist [Wu57, Gar57]; d.h. Neutrinos sind immer linkshändig ( $\nu_L$ ), während Antineutrinos nur als rechtshändige  $\bar{\nu}_R$  vorkommen sollten. Goldhaber et al. konnten 1958 in einem Experiment direkt die negative Helizität des Neutrinos zeigen [Gol58]. Dementsprechend gibt es im Fall der maximalen Paritätsverletzung für Neutrinos keine Massenterme analog zu denen der anderen Fermionen.

Seit einigen Jahren mehren sich jedoch die Beweise dafür, dass Neutrinos eine von null verschiedene Masse besitzen. So hat eine Reihe von Experimenten seit den 1990er Jahren gezeigt, dass Neutrinos sogenannte Flavour-Oszillationen durchführen können, bei denen sich eine Neutrinoart über eine gewisse Flugstrecke hinweg in eine andere Art umwandelt. Dieses Phänomen wurde inzwischen bei Neutrinos aus verschiedenen Quellen (atmosphärische, solare, Beschleuniger- und Reaktorneutrinos) gefunden. Wie kann man den Effekt in eine mathematische Formulierung fassen?

Dazu stelle man sich zunächst vor, dass ein Neutrino des Flavour-Eigenzustands  $|\nu_\alpha\rangle$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) in einem Prozess der schwachen Wechselwirkung zusammen mit einem Lepton  $\ell_\alpha$  erzeugt wird. Dieser Flavour-Zustand ist jedoch nicht gleichzeitig Eigenzustand zum Massenoperator  $M$ , sondern lässt sich mit Hilfe einer unitären Mischungsmatrix  $U$  als lineare Superposition der Massen-Eigenzustände  $|\nu_i\rangle$  zu den Eigenwerten  $m_i$  (hier:  $i = 1, 2, 3$ ) darstellen (vgl. z.B. [Sch97]):

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad (1.3)$$

$$\text{bzw. umgekehrt: } |\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{i\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle. \quad (1.4)$$

---

<sup>8</sup>„Leicht“ bedeutet in diesem Kontext, dass die Neutrinomasse  $m_\nu$  kleiner ist als Masse des  $Z^0$ -Bosons, genauer gesagt  $m_\nu \leq m_{Z^0}/2$ .

Allgemein können die  $(n-1)^2$  unabhängigen Parameter einer unitären  $(n \times n)$ -Matrix durch  $\frac{1}{2}n(n-1)$  *Mischungswinkel* einer  $n$ -dimensionalen Rotationsmatrix und  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  *Phasen* ausgedrückt werden. Im  $(3 \times 3)$ -Fall ergeben sich somit drei Mischungswinkel und eine Phase<sup>9</sup>, analog zur CKM-Matrix bei der Quark-Mischung.

Für die zeitliche Entwicklung des Masseneigenzustandes ergibt sich durch Anwendung der Schrödinger-Gleichung (setze  $\hbar = 1$  und  $c = 1$ ):

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (1.5)$$

$$\text{mit } E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \approx E + \frac{m_i^2}{2E} \text{ falls } p \gg m_i, \quad (1.6)$$

d.h. die unterschiedlichen Masseneigenzustände bewegen sich bei  $m_i \neq m_j$  für  $i \neq j$  mit verschiedenen Phasenfaktoren fort und es gilt nach der Zeit  $t$  für den ehemals reinen Flavour-Zustand:

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \stackrel{(1.4)}{=} \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle. \quad (1.7)$$

Nun soll das Neutrino nach Durchlaufen einer Strecke  $L$  durch eine weitere Wechselwirkung unter Produktion eines Leptons  $\ell_\beta$  detektiert werden. Durch Neutrino-Flavour-Umwandlungen kann es dazu kommen, dass  $\ell_\alpha$  und  $\ell_\beta$  Leptonen unterschiedlicher Art sind. Die Übergangswahrscheinlichkeit  $P(\alpha \rightarrow \beta; t) \equiv |\langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle|^2$  berechnet sich zu

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \quad (1.8)$$

$$= \sum_i |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t}. \quad (1.9)$$

Da wir ein ultrarelativistisches Neutrino betrachten wollen, entspricht die Strecke  $L$  etwa der Flugzeit  $t$ . Wir können daher mit Gl. (1.6) umformen:

$$(E_i - E_j) t \approx \frac{m_i^2 - m_j^2}{2} \cdot \frac{L}{E} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2}{2} \cdot \frac{L}{E}. \quad (1.10)$$

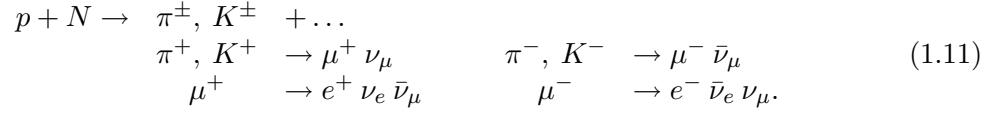
Der erste Term in Gl. (1.9) steht für eine zeitgemittelte Übergangswahrscheinlichkeit, während der zweite Summand periodisch mit  $t$  (bzw.  $L/E$ ) variiert. Es handelt sich tatsächlich um eine *Oszillation* der Übergangswahrscheinlichkeit als Funktion von  $L/E$ . Dieses Verhalten ist nur dann möglich, wenn mindestens eine der Neutrinomassen  $m_i \neq 0$  ist, da sonst alle  $\Delta m_{ij}^2$  verschwinden und damit auch der oszillierende Term. Außerdem wurde Gleichung (1.9) unter der Voraussetzung der Neutrinomischung hergeleitet, was impliziert, dass die Leptonflavourzahlen  $L_\alpha$  nicht streng erhalten sind.

Als wichtige Tatsache lässt sich festhalten, dass die experimentelle Beobachtung von Neutrinooszillationen gleichzeitig eine Evidenz für nichtverschwindende Neutrinomassen darstellt. Wie aus Gl. (1.9) und (1.10) hervorgeht, lassen sich durch solche Beobachtungen zwar Differenzen von Massenquadraten  $\Delta m_{ij}^2$  bestimmen, nicht jedoch die Absolutbeträge der Massen  $m_i$ .

Es sei hier erwähnt, dass die bisherige vereinfachende Beschreibung nur für Neutrinooszillationen im Vakuum gilt. Beim Durchqueren von Materie treten weitere, recht komplexe Effekte auf, welche das Oszillationsverhalten signifikant beeinflussen können.

<sup>9</sup>Dieser Phasenwinkel  $\delta$  sowie zwei mögliche relative Phasenwinkel  $\varphi_{1,2}$  zwischen den Massen  $m_i$  können zu einer Verletzung der CP-Invarianz führen.

**Flavour-Oszillationen bei atmosphärischen Neutrinos** Durch Wechselwirkung hochenergetischer kosmischer Strahlung – bestehend aus Protonen und zu geringerem Anteil aus schwereren Kernen – mit Stickstoff- oder Sauerstoffkernen in den oberen Schichten der Erdatmosphäre entstehen Neutrinos, etwa durch Reaktionsketten wie



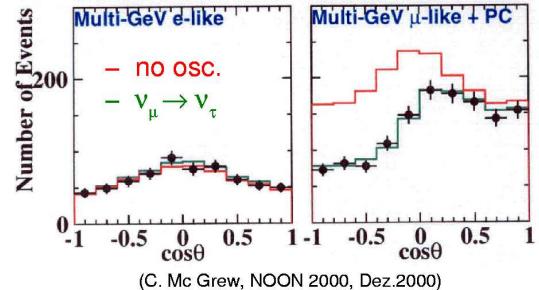
Die Energien solcher „atmosphärischen“ Neutrinos können zwischen einigen MeV und bis zu einigen  $10^8$  MeV betragen (vgl. [Sch97], S. 86), wobei der Fluss zu höheren  $E_\nu$  hin rapide abnimmt. Für die Flavour-Zusammensetzung im Sub-GeV-Bereich gilt näherungsweise (vgl. (1.11))  $\nu_\mu : \bar{\nu}_\mu : \nu_e : \bar{\nu}_e = 2 : 2 : 1 : 1$ ; im Multi-GeV-Bereich verschiebt sich das Verhältnis  $\nu_\mu : \nu_e$  geringfügig zu höheren Werten hin. Aufgrund des als isotrop angenommenen einfallenden kosmischen Strahlungsflusses sowie der sphärischen Symmetrie des „Targets“, der Atmosphäre, wird ein bezüglich des Horizonts (Zenitwinkel  $\vartheta$ ) auf/ab-symmetrischer Neutrinoefluss erwartet.

Im Jahr 1998 wurden von der Super-Kamiokande-Kollaboration (SK) erste Ergebnisse vorgestellt, welche auf das Vorhandensein von Flavour-Oszillationen bei atmosphärischen Neutrinos schließen lassen. Der Super-Kamiokande-Detektor besteht aus einem mit insgesamt 50 kt ultrareinen Wassers gefüllten Tank, welcher zum Schutz vor langreichweiten atmosphärischen Myonen etwa 1 km tief unter der Erdoberfläche platziert ist. Neutrinos, welche im Tankvolumen wechselwirken („geladener Strom“:  $\nu_\alpha + N \rightarrow \ell_\alpha^\pm + X$  bzw.  $\bar{\nu}_\alpha + N \rightarrow \ell_\alpha^\pm + X$ ), können mittels der durch die Endzustandsleptonen  $\ell_\alpha^\pm$  erzeugten Čerenkov-Strahlung nachgewiesen werden. Zu diesem Zweck ist der Tank mit mehreren tausend Photomultipliern ausgekleidet. ( $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ )- und ( $\nu_e/\bar{\nu}_e$ )-induzierte Ereignisse können dabei anhand der Schärfe der Čerenkov-Ringe unterschieden werden.

Bei SK fand man ein zenitwinkelabhängiges Defizit von Myonneutrinos gegenüber Elektronen neutrinos [Fuk98], welches sich durch das Doppelverhältnis

$$R \equiv \frac{(\mu^\pm/e^\pm)_{\text{data}}}{(\mu^\pm/e^\pm)_{\text{MC}}} < 1 \tag{1.12}$$

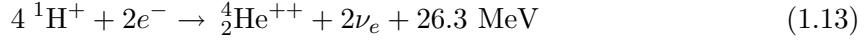
ausdrücken lässt. Dabei würde man den Wert  $R = 1$  erwarten, falls die Monte-Carlo-Simulation  $(\mu^\pm/e^\pm)_{\text{MC}}$  die gemessenen Daten  $(\mu^\pm/e^\pm)_{\text{data}}$  zutreffend beschreibt. Gemessen wurde jedoch  $R = 0.63 \pm 0.03 \pm 0.05$  (Sub-GeV) bzw.  $R = 0.65 \pm 0.05 \pm 0.08$  (Multi-GeV) [Fuk98]. Die Abweichungen von  $R = 1$  sind signifikant und können nicht durch eine mangelnde Genauigkeit der MC-Simulationen erklärt werden. Vielmehr sind die Daten konsistent mit einem Neutrino-Oszillations-Szenario, bei dem der Zwei-Komponenten-Beitrag  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$  dominiert (siehe Abb. 1.2). Die gefundene  $\cos \vartheta$ -Abhängigkeit wird dadurch erklärt, dass das Neutrino je nach Einfallsinkel von seinem Entstehungsort in der Atmosphäre bis zum Detektor eine unterschiedlich lange Wegstrecke  $L$  zurücklegt ( $L_{\min} \approx 20$  km gegenüber  $L_{\max} \approx 13000$  km), was zu verschiedenen großen Übergangswahrscheinlichkeiten  $P$  führt. Als *best fit*-Oszillationsparameter werden die Werte



**Abbildung 1.2: Evidenz für Zwei-Flavour-Oszillationen aus dem Superkamiokande-Experiment.** Die beobachtete Anzahl der  $e^\pm$ - und  $\mu^\pm$ -Ereignisse im Multi-GeV-Bereich als Funktion von  $\cos \vartheta$  wird mit den für nicht vorhandene Oszillationen bzw. für  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ -Oszillationen erwarteten Werten verglichen.

$1.9 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 < \Delta m_{\text{atm}}^2 < 3.0 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  und  $\sin^2(2\theta_{\text{atm}}) > 0.9$  (90 % C. L.) angegeben [Ash04], was mit „maximaler Mischung“  $\sin^2(2\theta_{\text{atm}}) = 1$  verträglich ist.

**Flavour-Oszillationen bei solaren Neutrinos** Wie alle Sterne ist auch die Sonne aufgrund der in ihrem Inneren stattfindenden thermonuklearen Fusionsprozesse eine starke Quelle von Neutrinos. Die komplizierten Reaktionen lassen sich zu der einfachen Nettobilanz



zusammenfassen, wobei die zwei entstehenden Positronen gleich mit zwei Elektronen annihi-lieren; d.h. in der Sonne werden ausschließlich  $\nu_e$  produziert. Flavour-Oszillationen dieser solaren Neutrinos wurden bereits seit über 30 Jahren beobachtet, ohne jedoch zunächst als solche identifiziert werden zu können. Ray Davis et al. erhielten in einem berühmten gegen Ende der 1960er Jahre begonnenen Experiment das Ergebnis, dass nur etwa ein Drittel des erwarteten Neutrinoflusses in dem zugänglichen Energiebereich in ihrem unterirdischen Detektor nachgewiesen wurde [Dav94, Cle95, Dav96]. Sie verwendeten dazu einen mit 350 kt Tetrachlorethylen gefüllten Tank, in dem durch eintreffende Neutrinos die Reaktion  $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$  induziert wurde. Das radioaktive Argon konnte nach Extraktion aus dem Tank durch seinen Rückzeraffall in Chlor detektiert werden. Später wurden auch von weiteren Experimenten zu ge-ringre Werte für den solaren Neutrinofluss gemessen, darunter GALLEX, SAGE, Kamiokande und das bereits erwähnte Nachfolgeexperiment Super-Kamiokande. Dieses *Solare Neutrino-problem* warf die Frage auf, ob all die verschiedenen Experimente falsche Ergebnisse lieferten, das bislang so erfolgreiche Modell von der Sonne inkorrekt war, oder mit den Neutrinos auf dem Weg zur Erde etwas eigenartiges passierte. Erst kürzlich konnte das Rätsel durch den eindeutigen Nachweis von Flavour-Oszillationen bei solaren Neutrinos gelöst werden. Hierzu war es trotz aller bisherigen Messungen des solaren  $\nu_e$ -Flusses notwendig, die Ergebnisse des SNO-Experiments („Sudbury Neutrino Observatory“) abzuwarten, welches in der Lage ist, gleichzeitig die Flüsse  $\Phi_e$  und  $\Phi_{\mu,\tau}$  aller drei Neutrinoflavours zu bestimmen [SNO]. Auch der SNO-Detektor besteht aus einem tief unter der Erdoberfläche aufgebauten Tank mit etwa 1000 t  $\text{D}_2\text{O}$  (schweres Wasser), dessen Innenseite durch 9600 Photomultiplier abgedeckt ist. Das Besondere an SNO ist, dass drei Reaktionstypen mit unterschiedlicher Sensitivität auf die Neutrinoarten  $\nu_\alpha$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) beobachtet werden:

$$\begin{aligned} \nu_e + d &\rightarrow p + p + e^- \quad (\text{CC, charged current}), & \Phi_{\text{CC}} &= \Phi_e, \\ \nu_\alpha + d &\rightarrow p + n + \nu_\alpha \quad (\text{NC, neutral current}), & \Phi_{\text{NC}} &= \Phi_e + \Phi_{\mu\tau}, \\ \nu_\alpha + e^- &\rightarrow \nu_\alpha + e^- \quad (\text{ES, elastic scattering}), & \Phi_{\text{ES}} &= \Phi_e + 0.16 \Phi_{\mu\tau}. \end{aligned}$$

Es konnte in überzeugender Weise gezeigt werden, dass zwar ein Teil von  $\Phi_e$  auf dem Weg von der Sonne zur Erde verschwindet, dass jedoch gleichzeitig Komponenten von  $\Phi_\mu$  und  $\Phi_\tau$  auftreten, welche den Verlust gerade so kompensieren, dass sich der gesamte nach dem Sonnenmodell erwartete solare Neutrinofluss ergibt<sup>10</sup>. Das SNO-Ergebnis [Ahm03] lautet

$$\Phi_{\nu, {}^8\text{B}}^{\text{SNO}} = 5.21 \pm 0.27 \text{ (stat)} \pm 0.38 \text{ (syst.)} \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (1.14)$$

was sehr gut mit der Vorhersage

$$\Phi_{\nu, {}^8\text{B}}^{\text{SSM}} = 5.05^{+1.01}_{-0.81} \times 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (1.15)$$

des *Standard Solar Model* (SSM) übereinstimmt [Bah01, Ahm02]. Die SNO-Daten ergeben best fit-Mixing-Parameter von  $\Delta m_{\text{solar}}^2 = 7.1^{+1.2}_{-0.6} \times 10^{-5} \text{ eV}^2$  und  $\theta_{\text{solar}} = 32.5^{+2.4}_{-2.3} \text{ Grad}$  [Ahm03]. Im Fall der solaren Neutrinos ist die Mischung also anscheinend nicht maximal.

<sup>10</sup>Ähnlich wie Super-Kamiokande kann SNO nur den hochenergetischeren Anteil des solaren Neutrinoflusses detektieren, welcher hauptsächlich in der Reaktion  ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$  entsteht (sogenannte  ${}^8\text{B}$ -Neutrinos).

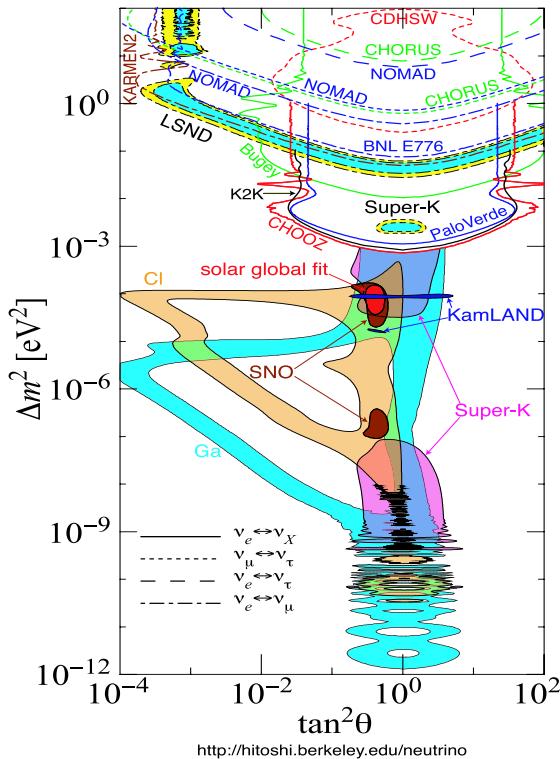
**Flavour-Oszillationen bei Beschleuniger- und Reaktorneutrinos** Hinweise auf Flavour-Oszillationen sind nicht nur bei Neutrinos aus natürlichen Quellen, sondern auch bei „künstlich“ erzeugten Neutrinos gefunden worden. Beim K2K-Experiment wurde der Super-Kamiokande-Detektor benutzt, um Neutrinos des etwa 250 km weit entfernten KEK-Beschleunigers zu untersuchen. Dieser stellt einen  $\nu_\mu$ -Strahl mit einer mittleren Energie von  $E_\nu = 1.3$  GeV zur Verfügung, dessen Fluss zunächst mittels eines Detektors sehr nahe dem Entstehungsort bestimmt wird. Aufgrund des  $L/E$ -Verhältnisses erwartet man eine Zwei-Flavour-Umwandlung ganz ähnlich der bei atmosphärischen Neutrinos. Es wurde tatsächlich ein zu geringer  $\nu_\mu$ -Fluss beobachtet, welcher sich durch Neutrinooszillationen in einem Parameterbereich ( $\Delta m^2$ ,  $\sin^2(2\theta)$ ) in Übereinstimmung mit dem für atmosphärische Neutrinos erklären lässt [Ahn03].

Auch Reaktorneutrinos ( $\bar{\nu}_e$ ) wurden im Hinblick auf das Oszillationsphänomen untersucht. Bei KamLAND (Kamioka Liquid-scintillator Anti-Neutrino Detector) handelt es sich ebenfalls um ein sogenanntes *disappearance experiment*, d.h. es wird nach dem Verschwinden von Elektronantineutrinos durch Flavour-Oszillationen  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{x \neq e}$  gesucht. Im Umkreis von wenigen 100 km um den Standort des Experiments in Japan liegen ca. 70 japanische und südkoreanische Atomreaktoren, welche zwar starke, aber isotrope Neutrinoquellen darstellen. Als Nachweismedium werden 1000 t eines organischen Flüssigszintillators eingesetzt. In 515 Tagen Messzeit konnten 258 Ereignisse beobachtet werden, verglichen mit 365 erwarteten Ereignissen im Fall nicht vorhandener Oszillationen [Ara04]. Unter Annahme einer hypothetischen wohldefinierten Neutrino-Laufstrecke  $L_0 = 180$  km konnte ein „gestörtes Spektrum“ rekonstruiert werden, d.h. das Verhältnis aus tatsächlich gemessenen und erwarteten Ereignissen variiert in charakteristischer Weise mit  $L_0/E_\nu$ . Eine für den Fall von Neutrinooszillationen zwischen zwei Arten errechnete Kurve beschreibt dieses gemessene Spektrum sehr gut. So-wohl die solaren Neutrinos als auch die KamLAND-Resultate können durch die gleichen Oszillationsparameter beschrieben werden (vgl. Abb. 1.3). Eine globale Zwei-Flavour-Analyse von KamLAND- und solaren Daten ergab die Werte  $\Delta m^2 = 8.2_{-0.5}^{+0.6} \times 10^{-5}$  eV<sup>2</sup> und  $\tan^2 \theta = 0.40_{-0.07}^{+0.09}$  [Ara04].

## 1.4 Relevanz der Neutrinomassen für Teilchenphysik und Kosmologie

Die vielfältigen Evidenzen für Neutrinooszillationen zeigen, dass Neutrinos doch eine – wenn auch offenbar sehr geringe – Masse besitzen müssen. Damit ist das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (SM), welches sich in so vielen Bereichen hervorragend bewährt hat, zumindest unvollständig.

Es existieren diverse Ansätze, um die experimentellen Befunde in theoretischen Modellen „jenseits des Standardmodells“ zu berücksichtigen. Dabei kommen im Wesentlichen drei Mechanismen zur Erzeugung kleiner Neutrinomassen in Betracht: 1) der sogenannte *Seesaw-Mechanismus* vom Typ I oder II, 2) supersymmetrische Modelle und 3) Modelle mit zusätzlichen Dimensionen. Der scheinbar einfachste Weg besteht darin, das Standardmodell um rechtshändige Neutrinos  $\nu_R$  zu erweitern, so dass über Yukawa-Kopplungen und Higgs-Mechanismus Massenterme der Art  $\mathcal{L} = -m_D \bar{\nu}_L \nu_R + h.c.$  möglich werden (sog. *Dirac-Massen*). Hierbei verschärft sich jedoch das ohnehin im Standardmodell schon bestehende Problem, dass nämlich keine natürliche Erklärung für die Größen der Fermionmassen und insbesondere für die im Vergleich zu den geladenen Leptonen so kleinen Neutrinomassen vorhanden ist.



**Abbildung 1.3: Neutrino-Oszillationsparameter: Ergebnisse bisheriger Oszillationsexperimente.** Der Graph zeigt den Status der Ausschlusskurven bezüglich der Parameter  $\Delta m^2$  und  $\tan^2 \theta$  nach der Konferenz *Neutrino 2004*. Quelle: [Mur04], dort sind auch die zur Erstellung des Graphen verwendeten Datensätze referenziert.

Im SM ist keine Eichsymmetrie bekannt, die es verbietet, den rechtshändigen Neutrinos Massenterme der Form  $\mathcal{L} = -M_R \bar{\nu}_R^c \nu_R + h.c.$  zuzuweisen<sup>11</sup> (sog. *Majorana*-Massen), wobei die Konstante  $M_R$  sehr groß sein kann. Aus der Kombination „normaler“ Dirac-Massen und „schwerer“ rechtshändiger Neutrinos lässt sich dann im Rahmen des *Seesaw*-Mechanismus I. Art ein Szenario konstruieren, in dem zwei Sorten von Majorana-Neutrinos existieren: die leichten Neutrinos  $\nu_i$  haben sehr kleine Massen  $m_\nu \approx m_D^2/M_R \ll m_D$ , die „superschweren“ Neutrinos  $N_i$  hingegen haben  $m_N \approx M_R$ . In diesem Fall wird also die Kleinheit der Neutrinos massen dadurch motiviert, dass die Skala von  $m_\nu$  gegenüber den Fermionmassen  $m_D$  um einen Faktor  $m_D/M_R \ll 1$  unterdrückt ist. Die konkreten Vorhersagen für die Neutrino-massen mit Hilfe des *Seesaw*-Mechanismus sind jedoch stark modellabhängig (vgl. [Sch97], Kap. 6.1.2), so dass eine Festlegung der  $\nu$ -Massenskala helfen könnte, die Anwendbarkeit verschiedener Modelle zu prüfen.

Die erwähnten unterschiedlichen Massenterme spiegeln die Tatsache wider, dass Neutrinos – anders als Quarks und die geladenen Leptonen – aufgrund ihrer Neutralität ihre eigenen Antiteilchen sein können. Ob sie es tatsächlich sind, hängt von dem Mechanismus ab, durch den sie ihre Masse erhalten<sup>12</sup>. Hiermit ist gemeint, dass bei der Einführung eines Dirac-Massenterms die Leptonenzahl  $L$  erhalten bleibt, welche zwischen  $(\nu, \ell^-)$  einerseits und  $(\bar{\nu}, \ell^+)$  andererseits unterscheidet<sup>13</sup>. Neutrino- und Antineutrino-Masseneigenzustände sind verschieden in der Hinsicht, dass  $L(\bar{\nu}_i) = -L(\nu_i)$  gilt. Der Majorana-Massenterm hingegen ist leptonenzahl-verletzend; das Unterscheidungskriterium zwischen Neutrino und Antineutrino ist nicht mehr gegeben. Für Majorana-Neutrinos der Helizität  $h$  gilt  $\bar{\nu}_i(h) = \nu_i(h)$ .

Die Frage nach der Natur des Neutrinos kann mit Hilfe des neutrinolesen Doppelbetazerfalls

<sup>11</sup>  $\nu^c$  steht für den ladungskonjugierten Spinor zu  $\nu$ .

<sup>12</sup> Bezüglich der Erläuterung der Neutrino-Antineutrino-Relation siehe B. Kayser: *Neutrino Mass, Mixing, and Flavour Change* in [PDG04].

<sup>13</sup> Man beachte, dass das Standardmodell zwar konsistent mit der Erhaltung der Leptonenzahl ist, jedoch keine Symmetrie beinhaltet, welche diese Invarianz explizit verlangt.

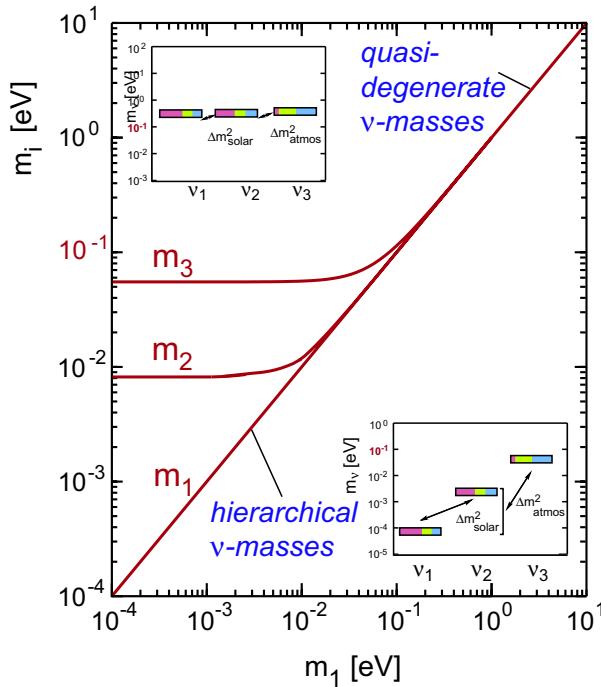
$(0\nu\beta\beta)$  aufgeklärt werden. Der dominante Mechanismus für Prozesse der Art

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2 e^- \quad (1.16)$$

erfordert  $\bar{\nu} = \nu$ , so dass ein positives  $0\nu\beta\beta$ -Signal als Evidenz für Majorana-Neutrinos anzusehen ist. Da die Amplitude für den Zerfall (1.16) proportional zu der effektiven Masse  $|\langle m_{ee} \rangle| \equiv |\sum_i e^{-i\alpha_i} |U_{ei}|^2 m(\nu_i)|$  ist (vgl. [Alt03]), bietet sich hier eine Möglichkeit zur direkten Bestimmung der absoluten Neutrinomassenskala. Anhand einer Analyse der Daten des Heidelberg-Moskau-Experiments, welches nach  $0\nu\beta\beta$  in  $^{76}\text{Ge}$  sucht, wurde von einem Teil der Gruppe der Wert  $|\langle m_{ee} \rangle| = (0.2 - 0.6) \text{ eV}$  (99.73 % C. L.) veröffentlicht [Kla04], der jedoch noch weiterer experimenteller Bestätigung bedarf.

Geht man von drei Neutrino-Masseneigenzuständen aus, so gibt es auch nur drei quadratische Massendifferenzen, welche die Relation  $\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 = 0$  erfüllen müssen. Aus den atmosphärischen bzw. solaren Neutrinooszillationsdaten lassen sich zwei Werte  $\Delta m_{\text{atm}}^2 \lesssim 3 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  und  $\Delta m_{\text{solar}}^2 \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$  extrahieren, welche von unterschiedlicher Größenordnung sind. Über die Anordnung der Masseneigenzustände mit zunehmender Masse wird allerdings keine Aussage gemacht. Abb. 1.4 zeigt zwei mögliche Anordnungen, welche im „normalgeordneten“ Fall  $m_1 < m_2 < m_3$  je nach Festsetzung des „Skalennullpunktes“  $m_1$  (kleinster Masseneigenwert) auftreten können. Die verschiedenen Modelle zur Erklärung der Neutrinomassen bilden zwei Gruppen, von denen eine das hierarchische und die andere das quasi-entartete Massenszenario bevorzugt. Hier gilt das bereits oben angeführte Argument, dass eine direkte Bestimmung der Neutrinomassen zu einer Diskriminierung zwischen den verschiedenen Modellvorstellungen führen kann. Die Unterscheidung zwischen hierarchischen und quasi-entarteten Massen erfordert eine Sensitivität auf  $m_\nu$  im Sub-eV-Bereich.

Auch in vielen Teilbereichen der Kosmologie und Astrophysik spielen Neutrinos eine wichtige Rolle, so z.B. für das Verständnis der Vorgänge im frühen Universum, wobei sie die Häufigkeiten der durch Nukleosynthese entstehenden leichten Elemente bedeutend beeinflussen, oder für die physikalischen Abläufe in Supernova-Explosionen. Je nach der Größe ihrer



**Abbildung 1.4: Neutrino-Masseneigenwerte  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  als Funktion des kleinsten Wertes  $m_1$ .** Der Graph zeigt zwei mögliche Szenarien für den Fall einer „Normalordnung“ mit  $m_1 < m_2 < m_3$ : quasi-entartete (oben) bzw. hierarchisch geordnete Neutrino-Masseneigenzustände (unten). — Sind alle Neutrinomassenquadrate  $m_i^2$  so groß, dass die Unterschiede  $\Delta m_{ij}^2$  dagegen vernachlässigbar sind, erhält man ein quasi-entartetes Massenspektrum. Andernfalls, etwa für  $m_1 \lesssim 0.1 \text{ eV}$ , ergibt sich ein Aufspaltungsbild, welches hier für den Fall  $\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\text{solar}}^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{32}^2$  gezeigt ist. — Die farbigen Kästchen indizieren den Flavour-Gehalt der drei Masseneigenzustände (rot:  $\nu_e$ , grün:  $\nu_\mu$ , blau:  $\nu_\tau$ ) gemäß derzeitiger Werte der Mischungsparameter.

Masse können Neutrinos aufgrund ihrer enormen Anzahl einen Beitrag zur Gesamtmasse-dichte im Universum liefern, welcher etwa vergleichbar mit dem der „sichtbaren Materie“ bestehend aus Sternen und Gas oder sogar wesentlich größer sein könnte: schließlich sagt die Urknalltheorie ein Anzahlverhältnis von Neutrinos zu Baryonen von  $N_\nu/N_b \approx 10^9$  voraus. Diese sogenannten *relic neutrinos*<sup>14</sup> sollen mit einer Dichte von etwa  $336 \text{ cm}^{-3}$  im Kosmos vorhanden sein, weisen jedoch sehr kleine Energien im Sub-meV-Bereich auf<sup>15</sup> und sind daher aufgrund des extrem geringen Wirkungsquerschnitts von  $\sigma \approx 10^{-54} \text{ cm}^2$  mit heutigen Experimenten nicht direkt nachweisbar. Dennoch können Informationen über die Massendichte der Urknall-Neutrinos auf indirektem Weg gewonnen werden. Hierzu lässt sich eine Präzisionsmessung der Temperaturfluktuationen der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung (*cosmic microwave background radiation, CMBR*) in Kombination mit einer Studie der Materiedichteschwankungen auf sehr großen Skalen (*large scale structure, LSS*) verwenden. Aus der Massendichte wiederum ergeben sich mit Hilfe der Annahme einer Neutrinodichte von  $112/\text{cm}^3/\text{flavour}$  Abschätzungen der Neutrinomassen.

Seit seiner Entdeckung im Jahr 1965 durch A. Penzias und R. Wilson [Pen65] wurde der kosmische Mikrowellen-Hintergrund mit immer präziseren Instrumenten vermessen. Er bildet ein fast perfektes Schwarzkörperspektrum mit einer Temperatur von  $(2.725 \pm 0.002) \text{ K}$  (95% C. L.) [Mat99]. Es konnten nur sehr kleine Abweichungen von absoluter Isotropie (lokale Temperaturänderungen von wenigen  $10 \mu\text{K}$ ) gefunden werden. Diese geringe Anisotropie gibt Auskunft über Dichteschwankungen der Materie zur Zeit der Entkopplung der Hintergrund-Photonen etwa 370000 Jahre nach dem Urknall, welche sich im Laufe der anhaltenden Expansion des Weltalls zu großskaligen Strukturen ausgedehnt haben. Der Grad an Strukturbildung, welcher heute beobachtbar ist, spricht dafür, dass heiße Dunkle Materie verglichen mit kalter (d.h. nichtrelativistischer) Dunkler Materie eine untergeordnete Rolle gespielt haben muss. Durch einen höheren Anteil von relativistischen Teilchen wären nämlich Fluktuationen, welche später zur Bildung von Galaxien und Clustern führen, teilweise „ausgewaschen“ worden. Die bislang genaueste Messung des CMB wurde mit dem WMAP-Satelliten<sup>16</sup> durchgeführt. Doch aus seinen Daten alleine können keine Grenzen für  $m_\nu$  abgeleitet werden; dazu sind zusätzliche Modellannahmen sowie Informationen über bestimmte Parameter notwendig, welche u.a. aus den LSS-Beobachtungen mittels einer umfassenden Kartographie von Galaxien und der Messung ihrer Rotverschiebung extrahiert werden können (z.B. 2dFGRS, SDSS<sup>17</sup>). Je nachdem, welche Zusatzannahmen gemacht und welche ergänzenden Datensätze verwendet werden, können so für die Summe aller Neutrinomassen Obergrenzen im Bereich von  $\sum_i m_i \lesssim (0.7 - 2) \text{ eV}$  erhalten werden [Spe03, Han03]. In einer weiteren Analyse wurde unter Zuhilfenahme der Röntgenbeobachtungsdaten von Galaxienhaufen statt einer Obergrenze ein bevorzugter Wert von  $\sum_i m_i \approx 0.56^{+0.30}_{-0.26} \text{ eV}$  (68% C. L.) gefunden [All03].

Auch hier sind *modellunabhängige* Messungen mit Laborexperimenten wie dem KATRIN Experiment mit Sensitivitäten im Sub-eV-Bereich notwendig, um die kosmologischen Modelle zu überprüfen und umgekehrt verfeinerte Eingabeparameter für astrophysikalische und kosmologische Theorien zur Verfügung zu stellen.

<sup>14</sup>etwa: Überrestneutrinos, in Anlehnung an den aus Restphotonen bestehenden *kosmischen Mikrowellenhintergrund* auch Neutrino-Hintergrundstrahlung genannt.

<sup>15</sup>„Leichte“ Neutrinos mit  $m_\nu \ll 1 \text{ MeV}$  waren zum Zeitpunkt ihrer „Entkopplung“ bei  $k_B T \approx 1 \text{ MeV}$  relativistisch; ihr Beitrag zur Gesamtmasse-dichte zählt also zur sogenannten „heißen nichtbaryonischen Dunklen Materie“ (HDM).

<sup>16</sup>WMAP: *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*, <http://map.gsfc.nasa.gov/>

<sup>17</sup>2dFGRS: *Two Degree Field Galaxy Redshift Survey*, <http://www.mso.anu.edu.au/2dFGRS/>; SDSS: *Sloan Digital Sky Survey*, <http://www.sdss.org/>

### Zur Gliederung dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- Das zweite Kapitel gibt zunächst eine Einführung in die Methode der Neutrinomassenbestimmung mit Hilfe des Tritium- $\beta$ -Zerfalls. Darin wird auch der geplante Aufbau des KATRIN Experiments und insbesondere die Funktionsweise des verwendeten Spektrometertyps (MAC-E-Filter) vorgestellt.
- Im dritten Kapitel werden die zur Durchführung der Computersimulationen eingesetzten Programme beschrieben.
- Die Kriterien, welche beim Entwurf und bei der Überprüfung des elektromagnetischen Designs des KATRIN Hauptspektrometers anzuwenden sind, werden im vierten Kapitel definiert und erläutert.
- Ziele und Ablauf der Studien zum elektromagnetischen Design des KATRIN Hauptspektrometers werden in den Kapiteln 5 und 6 dargestellt. Die hier dargelegten Untersuchungen bilden den Hauptteil der vorliegenden Arbeit. Insbesondere werden die Ergebnisse der Designstudien zu verschiedenen Entwürfen des Hauptspektrometers präsentiert.
- Das siebte Kapitel geht auf eine zusätzliche Designkomponente, nämlich ein inneres Elektrodensystem aus dünnen Drähten, ein.
- Schließlich enthält das achte Kapitel eine Zusammenfassung dieser Arbeit sowie einen Ausblick auf zukünftige Aufgaben im Rahmen des elektromagnetischen Designs für das KATRIN Hauptspektrometer.



## Kapitel 2

# Das KATRIN Experiment

In diesem einführenden Kapitel sollen die Grundlagen des KATRIN Experiments ([Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment](#)) beschrieben werden. Dazu wird zunächst das Tritium- $\beta$ -Spektrum und der Einfluss einer endlichen Neutrinomasse auf die Form dieses Spektrums erläutert. Außerdem wird die Funktionsweise des verwendeten Spektrometertyps erklärt und die einzelnen Komponenten des experimentellen Aufbaus vorgestellt.

### 2.1 Das Energiespektrum des Tritium- $\beta$ -Zerfalls

Als  $\beta^-$ -Zerfall eines Atomkerns bezeichnet man den Prozess, bei dem unter Aussendung eines Elektrons und eines Elektronantineutrinos im Kern ein Neutron in ein Proton umgewandelt wird. Hierbei erhöht sich die Ordnungszahl  $Z$  des Elements um eins, während die Massenzahl  $A$  unverändert bleibt:

$$B(Z, A) \rightarrow C(Z + 1, A) + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (2.1)$$

Da im Endzustand dieses Zerfallsprozesses drei Teilchen vorliegen, spricht man von einem Dreikörperzerfall. Der Tochterkern kann im Vergleich zu Elektron und Neutrino als unendlich schwer angenommen werden, so dass er zwar einen Rückstoßimpuls, jedoch nur eine vernachlässigbare Energie  $T_C = p^2/(2m_C)$  aufnimmt. Daher wird die gesamte frei werdende Energie auf die beiden leichten Zerfallsprodukte aufgeteilt und es ergibt sich ein kontinuierliches Spektrum, sowohl für die Energie der Elektronen als auch für die der Neutrinos.

Im Folgenden soll kurz beschrieben werden, wie man durch präzise Vermessung des Energiespektrums der Elektronen aus dem  $\beta$ -Zerfall Rückschlüsse auf die Ruhemasse des beteiligten Neutrinos ziehen kann.

Das Spektrum  $dN/dE$  gibt die Anzahl der beim Zerfall emittierten Teilchen mit einer Energie im Intervall zwischen  $E$  und  $E + dE$  an. Nach Fermis Goldener Regel kann die Zerfallsrate mit Hilfe des Kernmatrixelements  $\mathcal{M}$  und der Phasenraumdichte  $\rho(E)$  des Endzustandes berechnet werden:

$$\frac{d^2N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \rho(E). \quad (2.2)$$

Daraus ergibt sich die folgende Form des  $\beta$ -Spektrums [Alt03]:

$$\frac{d\dot{N}}{dE} = R(E) \sqrt{(E_0 - E)^2 - m^2(\nu_e) c^4} \Theta(E_0 - E - m(\nu_e) c^2), \quad (2.3)$$

wobei

$$R(E) = \frac{G_F^2}{2\pi^3 \hbar^7} \cos^2(\theta_C) |\mathcal{M}|^2 F(Z, E) \cdot p \cdot (E + m_e c^2) \cdot (E_0 - E). \quad (2.4)$$

Darin ist

$G_F$	die Fermi-Kopplungskonstante,
$\theta_C$	der Cabibbo-Winkel,
$\mathcal{M}$	das Kernmatrixelement des Übergangs,
$F$	die Fermifunktion, welche die Coulomb-Wechselwirkung des emittierten Elektrons mit dem Tochterkern beschreibt,
$p$	der Impuls des Elektrons und
$E$	seine kinetische Energie,
$E_0$	der Endpunkt des $\beta$ -Spektrums,
$m_e c^2, m(\nu_e) c^2$	die Ruheenergie des Elektrons bzw. des Elektronantineutrinos.

Die Stufenfunktion  $\Theta(E_0 - E - m(\nu_e) c^2)$  trägt der Tatsache Rechnung, dass ein Neutrino nur erzeugt werden kann, falls die verfügbare Energie größer ist als seine Ruhemasse.

Auf welche Weise erlaubt nun die Kinematik dieses schwachen Zerfalls eine Aussage über die Ruhemasse des Neutrinos? Sowohl  $\mathcal{M}$  als auch  $F(Z, E)$  sind bei einem erlaubten  $\beta$ -Zerfall unabhängig von  $m(\nu_e)$ , daher kann die Neutrinomasse das Spektrum lediglich über den Phasenraumfaktor

$$[(E_0 - E)^2 - m^2(\nu_e) c^4]^{1/2}$$

beeinflussen. Aus Gleichung (2.3) kann man somit ablesen, dass eine genaue Vermessung des  $\beta$ -Spektrums mit der Observablen  $m^2(\nu_e) c^4$  eine Information über die absolute Neutrinomassenskala liefert. Im Folgenden werden Teilchenmassen stets in Einheiten der Energie, im Allgemeinen in Elektronenvolt (eV), angegeben.

Wäre das Neutrino masselos, sollte man als Endpunkt des  $\beta$ -Spektrums die Gesamtzerfallsenergie  $E_0$  finden<sup>1</sup>. Ist jedoch  $m(\nu_e)$  von Null verschieden, so steht dem Elektron nur noch eine um die Ruheenergie  $m(\nu_e) c^2$  des Neutrinos verringerte Energie zur Verfügung. Zusätzlich zu der Verschiebung des Endpunktes tritt auch eine Veränderung der Form des Spektrums auf: zum einen zeigt die Kurve  $dN/dE$  nahe der maximalen Elektronenenergie eine andere Krümmung, zum anderen erhält sie über den gesamten Bereich von  $E$  einen konstanten negativen Offset  $\propto m^2(\nu_e)$ . Diese Auswirkungen der endlichen Neutrinomasse auf das  $\beta$ -Spektrum sind in Abbildung 2.1 am Beispiel des Tritium- $\beta$ -Spektrums gezeigt.

In einer genauen Analyse muss die Mischung der Neutrino-Masseneigenzustände beachtet werden. Hierzu sei ein Mischungsszenario mit drei Neutrino-Flavours und drei Neutrinomasseneigenzuständen vorausgesetzt. Falls die Masseneigenzustände nicht entartet sind, d.h. jeder dieser Zustände einen anderen Masseneigenwert besitzt, sollte sich im Energiespektrum der Elektronen aus dem  $\beta$ -Zerfall die Zählrate in mehreren Stufen verringern – nämlich immer genau dann, wenn die Elektronenenergie ausreicht, um den Zerfall in einen bestimmten Neutrinomasseneigenzustand kinematisch zu verhindern. Anstelle von Gleichung (2.3) ergibt sich ein  $\beta$ -Spektrum, welches durch Summation dieser Zerfallskomponenten in verschiedene Masseneigenzustände berücksichtigt:

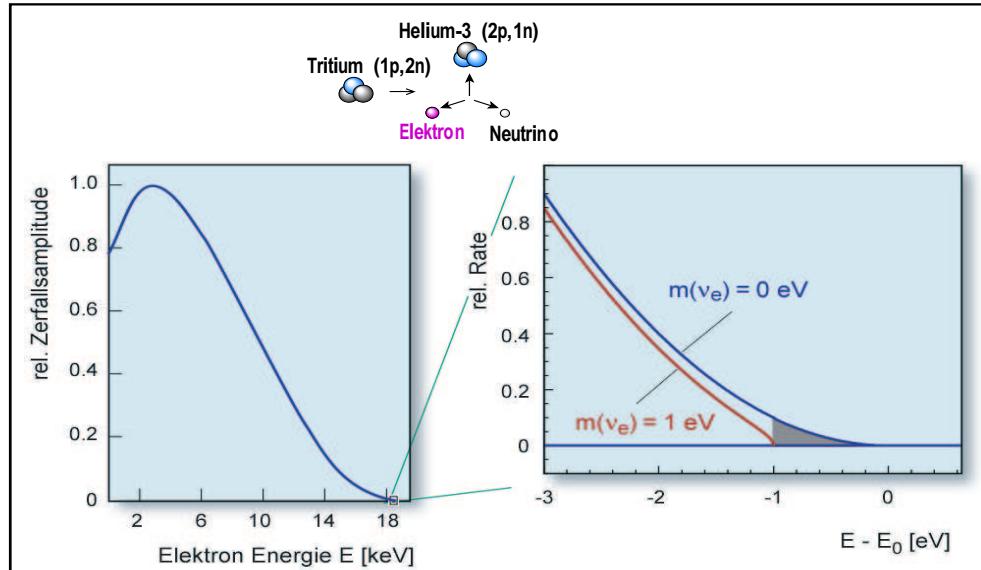
$$\frac{d\dot{N}}{dE} = R(E) \sum_i |U_{ei}|^2 \sqrt{(E_0 - E)^2 - m^2(\nu_i) c^4} \Theta(E_0 - E - m(\nu_i) c^2). \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>Die aus der Kernphysik bekannte Größe  $Q$  (Gesamtzerfallsenergie) entspricht nur unter gewissen Annahmen dem Endpunkt  $E_0$  des  $\beta$ -Spektrums, etwa wenn man von einem unendlich schweren Kern (d.h. vernachlässigbarer Kernrückstoßenergie) und einem Übergang in den Grundzustand des Tochterelements (Vernachlässigung möglicher Anregungszustände der Elektronenhülle) ausgeht.

Die Auflösung dieser Strukturen ist mit heutigen experimentellen Mitteln jedoch nicht möglich, da die Breite der Auflösungsfunktion der zur Vermessung der Elektronenenergie verwendeten Spektrometer größer ist als der Unterschied zwischen den Masseneigenzuständen  $|m(\nu_i) - m(\nu_j)|$ . Daher genügt es, die Analyse auf ein Spektrum der Form (2.3) mit einer mittleren quadratischen Neutrinomasse

$$m^2(\nu_e) := \sum_{i=1}^3 |U_{ei}|^2 m^2(\nu_i) \quad (2.6)$$

als Observablen zu beschränken (siehe z.B. [Far02], [Alt03]).



**Abbildung 2.1: Signatur einer endlichen Neutrinomasse im Energiespektrum des Elektrons beim Tritium- $\beta$ -Zerfall.** Die Zerfallsenergie teilt sich zwischen Elektron und Neutrino auf. Das linke Teilbild stellt das gesamte kontinuierliche Spektrum des Elektrons dar, während rechts ein vergrößerter Ausschnitt um den Endpunkt bei  $E_0 = 18.6$  keV gezeigt ist. Zum Vergleich sind zwei Kurven für  $m(\nu_e) = 0$  eV bzw.  $m(\nu_e) = 1$  eV aufgetragen. Der Einfluss einer von Null verschiedenen Neutrinomasse ist zwar im gesamten Spektrum sichtbar, die Änderung tritt jedoch im Bereich des Endpunktes besonders deutlich hervor.

Prinzipiell kann die Neutrinomasse an der veränderten Position des Endpunktes im Spektrum abgelesen werden. Als problematisch erweist es sich bei diesem Verfahren jedoch, dass zum einen die Zerfallsenergie  $E_0$  des betrachteten  $\beta$ -Übergangs nicht genau genug bekannt ist. Zum anderen ist der Abfall der Zählrate bis auf null wegen des Untergrundbeitrags gar nicht sichtbar. Daher ist es erforderlich auf ein zweites Verfahren zurückzugreifen, bei dem die Form des hochenergetischen Teils des Spektrums präzise vermessen und anschließend ein Fit durchgeführt wird. Die Fitfunktion enthält in der Regel neben  $m^2(\nu_e)$  unter anderem auch  $E_0$  als freien Parameter.

Die Zahl der gemessenen Ereignisse nimmt aufgrund der Natur des Spektrums zum Endpunkt hin stark ab. Deshalb ist es sinnvoll, den Zerfall eines Elements zu betrachten, bei dem der Effekt auf die Form des Spektrums möglichst ausgeprägt ist. Ein wichtiges Kriterium ist die Breite des Spektrums, welche durch den Wert der Endpunktenergie  $E_0$  definiert ist. Je kleiner der Bereich der möglichen  $e^-$ -Energien ist, desto größer wird der relative Anteil des relevanten Energieintervalls kurz vor dem Endpunkt.

Aufgrund seiner besonders geringen Endpunktenergie von  $E_0 = 18.575$  keV bietet sich Tritium ( ${}^3\text{H}$ ) an. Bei dem Prozess

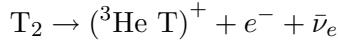


handelt es sich um einen übererlaubten  $\beta^-$ -Zerfall<sup>2</sup> mit einem kleinen Phasenraum. Das Kernmatrixelement ist unabhängig von der Energie des emittierten Elektrons und mit

$$|\mathcal{M}|^2 = 5.55 \, \hbar^6$$

sehr groß [Rob88]. Dadurch bedingt ist die Halbwertszeit des Tritium- $\beta$ -Zerfalls gering; sie beträgt  $t_{1/2} = 12.3$  Jahre. Dies ist vorteilhaft im Hinblick auf die Menge an Quellmaterial, welche benötigt wird, um eine ausreichende Zählrate zu erzielen. Ein weiteres Argument für die Verwendung von Tritium besteht darin, dass für  ${}^3\text{H}$  mit  $Z = 1$  die Fermi-Funktion über einen weiten Energiebereich annähernd konstant verläuft und sogar  $F(Z, E) \approx 1$  gilt, was die Berechnung des Spektrums stark vereinfacht.

Es soll hier kurz darauf hingewiesen werden, dass neben der endlichen Neutrinomasse auch das im Endzustand auftretende Heliumion durch Anregung verschiedener Zustände seiner Elektronenhülle die kinetische Energie des emittierten Elektrons beeinflusst. Genau genommen muss man das  $\beta$ -Spektrum als eine Überlagerung einer Vielzahl von Spektren betrachten, die aufgrund der unterschiedlichen Anregungsenergien leicht gegeneinander verschoben sind. Aufgrund der hohen Dissoziationsenergie liegt das verwendete Tritium als molekulares Gas vor. Es wird somit stets die Reaktion



betrachtet. Bedingt durch die vergleichsweise einfache Elektronenkonfiguration des Tritiummoleküls ( $\text{T}_2$ ) und des Tochtermoleküls ( ${}^3\text{He T}$ )<sup>+</sup> lassen sich die entsprechenden Korrekturen jedoch mit großer Genauigkeit berechnen (vgl. etwa [Sae00]), was einen weiteren Vorteil bei der Verwendung von Tritium darstellt.

## 2.2 Das Prinzip des MAC-E-Filters

Obwohl Tritium als Muttersubstanz für den  $\beta$ -Zerfall den Vorteil einer niedrigen Endpunktenergie bietet, ist die Zählrate im interessanten Ausschnitt des Spektrums außerordentlich gering. In der in Abbildung 2.1 grau schraffierten Fläche, einem Energieintervall beginnend bei  $E_0 - 1$  eV, liegen beispielsweise nur etwa  $2 \cdot 10^{-13}$  aller Zerfälle. Selbst bei optimalen Eigenschaften des Quellmaterials stellt die Bestimmung von  $m(\nu_e)$  aus der Vermessung der Form des  $\beta$ -Spektrums in der Endpunktregion eine Herausforderung dar. Dass es in einer langen Reihe von Tritium- $\beta$ -Experimenten gelungen ist, den Wert für die Obergrenze der Neutrinomasse seit einer frühen auf dieser Methode beruhenden Veröffentlichung aus dem Jahr 1949 von  $m(\nu_e) \leq 1$  keV [Cur49] um nahezu drei Größenordnungen zu verbessern, ist zum großen Teil auf die kontinuierliche Weiterentwicklung der experimentellen Methoden zurückzuführen. Das bislang beste Resultat aus einer Vermessung des Tritium- $\beta$ -Spektrums stammt vom *Mainzer Neutrinomassenexperiment* [Kra03]:

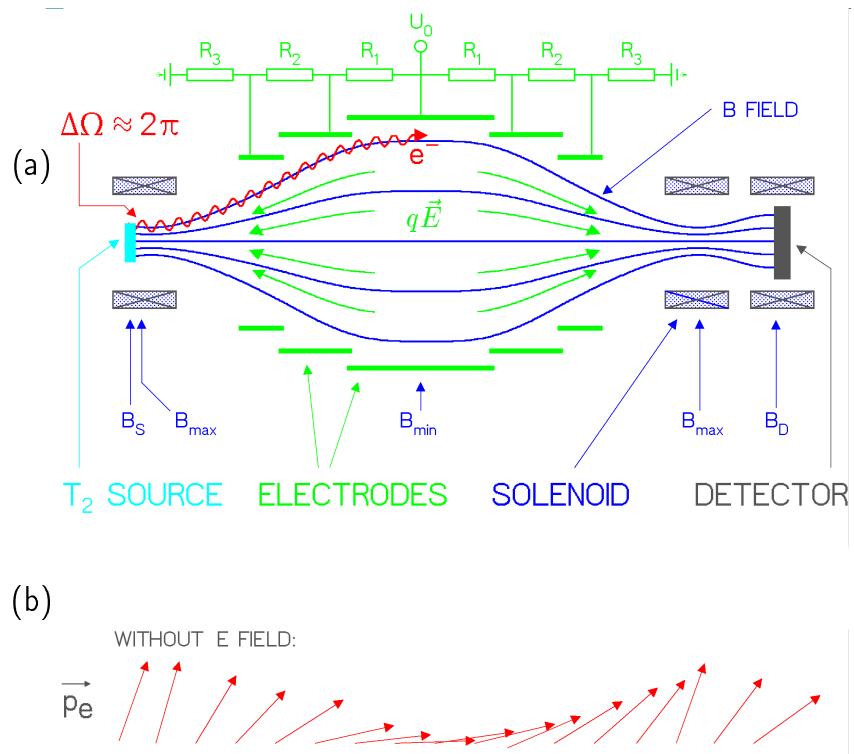
$$m(\nu_e) \leq 2.3 \text{ eV} \quad (95\% \text{ C.L.}) \quad (2.8)$$

Das Instrument, welches unter anderem bei diesem Experiment zum Einsatz kam und das auch zentraler Bestandteil des KATRIN Experiments sein wird, ist der MAC-E-Filter. Im folgenden Abschnitt soll seine Funktionsweise beschrieben werden.

<sup>2</sup>Es findet ein Übergang von einem Kern mit (1p, 2n) in den Spiegelkern mit (2p, 1n) statt.

### 2.2.1 Grundlagen

Die Abkürzung „MAC-E-Filter“ steht für Magnetic Adiabatic Collimation and Electrostatic Filter<sup>3</sup>. Die wesentlichen Komponenten dieses Spektrometertyps sind in Abbildung 2.2 (a) schematisch dargestellt. Die beiden Solenoid-Magnete am Ein- und Ausgang des Spektrometers erzeugen ein Führungsfeld, so dass sich die von der Quelle emittierten Elektronen auf Zyklotronbahnen entlang der magnetischen Feldlinien bewegen. Das Magnetfeld ist symmetrisch zur Mittelebene des Spektrometers, jedoch stark inhomogen: Die magnetische Feldstärke verringert sich vom Zentrum der Solenoiden in Richtung der Mittelebene, auch Analysierebene genannt, um mehrere Größenordnungen.



**Abbildung 2.2: Prinzip des MAC-E-Filter.** (a) Führung der von der (links im Bild gezeigten) Quelle kommenden Zerfallselektronen entlang der Magnetfeldlinien (blau) im elektrostatischen Feld (grün) mit maximaler Retardierung in der Mittelebene des Spektrometers. (b) Magnetische Kollimation: Transformation des Impulses aufgrund der magnetischen Gradientenkraft.

Ebenfalls in Abbildung 2.2 (a) gezeigt ist das System von zylindrischen Elektroden, welches den magnetischen Flusschlauch<sup>4</sup> umgibt. Das durch sie erzeugte elektrostatische Gegenfeld besitzt in der Spektrometermitte sein Maximum und bewirkt eine Abbremsung der Elektronen auf ihrem Weg dorthin. Aufgrund des symmetrischen Aufbaus bezüglich der Analysierebene werden alle Elektronen, die genügend kinetische Energie zur Überwindung des Retardierungspotentials besitzen, wieder beschleunigt und magnetisch auf den Detektor geführt, wo sie mit ihrer ursprünglichen Energie nachgewiesen werden.

<sup>3</sup>Das Prinzip dieses Spektrometertyps wurde erstmals 1980 vorgeschlagen [Bea80] und seine Entwicklung während der 1980er Jahre an den Neutrinomassenexperimenten in Mainz und Troitsk weiter vorangetrieben [Pic90, Pi92a], [Lob85].

<sup>4</sup>Die Größe des Flusschlauches ist definiert durch die Magnetfeldlinien, welche den Querschnitt der Quelle durchsetzen.

Die Besonderheit des MAC-E-Filter-Prinzips besteht nun darin, dass es dank der magnetischen adiabatischen Kollimation gelingt, eine sehr gute Energieauflösung bei hoher Raumwinkelakzeptanz zu erreichen. Wie dies funktioniert, wird im Folgenden erläutert.

Dazu betrachte man zunächst ein Elektron, welches im linken Spektrometersolenoiden im Magnetfeld der Stärke  $B_S$  startet. Seine kinetische Energie lässt sich in zwei Anteile aufspalten: eine longitudinale Komponente  $E_{\parallel}$  parallel zum Magnetfeld und eine Komponente  $E_{\perp}$  senkrecht dazu. Bezeichnet  $E_{\text{kin}}$  die gesamte kinetische Energie des Elektrons und  $\theta$  den Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und den Magnetfeldlinien, so gilt

$$E_{\parallel} = E_{\text{kin}} \left( \frac{\vec{B} \cdot \vec{v}}{|\vec{B}| |\vec{v}|} \right)^2 = E_{\text{kin}} \cdot \cos^2 \theta, \quad (2.9)$$

$$E_{\perp} = E_{\text{kin}} - E_{\parallel} = E_{\text{kin}} \cdot \sin^2 \theta. \quad (2.10)$$

Die Transversalkomponente  $E_{\perp}$  steckt in der Zyklotronbewegung. Die Elektronen besitzen wegen dieser Spiralbewegung ein magnetisches Bahnmoment  $\mu$ , welches sich in nichtrelativistischer Form schreiben lässt als

$$\mu = |\vec{\mu}| = \frac{e}{2m_e} |\vec{l}| = \frac{E_{\perp}}{B}. \quad (2.11)$$

Entlang ihrer Bahn bis zur Spektrometermitte durchlaufen die Elektronen einen enormen Abfall der Stärke des Magnetfeldes. Auf ihr Bahnmoment wirkt daher eine magnetische Gradientenkraft

$$\vec{F}_{\nabla} = \vec{\nabla} (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (2.12)$$

(nichtrelativistische Näherung), welche zu einer Beschleunigung der Elektronen parallel zur Richtung der Magnetfeldlinien, zum Minimum der Feldstärke hin, führt. Aufgrund der Tatsache, dass die Gesamtenergie im statischen Magnetfeld erhalten ist, bewirkt die Zunahme der Longitudinalenergie gleichzeitig eine Abnahme der Transversalenergie. In Abbildung 2.2 (b) ist dies anhand der Neigung des Impulsvektors relativ zu  $\vec{B}$  illustriert. Startet das Elektron am Eingang des Spekrometers unter einem großen Winkel zum Magnetfeld (d.h. mit großer  $E_{\perp}$ -Komponente), so wird dieser auf dem Weg zur Analysierebene immer flacher, wächst jedoch nach dem Passieren der Mittelebene wieder an.

Nun ist zu beachten, dass die in der Zyklotronbewegung gebundene Energie  $E_{\perp}$  nicht durch das Retardierungsfeld analysiert werden kann, sondern lediglich die longitudinale Komponente  $E_{\parallel}$ . Durch eine möglichst vollständige Transformation von  $E_{\perp}$  nach  $E_{\parallel}$ , entsprechend einem möglichst großen Abfall der Magnetfeldstärke, lässt sich also eine deutliche Verbesserung der Energieauflösung erreichen. Optimale Voraussetzung dafür ist, dass die Analysierebene<sup>5</sup> mit der Ebene maximaler magnetischer Kollimation zusammenfällt.

Der MAC-E-Filter misst ein integriertes Spektrum. Dem Prinzip eines Hochpassfilters entsprechend, sollten alle Elektronen mit einem Überschuss an Longitudinalenergie gegenüber der elektrostatischen Retardierungsschwelle den Detektor erreichen – unabhängig davon, wie groß dieser Überschuss ist. Um die Zählrate an einem bestimmten Punkt des  $\beta$ -Spektrums zu ermitteln, wird daher in geeigneten Zeitintervallen das Analysierpotential variiert.

Unmittelbar verknüpft mit seiner Rolle bei der Energiefilterung ist eine weitere Funktion des elektrischen Potentials. Es sorgt nämlich aufgrund der schon früh einsetzenden Abbremsung der Elektronen dafür, dass die Umwandlung von Transversal- zu Longitudinalenergie *adiabatisch* geschieht. Damit ist gemeint, dass die relative Änderung der Magnetfeldstärke  $\Delta B/B$

<sup>5</sup>Durch das elektrostatische Gegenfeld wird die Longitudinalenergie der Elektronen analysiert; die „Analysierebene“ ist dementsprechend durch den Ort des maximalen Retardierungspotentials  $U_0$  definiert.

über eine Zyklotronschrittänge  $l_{\text{cyc}}$  hinreichend klein sein soll<sup>6</sup>. Ist diese Bedingung erfüllt, so bleibt das Produkt aus dem relativistischen Lorentz-Faktor  $\gamma = [1 - \frac{v^2}{c^2}]^{-1/2}$  und dem Betrag des magnetischen Bahnmoments  $|\vec{\mu}|$  erhalten [Jac02]:

$$\gamma \mu = \text{const.} \quad (2.13)$$

Da die Elektronen aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall maximal  $\gamma = 1.04 \approx 1$  erreichen, kann bis zu einer gewissen Genauigkeit die nichtrelativistische Näherung verwendet werden. In diesem Fall ist die Erhaltungsgröße das magnetische Moment selbst:

$$\mu = \frac{E_{\perp}}{B} = \text{const.} \quad (2.14)$$

Eine ausführlichere Diskussion der adiabatischen Invarianten befindet sich in Anhang A.

Gleichung (2.14) besagt, dass die Transversalenergie  $(E_{\perp})_f$  des Elektrons beim Erreichen der Analysierebene verglichen mit der ursprünglichen Transversalenergie  $(E_{\perp})_i$  am Startort um einen Faktor  $S$  herunterskaliert wird. Dieser entspricht gerade dem Verhältnis der Magnetfeldstärken zwischen Anfangs- und Endpunkt der Bahn:

$$(E_{\perp})_f = (E_{\perp})_i \cdot \underbrace{\frac{B_f}{B_i}}_S. \quad (2.15)$$

Diese Relation ist wichtig, denn sie beschreibt auch die Energieauflösung des MAC-E-Filters:

Geht man davon aus, dass die gesamte maximale Startenergie des Elektrons,  $E_0 \approx 18600$  eV, als Zyklotronenergie vorliegt, so bleibt davon in der Analysierebene noch ein kleiner Teil übrig. Dieser Rest Transversalenergie bleibt bei der Energieanalyse mit Hilfe des elektrostatischen Feldes unberücksichtigt und entspricht somit der Auflösung  $\Delta E$ :

$$\Delta E = (E_{\perp})_{f, \text{max}} = E_0 \cdot \frac{B_{\min}}{B_{\max}}. \quad (2.16)$$

Durch geeignete Einstellung des Verhältnisses der minimalen zur maximalen Magnetfeldstärke kann man mit dem MAC-E-Filter also eine hohe Energieauflösung erzielen. Um auf eine Neutrino- $\text{eV}$ -Basis sensitiv zu sein, wird für das Hauptspektrometer des KATRIN Experiments eine relative Energieauflösung  $\Delta E/E \approx 5 \cdot 10^{-5}$  angestrebt, was im Endpunktbereich des Tritium- $\beta$ -Spektrums etwa  $\Delta E \approx 1$  eV entspricht.

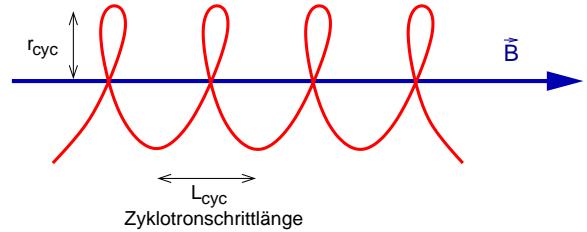
## 2.2.2 Auflösung und Transmissionsfunktion

Ein Elektron aus der Tritium-Quelle ist nur dann in der Lage, die Energieschwelle durch die elektrostatische Retardierung  $q U$  zu überwinden, wenn seine Parallelenergie  $E_{\parallel}$  in jedem Bahnpunkt größer ist als das dort wirkende elektrische Potential:

$$E_{\parallel}(\vec{r}) - q U(\vec{r}) = E_S - E_{\perp}(\vec{r}) - q U(\vec{r}) > 0. \quad (2.17)$$

Hierbei werden eventuelle sonstige Energieverlustmechanismen wie z.B. Synchrotronstrahlung vernachlässigt. Nach Gleichung (2.10) enthält der Ausdruck (2.17) eine Abhängigkeit

<sup>6</sup>Die Zyklotronschrittänge ist definiert als die Wegstrecke  $l_{\text{cyc}}$ , welche das Elektron im Verlauf einer Zyklotronsschleife entlang der Magnetfeldlinie zurücklegt: siehe Abb. 2.3.



**Abbildung 2.3: Skizze zur Erläuterung der Zyklotronschrittänge.** Die Grafik zeigt schematisch die Zyklotronbewegung eines geladenen Teilchens um eine magnetische Feldlinie.

vom Startwinkel  $\theta_S$ . Die Formulierung der *Transmissionsbedingung* für die Mittelebene des Spektrometers lautet dann:

$$(E_{\parallel})_A - q U_0 = E_S - \underbrace{E_S \cdot \sin^2 \theta_S \cdot \frac{B_A}{B_S}}_{(E_{\perp})_A} - q U_0 > 0, \quad (2.18)$$

- mit  $E_S$  kinetische Energie des  $e^-$  am Startort,  
 $B_S$  Magnetfeldstärke am Startort,  
 $B_A$  Magnetfeldstärke in der Analysierebene,  
 $(E_{\parallel})_A$  Longitudinalenergie in der Analysierebene,  
 $(E_{\perp})_A$  Transversalenergie in der Analysierebene,  
 $\theta_S$  Winkel zwischen Impulsrichtung des  $e^-$  und Magnetfeldlinien am Startort,  
 $U_0$  maximal retardierendes Potential am Ort der Analysierebene.

In der Umkehrung bedeutet dies, dass alle Elektronen, die in einen Kegel mit dem Öffnungswinkel

$$\theta \leq \theta_S = \arcsin \left( \sqrt{\frac{E_S - q U_0}{E_S} \cdot \frac{B_S}{B_A}} \right) \quad (2.19)$$

emittiert werden, die Transmissionsbedingung erfüllen. Daraus ergibt sich ein wichtiges Kriterium für das elektromagnetische Design des MAC-E-Filters. Elektrisches und magnetisches Feld müssen so konfiguriert sein, dass einem Elektron, welches mit maximalem Startwinkel  $\theta_S$  emittiert wird, auf dem Weg zur Analysierfläche an keiner Stelle mehr Parallelenergie entzogen wird, als die Summe aus  $(E_{\parallel})_i$  und  $\Delta E_{\parallel}$  hergibt. Dabei bezeichnet  $(E_{\parallel})_i$  die beim Start bereits vorhandene Longitudinalenergie und  $\Delta E_{\parallel}$  die aus der Transformation  $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$  zugeführte Zusatzenergie. Andernfalls wird das Elektron zu früh retardiert und geht für die Messung verloren.

Die durch den Kegel (2.19) definierte Raumwinkelakzeptanz  $\Delta\Omega$  des Spektrometers relativ zum gesamten Raumwinkel  $2\pi$  des vorderen Halbraums lässt sich mit Hilfe von  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  leicht berechnen zu

$$\frac{\Delta\Omega}{2\pi} = 1 - \cos \theta_S. \quad (2.20)$$

Einsetzen von (2.19) in (2.20) führt unter Benutzung von  $\cos(\arcsin(\sqrt{x})) = \sqrt{1-x}$  auf die *Transmissionsfunktion*:

$$T(E_S, U_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } E_S < q U_0 \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{(E_S - q U_0)}{E_S} \frac{B_S}{B_A}} & \text{für } E_S \left(1 - \frac{B_A}{B_S}\right) \leq q U_0 \leq E_S \\ 1 & \text{für } q U_0 \leq E_S \left(1 - \frac{B_A}{B_S}\right). \end{cases} \quad (2.21)$$

Sie gibt den Anteil von allen mit der Energie  $E_S$  in den vorderen Halbraum emittierten Elektronen an, welche schließlich das Analysierpotential überwinden können.

Im realen Aufbau des Experiments kommt jedoch noch ein weiterer die Transmission beschränkender Faktor hinzu: Die Elektronen starten in der Quelle in einem Magnetfeld der Stärke  $B_S$ , welche deutlich kleiner ist als die maximale in der Apparatur auftretende Magnetfeldstärke  $B_{\max}$ . Diese Maßnahme wird ergriffen, um eine Startwinkelselektion der aus

der Quelle kommenden Elektronen vornehmen zu können. Die magnetische Reflexion sorgt dafür, dass Elektronen mit Startwinkeln größer als

$$\theta_{\text{start}} = \arcsin \left( \sqrt{\frac{B_S}{B_{\max}}} \right) \quad (2.22)$$

nicht gezählt werden. Dadurch unterdrückt man die Detektion von Elektronen, welche aufgrund des hohen Startwinkels und der damit verbundenen verlängerten Laufstrecke innerhalb der Quelle verstärkt an Streuprozessen beteiligt waren.

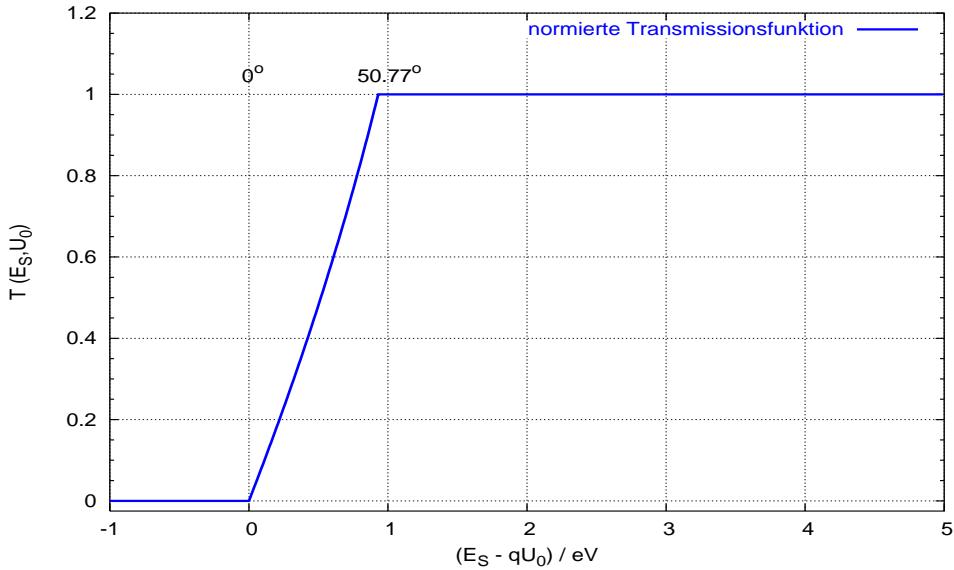
Unter diesen Bedingungen ergibt sich eine *modifizierte Transmissionsfunktion* [Pi92b]:

$$T(E_S, U_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } E_S < q U_0 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{(E_S - q U_0)}{E_S} \frac{B_S}{B_A}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{B_S}{B_{\max}}}} & \text{für } q U_0 \leq E_S \leq q U_0 \frac{B_{\max}}{B_{\max} - B_A} \\ 1 & \text{für } E_S > q U_0 \frac{B_{\max}}{B_{\max} - B_A}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Die Funktion  $T(E_S, U_0)$  wurde hier auf eins normiert. Der Verlauf der für das KATRIN Experiment berechneten Transmissionsfunktion ist in Abb. 2.4 dargestellt. Zu den Vorteilen eines MAC-E-Filters gehört insbesondere, dass die Transmissionsfunktion keine Ausläufer zu höheren oder niedrigeren Energien aufweist. Dazu ist sie analytisch berechenbar und nimmt die in der Abbildung gezeigte einfache Form an.

Das Feld  $B_{\max}$ , welches nach Gleichung (2.16) die Energieauflösung  $\Delta E$  definiert, wird durch einen sogenannten *Pinch-Magneten* erzeugt. Die Auflösung des Spektrometers ist aus Abb. 2.4 ablesbar: Sie bestimmt die Breite des scharfen Anstiegs der Transmissionswahrscheinlichkeit. In diesem Fall beträgt  $\Delta E$  ca. 1 eV. Bei einer maximalen Startenergie der Elektronen von 18575 eV ergibt sich somit eine sehr gute relative Energieauflösung.

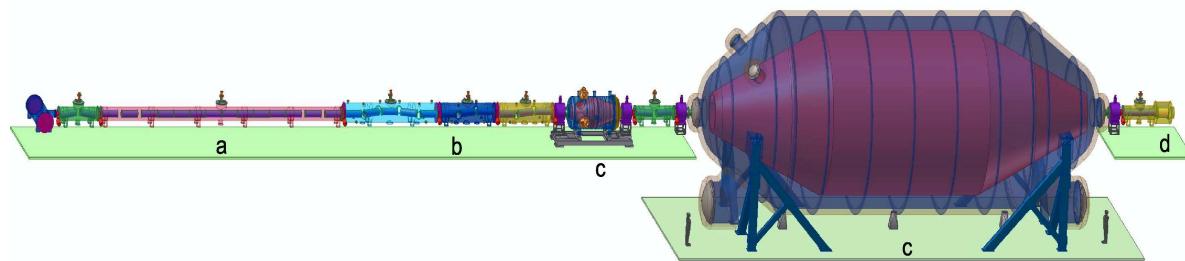
Bei der Bestimmung der Transmissionsfunktion wurden bislang keine Wechselwirkungsprozesse der Elektronen mit  $T_2$ -Molekülen in der Tritiumquelle berücksichtigt. Diese können nachträglich durch eine Faltung einer entsprechenden Energieverlustverteilung mit der Transmissionsfunktion (2.23) miteinbezogen werden [Osi01]. Daraus ergibt sich die sogenannte *Ansprechfunktion*.



**Abbildung 2.4: Die Transmissionsfunktion des KATRIN Experiments.** Die Abbildung zeigt deren Verlauf für Elektronen fester Startenergie  $E_S$  als Funktion der Filterenergie  $qU_0$ . Die Berechnung der Transmissionsfunktion erfolgte für die Magnetfeldstärken  $B_S = 3.6 \text{ T}$ ,  $B_A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$  und  $B_{\max} = 6 \text{ T}$ . Die geringe Breite des Anstiegs der Transmissionskurve verdeutlicht die hohe Energieauflösung (hier:  $\Delta E = 0.93 \text{ eV}$ ). Geringe Überschussenergien reichen aus, um Elektronen mit kleinen Anstellwinkeln durchzulassen. Erst am Ende des Anstiegs können auch Elektronen mit dem maximalen Startwinkel  $\theta = 50.77^\circ$  die Filterschwelle überwinden.

## 2.3 Der Gesamtaufbau des KATRIN Experiments

In diesem Abschnitt sollen die Hauptkomponenten des KATRIN Experiments vorgestellt werden. Ihre Anordnung im geplanten Gesamtaufbau ist in Abbildung 2.5 dargestellt.



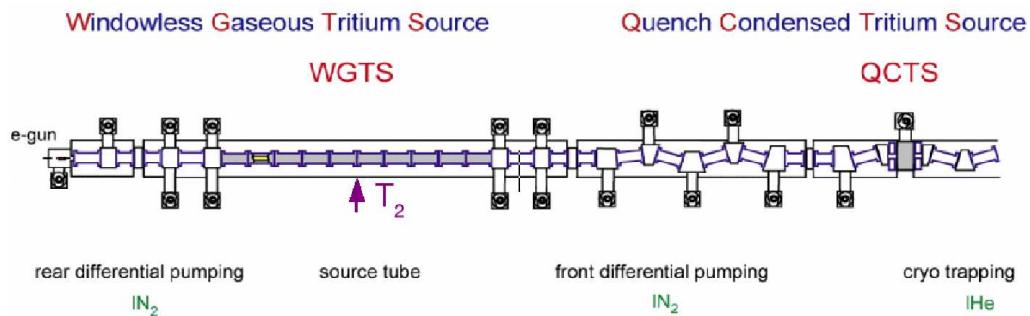
**Abbildung 2.5: Anordnung der einzelnen Komponenten des KATRIN Experiments im Gesamtaufbau.** Die Darstellung zeigt von links nach rechts (a) das Kalibrations- und Monitorsystem und die fensterlose gasförmige Tritiumquelle, (b) das Transportsystem, (c) Vor- und Hauptspektrometer sowie (d) den Detektor.

### 2.3.1 Quelle und Transportsystem

Um eine hohe Sensitivität zu erreichen, wird eine möglichst isotopenreine Tritiumquelle großer Intensität benötigt. Systematische Effekte sollten zu einem hohen Grad verstanden und berechenbar sein. Zu diesem Zweck soll im KATRIN Experiment eine fensterlose gasförmige Tritiumquelle (Windowless Gaseous Tritium Source, WGTS) zum Einsatz kommen. Sie besteht aus einem 10 m langen zylindrischen Rohr mit 90 mm Durchmesser, das durch ein Kühlungssystem auf einer Temperatur von 27 K gehalten wird. Es befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Stärke 3.6 T. In die Mitte des Rohres wird molekulares Tritium ( $T_2$ ) eingelassen, welches zu den beiden offenen Enden hin diffundiert. Die Säulendichte beträgt  $\rho d = 5 \cdot 10^{17}$  Moleküle/cm<sup>2</sup>. An jeder Seite schließt sich an das WGTS-Rohr eine differentielle Pumpstrecke an. Die hohe Injektionsrate von  $5 \cdot 10^{19}$  Molekülen/sec, entsprechend einer Einspeisung von 5 Ci/sec, macht einen geschlossenen Tritiumkreislauf erforderlich. Das aus dem Quellrohr austretende  $T_2$  muss abgepumpt, gereinigt und mit gleich bleibender Isotopenreinheit ( $> 95\%$ ) wieder der Quelle zugeführt werden. Auf diese Weise ist die WGTS in der Lage,  $10^{11}$   $\beta$ -Zerfallselektronen pro Sekunde zu liefern.

Der hohe sicherheitstechnische Aufwand und die große Menge an benötigtem Tritium sind zwei der Hauptgründe, weshalb das KATRIN Experiment am Forschungszentrum Karlsruhe aufgebaut wird. Die im dortigen Tritiumlabor vorhandene Infrastruktur macht den Aufbau einer derart komplexen und leistungsfähigen Quelle überhaupt erst möglich. Spezifikationen des Magnetsystems der WGTS können im Detail in [Kat04] nachgelesen werden.

Wie Abb. 2.6 zeigt, ist neben der gasförmigen Tritiumquelle als eine Option auch eine Festkörperquelle (Quench Condensed Tritium Source, QCTS) vorgesehen. Hierfür wird ein dünner Tritiumfilm auf ein Graphitsubstrat abschreckend aufkondensiert. Wird der Fluss aus der WGTS unterbrochen, so kann die kondensierte Quelle in die Apparatur eingebracht werden. Messungen mit zwei verschiedenen Quelltypen bieten nicht nur den Vorteil der Redundanz, sondern können auch zur Minimierung des Einflusses systematischer Effekte beitragen.



**Abbildung 2.6: Strahlführung im Bereich von Quelle und Transportsystem.** Die Zeichnung zeigt eine lange Magnetstrecke, welche von links nach rechts das Kalibrations- und Monitorsystem, die fensterlose gasförmige Tritiumquelle (WGTS), die vorgesehene Position der Festkörper-Tritiumquelle (QCTS) sowie einen Teil der Transport- und Pumpstrecke beinhaltet.

Die Transportstrecke erfüllt zwei wichtige Funktionen. Zum einen wird durch differentielles Pumpen und Einfangen der  $T_2$ -Moleküle in Kryofallen verhindert, dass die Spektrometer durch Tritium kontaminiert werden<sup>7</sup>. Dies ist vor allem im Hinblick auf Untergrundreduktion

<sup>7</sup>Reduktion um einen Faktor  $\approx 10^{11}$  von etwa 1.8 mbar 1 sec<sup>-1</sup> im Quellrohr auf ca.  $2.5 \cdot 10^{-11}$  mbar 1 sec<sup>-1</sup> am Vorspektrometereingang.

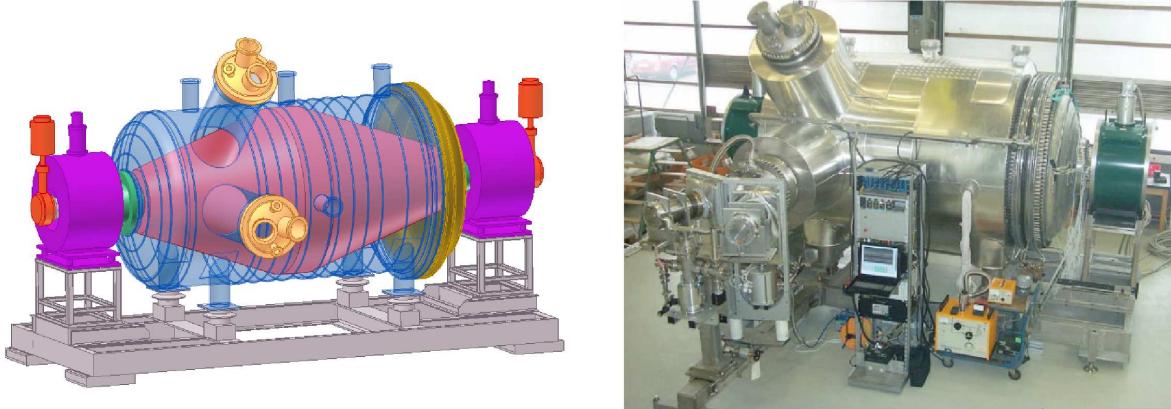
unerlässlich. Zum anderen soll die Transportstrecke die Elektronen unter möglichst geringer Verletzung der Adiabasiebedingung von der Quelle zum Spektrometer führen.

### 2.3.2 Vorspektrometer

Vor- und Hauptspektrometer bilden zusammen ein Tandem-System aus zwei MAC-E-Filtern. Das Vorspektrometer weist mit seiner Länge von 3.5 m und dem Durchmesser von 1.7 m etwa die Dimensionierung der Spektrometer bisheriger Tritium- $\beta$ -Experimente auf und ist damit wesentlich kleiner als das Hauptspektrometer. Auch die angestrebte relative Energieauflösung des Vorspektrometers ist mit  $\Delta E/E \approx 1/250$  moderat, verglichen mit dem Wert für das Hauptspektrometer ( $\Delta E/E \approx 1/20000$ ). Eine bessere Auflösung ist nicht erforderlich, da der kleinere MAC-E-Filter lediglich eine grobe Energieselektion der Elektronen bewirken soll, so dass nur Elektronen in einem schmalen Intervall (etwa 100 eV) vor dem relevanten Endpunktbereich des Spektrums in das Hauptspektrometer gelangen. Die aus dieser Vorfilterung resultierende starke Reduktion des Elektronenflusses um einen Faktor von ungefähr  $10^7$  soll vor allem die Zahl der durch ionisierende Stöße verursachten Untergrundereignisse möglichst klein halten.

In Abb. 2.7 ist links eine Schemazeichnung des Vorspektrometers gezeigt. Das Magnetsystem besteht aus zwei supraleitenden Solenoiden. In den Vakuumtank, welcher gleichzeitig eine Hochspannungselektrode bildet, sind Pumpstutzen für das UHV-System eingelassen. Als dritte wichtige Komponente ist die im Inneren des Tanks befestigte doppelt konische Drahtelektrode abgebildet. Die Funktion dieser Zusatzelektrode besteht in einer weiteren Verringerung des Untergrunds. Ihre Wirkung wurde am Spektrometer des Mainzer Experiments mit Erfolg erprobt [Mül02, Fla04].

Da bei beiden Spektrometern des KATRIN Experiments prinzipiell das gleiche Designkonzept vorliegt, stellt das Vorspektrometer einen verkleinerten Prototyp für das Hauptspektrometer dar. Das Foto in Abb. 2.7 zeigt das bereits im Oktober 2003 an das Forschungszentrum Karlsruhe ausgelieferte Vorspektrometer. Die geplanten und z.T. bereits begonnenen Tests betreffen vor allem das Vakuum- und Hochspannungssystem sowie die Drahtelektrode.



**Abbildung 2.7: Das Vorspektrometer.** Links ist eine schematische Abbildung zu sehen, rechts eine Fotografie des Vorspektrometertanks nach der Auslieferung an das Forschungszentrum Karlsruhe im Oktober 2003 und nach der Montage des Heiz- und Kühlsystems.

### 2.3.3 Hauptspektrometer

Das Hauptspektrometer, ein großer MAC-E-Filter mit etwa 10 m Durchmesser und 24 m Länge, stellt die zentrale Komponente des KATRIN Experiments dar. Ebenso wie beim Vorspektrometer soll das elektrostatische Analysierpotential nicht durch eine Anordnung segmentierter Elektroden erzeugt werden, wie in Abb. 2.2 gezeigt, sondern die Hülle des Vakuumtanks selbst wird als eine große Elektrode fungieren. Weiterhin wird der Tank von innen durch eine Drahtelektrode ausgekleidet, welche zur Formung des elektrostatischen Feldes beiträgt und gleichzeitig – wie schon bei der Beschreibung des Vorspektrometers erwähnt – eine Unterdrückung des Untergrundes bewirken soll. Neben den beiden supraleitenden Hauptspektrometersolenoiden wird es noch zusätzliche Luftspulen geben, welche den Zentralteil des MAC-E-Filters umfassen und den magnetischen Flussschlauch in der Umgebung der Analysierebene beeinflussen. Das elektromagnetische Design der Tank- und Drahtelektrode ist Gegenstand dieser Diplomarbeit und wird in den folgenden Kapiteln noch ausführlich beschrieben.

Die Konzipierung und Herstellung eines Ultrahochvakuum-Tanks mit solchen Ausmaßen stellt eine große technische Herausforderung dar. Da das Hauptspektrometer mit seinen beiden symmetrisch angeordneten Solenoiden eine magnetische Flasche darstellt, können Restgasionisationen zu einer Speicherung der betreffenden Teilchen führen, welche unter Umständen weitere Ionisationen verursachen. Sollten die so entstandenen Sekundärelektronen bis zum Detektor gelangen, ergibt sich eine energetisch nicht vom erwünschten  $\beta$ -Signal zu trennende Untergrundkomponente. Um diese möglichst klein zu halten, muss das Hauptspektrometer während des Messbetriebs auf einem Druck von  $p < 10^{-11}$  mbar gehalten werden. Vakuumtests am Vorspektrometer zeigen, dass das Erreichen solcher Ultrahochvakuumbedingungen möglich sein wird. Zusätzlich wird auch die Installation eines leistungsfähigen Heizsystems erforderlich sein, welches das Ausheizen des gesamten Tanks bei bis zu 350° C ermöglicht.

### 2.3.4 Detektor

Der Detektor muss in der Lage sein, Elektronen im Energiebereich um 18.6 keV mit einer hohen Effizienz nachzuweisen. Das endgültige Design des Detektors steht noch nicht fest. Für das Vorspektrometer wird zur Zeit z.B. ein großflächiger Halbleiterdetektor bestehend aus einer Anordnung von 64 PIN-Dioden geprüft (siehe Abb. 2.8).



**Abbildung 2.8: Segmentierte PIN-Diode mit 8 × 8 Elementen.** Eine solche Anordnung wird für den am Vorspektrometer einzusetzenden Halbleiterdetektor getestet.

Der Detektor sollte eine gute Energieauflösung mit einer Halbwertsbreite von  $\Delta E \approx 600$  eV bei  $E = 18.6$  keV aufweisen. Diese trägt dazu bei, erwünschte Ereignisse von Untergrundsignalen mit unterschiedlicher Energie zu trennen. Ein segmentierter Detektor bietet eine Ortsauflösung, durch die es möglich sein wird, das Profil der Tritiumquelle zu vermessen. Eine ausreichend hohe Ortsauflösung ist notwendig, um magnetische und elektrische Feldinhomogenitäten in der Analysierebene bei der späteren Datenanalyse berücksichtigen zu können (vgl. Abschnitt 4.3). Der Detektor sollte außerdem für den Langzeitbetrieb geeignet sein und ein geringes intrinsisches Untergrundrauschen aufweisen.

## 2.4 Anforderungen an ein Tritium- $\beta$ -Experiment der nächsten Generation

Nach jahrelangen erfolgreichen Messungen wurde der Betrieb der Neutrinomassenexperimente in Mainz und Troitsk eingestellt, da diese jeweils die Empfindlichkeitsgrenze der bestehenden Apparatur erreicht haben. Aufbauend auf den Erfahrungen dieser Experimente wird nun das Verfahren zur Bestimmung von  $m(\nu_e)$  aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall weiterentwickelt. Das Ziel des KATRIN Experiments ist eine Erhöhung der Sensitivität auf die Neutrinomasse um eine Größenordnung gegenüber den bisherigen Messungen: eine Festlegung von  $m(\nu_e)$  im Sub-eV-Bereich ist angestrebt. Da die eigentliche Observable bei der Analyse der Formänderung des  $\beta$ -Spektrums das Massenquadrat  $m^2(\nu_e)$  ist, benötigt man für eine Bestimmung der Masse selbst sogar eine Steigerung der Empfindlichkeit um zwei Größenordnungen. Mit dem KATRIN Experiment würde eine Neutrinomasse von  $m(\nu_e) = 0.30$  eV mit einer Signifikanz<sup>8</sup> von  $3\sigma$  entdeckt,  $m(\nu_e) = 0.35$  eV mit  $5\sigma$ . Sollte KATRIN kein Signal für eine von null verschiedene Neutrinomasse finden, könnte eine Obergrenze von  $m(\nu_e) < 0.2$  eV (90 % C.L.) angegeben werden. Dabei wird angenommen, dass die Beiträge von statistischen und systematischen Fehlern nach drei Jahren effektiver Messzeit etwa gleich groß sind.

Um diese Sensitivitätssteigerung zu erreichen, muss eine ganze Reihe von Parametern gegenüber bisherigen Experimenten verbessert bzw. optimiert werden. Zu nennen sind da vor allem

- a) die Verbesserung der Energieauflösung des Spektrometers um einen Faktor fünf auf unter 1 eV,
- b) das Erreichen einer hohen Signalstärke im relevanten Energiebereich, welche etwa 100-mal größer ist als bei den Experimenten von Mainz und Troitsk,
- c) die Beibehaltung der bisher erreichten Werte des Untergrundbeitrages von etwa 10 mHz bei deutlich größerem Aufbau,
- d) eine Reduktion der systematischen Unsicherheiten um zwei Größenordnungen, sowie
- e) eine Verlängerung der effektiven Messzeit von etwa 100 Tagen auf etwa 1000 Tage.

Bei den ersten beiden Punkten dieser Liste kommen die Vorteile des MAC-E-Filters besonders zum Tragen. Gerade in der Möglichkeit, eine Kombination aus hervorragender Energieauflösung und hoher Luminosität zu erlangen, liegt die Stärke dieses Spektrometerprinzips. Die Auflösung  $\Delta E$  des MAC-E-Filters lässt sich gemäß Gl. (2.16) durch das Verhältnis zwischen minimaler und maximaler Magnetfeldstärke einstellen. Die Begrenzung der maximalen Auflösung ist hauptsächlich durch die technische Realisierbarkeit eines geeigneten Designs des Magnetfeldes gegeben. Da der magnetische Fluss

$$\Phi = \int B \, dA \quad (2.24)$$

über den gesamten Aufbau von der Quelle bis zum Detektor erhalten bleibt (siehe Anhang A), weist der Flussschlauch in der Analysierebene des Hauptspektrometers, an der Stelle der geringsten Magnetfeldstärke  $B_{\min}$ , seine größte Ausdehnung auf. Welche Auswirkungen die

<sup>8</sup> $\sigma$  gibt die Summe aus statistischer und systematischer Unsicherheit des Fits an das gemessene Spektrum an.

benötigte hohe Energieauflösung auf die Größe des Hauptspektrometers hat, soll anhand der folgenden Überlegungen illustriert werden.

Die für KATRIN angestrebte relative Energieauflösung soll um etwa einen Faktor fünf besser sein als die bisheriger MAC-E-Filter. Mit der Vorgabe

$$\frac{1}{20000} = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{0.93 \text{ eV}}{18600 \text{ eV}} \quad (2.25)$$

kann man aus Gl. (2.16) leicht das notwendige Magnetfeldverhältnis  $B_{\min}/B_{\max}$  ablesen:

$$\frac{B_{\min}}{B_{\max}} = \frac{1}{20000}. \quad (2.26)$$

Es ist also sinnvoll,  $B_{\max}$  möglichst groß und  $B_{\min}$  möglichst klein zu wählen. Bei der Festlegung der minimalen Feldstärke ist der Einfluss des Erdmagnetfeldes zu beachten ( $B_{\text{terr}} \approx 0.5$  Gauß), dessen vollständige Abschirmung am Ort des Experiments nur mit großem Aufwand möglich wäre. Der Wert von  $B_{\min}$  sollte also so gewählt sein, dass die entsprechende Komponente des terrestrischen Magnetfeldes sich nicht störend auswirkt. Gleichzeitig ist zu bedenken, dass die Supraleitertechnologie heute zwar Magnetfeldstärken über 10 T ermöglicht, dies jedoch im Allgemeinen mit immensen Kosten für das Magnetsystem verbunden ist. Hier erweist es sich als günstiger, auf Magnetfeldstärken an der Grenze des heute Machbaren zu verzichten. Das Zahlenverhältnis aus Gl. (2.26) kann unter Beachtung der oben genannten Bedingungen zum Beispiel durch die Wahl

$$\begin{aligned} B_{\max} &= 6 \text{ T}, \\ B_{\min} &= 3 \text{ Gauß} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

realisiert werden. Mittels Gl. (2.24) lässt sich der notwendige Durchmesser  $d_{\text{analys}}$  des Flusschlauches in der Analysierebene abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{analys}}}{A_{\text{source,eff}}} &= \frac{B_{\max}}{B_{\min}} = 20000 \\ \Leftrightarrow d_{\text{analys}} &= 2 \cdot \sqrt{A_{\text{source,eff}} \cdot 20000 / \pi}. \end{aligned}$$

Um eine hohe Zählrate zu erhalten, sollte die effektive Quellfläche  $A_{\text{source,eff}}$  möglichst groß sein. Setzt man etwa  $A_{\text{source,eff}} = 32 \text{ cm}^2$  ein, so ergibt sich  $d_{\text{analys}} = 9 \text{ m}$ . Da der Hauptspektrometertank von innen mit einer Drahtelektrode ausgekleidet werden soll, wird ein Hüllendurchmesser von  $d_{\text{tank}} \lesssim 10 \text{ m}$  benötigt, was gerade noch technisch realisierbar ist.

Bei der Dimensionierung des Spektrometers ist außerdem auf die Wahrung des adiabatischen Energietransfers zu achten. Das bedeutet, dass der Gradient der Magnetfeldstärke entlang der Flugbahn eines Elektrons durch den MAC-E-Filter nicht zu groß sein darf (siehe Abschnitt 2.2.1, insbesondere Abb. 2.3). Der Unterschied zwischen den Feldstärken  $B_{\max}$  und  $B_{\min}$  muss also über eine hinreichend große Distanz verteilt werden, was eine enorme Länge des Spektrometertanks erforderlich macht.

Der zweite oben genannte Punkt, die Zählrate im Messintervall, hängt u.a. von der Stärke der Tritiumquelle sowie von der Raumwinkelakzeptanz  $\Delta\Omega/4\pi$  des Spektrometers ab. Durch die magnetische adiabatische Kollimation hat der MAC-E-Filter den Vorteil, dass ein großer Anteil der von einer isotrop abstrahlenden Quelle in den vorderen Halbraum emittierten Elektronen im Spektrometer der Energieanalyse zugeführt wird (siehe Abschnitt 2.2.2). Von

dieser Eigenschaft profitierten bereits andere Messungen, wie die schon genannten Experimente von Mainz und Troitsk. Zu einer Verbesserung der Zählrate trägt einerseits die große Fläche der Analysierebene des Hauptspektrometers sowie andererseits die hohe Aktivität der Quelle bei. Um eine ausreichend gute Statistik der Daten zu erreichen, wird eine effektive Messdauer von mindestens drei Jahren angestrebt. Dies stellt eine große technische Herausforderung dar, da z.B. die Hochspannungsversorgung zur elektrostatischen Energiefilterung über diesen langen Zeitraum extrem stabil gehalten und Schwankungen auf einem Niveau von wenigen ppm erkannt werden müssen. Außerdem ist eine möglichst gleich bleibende und sehr genau bekannte Dichte der Tritiumquelle erforderlich. Gleichzeitig ist während der gesamten Messdauer das Ultrahochvakuum in einem sehr großen Spektrometervolumen in konstanter Güte zu gewährleisten.

Zur Reduktion des Untergrundbeitrages aus den Spektrometern werden umfangreiche Maßnahmen ergriffen. Zum einen herrschen während des Betriebs in den Spektrometern Ultrahochvakuumbedingungen, zum anderen sollen sowohl Vor- als auch Hauptspektrometer mit dem bereits erwähnten abschirmenden Drahtelektrodensystem ausgerüstet werden. Eine Untergrundrate von  $N_{\text{bg}} < 10 \text{ mHz}$  wird angestrebt.

Unter der Annahme, dass ein systematischer Fehler, welcher das Spektrum gaußförmig verschmiert, in der Analyse unberücksichtigt bleibt, ergibt sich eine Verschiebung des ermittelten Neutrinomassenquadrates von  $\Delta m^2 = -2\sigma_{\text{syst}}^2$  zu negativen Werten hin [Rob88]. Daher ist es wichtig, diese Effekte möglichst vollständig zu erfassen und bei der Analyse miteinzubeziehen. Beiträge zum systematischen Fehler kommen unter anderem von der inelastischen Streuung der Elektronen in der Quelle, unerkannten Schwankungen der Retardierungsspannung, Fluktuationen der Säulendichte der gasförmigen Tritiumquelle, Aufladung der Quelle durch zurückbleibende positive Ionen und aus Unsicherheiten in der quantenchemischen Berechnung der Endzustandsverteilung.

## Kapitel 3

# Simulationsprogramme

Um das elektromagnetische Design des KATRIN Hauptspektrometers mit Hilfe von Computersimulationen zu testen und zu optimieren, werden leistungsfähige Werkzeuge benötigt. Die Simulationsprogramme müssen in der Lage sein, recht komplexe elektrostatische und magnetische Felder zu berechnen und bei der Teilchenbahnverfolgung zu handhaben. Je nach Anpassungsgrad der zur Verfügung stehenden Software kann es erforderlich sein, eine Kombination verschiedener kompatibler Routinen einzusetzen. Wichtige Merkmale eines solchen Programms bzw. Programmpakets sind:

- a) die Möglichkeit zur Eingabe und unkomplizierten Änderung der Elektroden- und Magnetkonfiguration,
- b) eine möglichst effiziente und genaue Berechnung der elektrischen und magnetischen Felder aus den vorgegebenen Geometrien und Randbedingungen,
- c) die Speicherplatz und Rechenzeit sparende Ausnutzung vorhandener Symmetrien bei der Erstellung und Verwaltung der Feldkarten,
- d) die Durchführung von Bahnverfolgungsrechnungen für geladene Teilchen in den so definierten elektromagnetischen Feldern unter variablen Startparametern, sowie
- e) die Ausgabe relevanter Parameter aus der Bahnverfolgungsrechnung zur Kontrolle und Optimierung des elektromagnetischen Designs.

Für die speziellen Fragestellungen dieser Arbeit werden die Flugbahnen von Elektronen in dem großen MAC-E-Filter, welcher das KATRIN Hauptspektrometer bildet, simuliert. In vielen Situationen ist es erforderlich, die Zyklotronbewegung der Elektronen auf ihrem Weg entlang der Magnetfeldlinien bei der Bahnverfolgung zu berücksichtigen. Man spricht dann von einer „mikroskopischen“ Berechnung der Teilchenbahn. In anderen Fällen kann es ausreichend sein, die Spiralbewegung der Elektronen zu vernachlässigen und lediglich die adiabatische Führung entlang der Magnetfeldlinien in Betracht zu ziehen. Diese Methode hat den Vorteil wesentlich kleinerer Rechenzeiten bei der Bahnverfolgung und wird in dem von T. Thümmler entwickelten Programm „Adipark“ (Adiabatic particle tracking) eingesetzt [Thü02]. In der vorliegenden Arbeit wurden jedoch durchgehend mikroskopische Berechnungen durchgeführt.

Weiterhin ist zu beachten, dass die Elektronen am hochenergetischen Ende des Tritium- $\beta$ -Spektrums eine Geschwindigkeit von etwa 25 % der Lichtgeschwindigkeit erreichen. Um besonders genaue Ergebnisse zu erhalten, muss also relativistisch korrekt gerechnet werden.

### 3.1 Simion 3D Version 7.0

Das am *Idaho National Engineering and Environmental Laboratory* entwickelte kommerzielle Simulationsprogramm „Simion 3D“ erfüllt die meisten der oben genannten Anforderungen. Es diente ursprünglich der Modellierung elektrostatischer Linsen, wurde jedoch inzwischen zu einem Werkzeug mit viel allgemeinerem Einsatzbereich erweitert. Einige Grundlagen des Programms sollen hier kurz beschrieben werden, weitere Informationen können dem Benutzerhandbuch [Sim00] entnommen werden.

Simion ist in der Lage, relativistisch korrekte Bahnverfolgungsberechnungen für geladene Teilchen auszuführen. Die „Umgebung“, in der diese Berechnungen durchgeführt werden, wird durch Überlagerung separater elektrischer und magnetischer Feldkarten erzeugt. Diese Karten (*potential arrays*, PA) müssen zuvor erstellt werden. Dazu bietet Simion die Möglichkeit, die Geometrien des elektromagnetischen Designs entweder über eine grafische Benutzeroberfläche oder mit Hilfe einer speziellen Programmiersprache innerhalb einer Textdatei (*geometry file*) zu definieren. Es werden zweidimensionale und dreidimensionale Feldkarten unterschieden. Zur effizienten Ausnutzung der Rechnerressourcen kann das zu modellierende Problem durch geeignete Symmetrioptionen, z.B. Achsen- oder Zylindersymmetrie, vereinfacht werden. Die Kalkulation der Potentialkarten in Simion beruht auf einer speziellen *Methode der finiten Differenzen*, welche Relaxation genannt wird.

Diese soll am Beispiel einer elektrischen Potentialkarte erläutert werden. Unter Beachtung der durch die Elektrodengeometrie festgelegten Randbedingungen wird eine numerische Lösung der Laplace-Gleichung

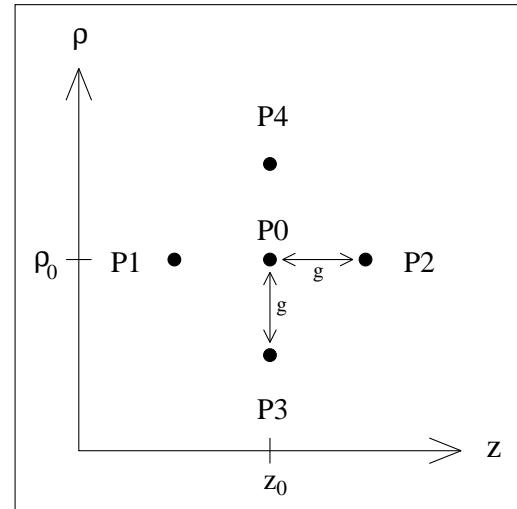
$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.1)$$

berechnet. Gesucht ist also die Potentialfunktion  $\phi(\mathbf{r})$  im Raumbereich außerhalb der Elektroden. Die Karte wird mit einer Gitterkonstanten  $g$  diskretisiert. Für den Spezialfall eines zylindersymmetrischen zweidimensionalen Problems können die Zylinderkoordinaten  $(\rho, z)$  verwendet werden. Am Ort der Elektroden liegt ein festes Potential vor. Der Relaxationsprozess wird durch Zuweisung eines vorläufigen Potentialwertes zu jedem Gitterpunkt  $P_0$  außerhalb der Elektroden initiiert. Pro Durchlauf berechnet ein Algorithmus für jeden Punkt  $P_0$  einen neuen Potentialwert, welcher durch Mittelung über die nächsten Nachbarpunkte gebildet wird. Im Fall einer zweidimensionalen Karte sind dies vier Punkte (Abb. 3.1), für

drei Dimensionen sechs Punkte<sup>1</sup>. Damit ergibt sich folgendes Potential am Punkt  $P_0$ :

$$2D : P_0 = \frac{1}{4} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4), \quad (3.2)$$

$$3D : P_0 = \frac{1}{6} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6). \quad (3.3)$$



**Abbildung 3.1:** Schema der Relaxation einer zweidimensionalen Feldkarte in Simion 3D. Die Karte ist in  $\rho$ - und  $z$ -Richtung mit der Gitterkonstanten  $g$  diskretisiert.

<sup>1</sup>Im dreidimensionalen Fall würden die Punkte  $P_5$  und  $P_6$  in Abb. 3.1 relativ zur Bildebene vor bzw. hinter  $P_0$  liegen.

Dieses Verfahren wird iterativ so lange fortgesetzt, bis die Differenz zwischen dem momentanen Potentialwert an  $P_0$  und dem jeweils neu berechneten Wert kleiner wird als eine vom Benutzer vorgegebene Schranke. Das Konvergenzziel bestimmt wesentlich die Dauer des gesamten Relaxationsprozesses und sollte dem Zweck der jeweiligen Anwendung angepasst werden.

Da die Laplace-Gleichung linear ist, sind ihre Lösungen additiv. Daraus ergibt sich auch eine einfache Möglichkeit, ein System von mehreren Elektroden zu berechnen. Dabei wird für jede Einzelelektrode eine Potentialkarte angelegt und nach dem oben beschriebenen Verfahren relaxiert. In diesen Karten werden alle übrigen Elektroden, außer der gerade betrachteten, künstlich auf das Potential 0 V gesetzt. Am Ende der Relaxation werden sämtliche Feldkarten einander überlagert, um das Potential der Gesamtanordnung zu erhalten.

Während sich also elektrostatische Potentiale einer Elektrodenkonfiguration, wie sie typischerweise für einen MAC-E-Filter benötigt wird, mit den Simion zur Verfügung stehenden Mitteln berechnen lassen, gestaltet sich die Erstellung geeigneter Magnetfeldkarten etwas schwieriger. Der Grund hierfür ist, dass Simion elektro- und magnetostatische Randwertprobleme im Prinzip mit der gleichen Methode behandelt: durch die Definition elektrischer und magnetischer Elektroden, welche jeweils mit konstanten skalaren Potentialen belegt werden. Aus diesen Potentialen ergeben sich die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes mittels Gradientenbildung.

Da die Verwendung eines skalaren magnetischen Potentials etwas ungewöhnlich erscheinen mag, soll hier eine kurze Erläuterung zur Einführung dieses Potentials gegeben werden.

Die grundlegenden Differentialgleichungen der Magnetostatik lauten:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.5)$$

Magnetostatische Randwertprobleme können – je nach Art des Problems – auf verschiedene Weise angegangen werden. Aufgrund von Gl. (3.4) ist es stets möglich, ein Vektorpotential  $\mathbf{A}$  zu definieren, so dass  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  gilt. In bestimmten Fällen kann es sich als einfacher erweisen, ein skalares magnetisches Potential  $\phi_{\text{mag}}$  einzuführen mit der Eigenschaft  $\mathbf{H} = -\nabla \phi_{\text{mag}}$ , ganz analog zur Elektrostatisik. Dies ist genau dann möglich, wenn die Stromdichte  $\mathbf{j}$  im betrachteten Raumgebiet verschwindet, so dass Gl. (3.5) in  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  übergeht. Setzt man für linear reagierende Medien eine Relation der Form  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  voraus, so reduziert sich Gl. (3.4) auf eine Laplace-Gleichung für  $\phi_{\text{mag}}$ .

Anstatt der Eingabe einer realistischen Spulenkonfiguration erfordert die Definition der Magnetfeldgeometrie über skalare Potentiale eine Umschreibung mit Hilfe künstlicher „magnetischer Monopole“. Da dies im Allgemeinen wenig intuitiv ist, erweist sich insbesondere die Definition komplexer Magnetfeldkonfigurationen mit diesem Verfahren als eher unpraktikabel. Es ist jedoch möglich, diese Schwierigkeit zu umgehen. Das in Abschnitt 3.2 beschriebene Programm „Bfield\_3d“ kann die für Simion benötigten skalaren magnetischen Potentiale zur Verfügung stellen.

Bahnverfolgungsrechnungen werden in Simion mit Hilfe eines dreiteiligen Algorithmus durchgeführt. Im ersten Schritt werden getrennt voneinander elektrostatische und magnetische Kräfte aus den jeweiligen Potentialen berechnet. Hierzu sind Informationen über die momentane Position sowie die Geschwindigkeit des Teilchens nötig. Aus den Kräften wird im zweiten Schritt die momentan auf das Teilchen wirkende Beschleunigung ermittelt. Durch numerische Integration der Bewegungsgleichung (Runge-Kutta-Verfahren in 4. Ordnung) ergibt sich schließlich die erwartete Position und Geschwindigkeit des Teilchens im nächsten

Zeitschritt. Die Größe der verwendeten Zeitschritte kann während der Bahnberechnung dynamisch angepasst werden, um gleichzeitig numerische Fehler sowie die Anzahl der benötigten Integrationsschritte zu minimieren. Dazu muss jedoch der vom Benutzer wählbare Wert des sogenannten Rechengenauigkeitsparameters (*computation quality factor, QF*) geeignet eingestellt sein (siehe dazu [Sim00] und [Fic00]).

## 3.2 Magnetfeldberechnung mit Bfield\_3d

Das Programm Bfield\_3d wurde im Rahmen der Diplomarbeit von B. Flatt [Fla01] entwickelt, um die Berechnung von Magnetfeldern gegeneinander in einer Ebene gekippter Spulen zu ermöglichen. Dadurch wird der Einsatzbereich gegenüber anderen Programmen, welche auf zylindersymmetrische Probleme beschränkt sind, erweitert. Der Benutzer kann nach Angabe der Spulenkonfiguration zwischen verschiedenen Optionen wählen:

- Berechnung des Magnetfeldes oder des magnetischen Potentials,
- Verfolgung von magnetischen Feldlinien in einem vorzugebenden Volumen,
- Bestimmung der Induktivität einer Spule und Berechnung der gespeicherten Energie, oder
- Erzeugung einer Datei zur grafischen Visualisierung der aktuellen Spulengeometrie.

In der vorliegenden Arbeit wurde Bfield\_3d hauptsächlich für zwei Anwendungen benutzt:

- 1) zur Erzeugung zweidimensionaler Karten mit skalaren magnetischen Potentialen zum Einsatz in Simion, sowie
- 2) zur raschen Modifikation der Spulengeometrie für das Hauptspektrometer und Analyse der geänderten magnetischen Eigenschaften des Designs, unabhängig von den Bahnverfolgungsrechnungen.

Die Spulengeometrie wird mit Hilfe einer Parameterdatei eingelesen, welche außer der Gesamtzahl von vorhandenen Solenoiden die folgenden Informationen für jede Spule enthalten muss:

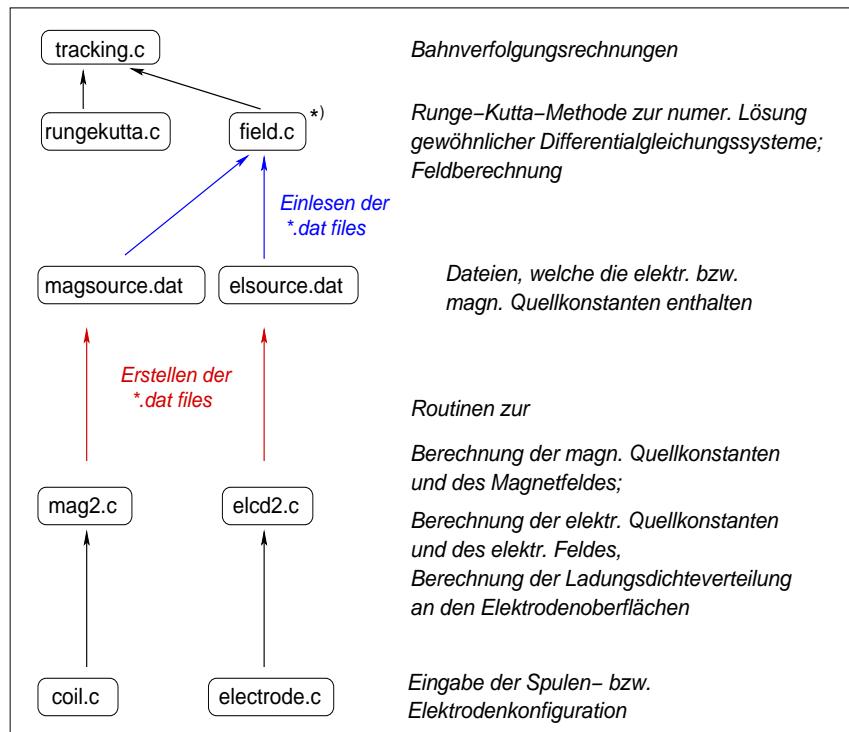
$x$	Position des Spulenmittelpunktes	$n$	Windungszahl = longitudinale Diskretisierung
$R$	Innenradius	$SD$	radialer Diskretisierungsparameter
$D$	radiale Dicke	$n \cdot I$	Gesamtstromstärke („Ampèrewindungen“)
$L$	Länge	$\alpha, \tau$	Kippwinkel und Versatz zur Hauptachse

Zur Berechnung des magnetischen Potentials wird jeder Solenoid in eine durch  $SD$  bestimmte Anzahl langer, dünner Spulen unterteilt, deren Potential mit Hilfe einer radialen Reihenentwicklung (*radial series expansion*) ermittelt werden kann. Dabei ist stets der Konvergenzradius dieser Reihe zu beachten. Um eine hohe Genauigkeit zu erreichen, sollten die Diskretisierungsparameter  $n$  und  $SD$  nicht zu klein gewählt werden.

### 3.3 Neue Werkzeuge zur Feldberechnung und Bahnverfolgung

Zunächst wurden die Simulationsrechnungen zum KATRIN Hauptspektrometer mit der Kombination aus Simion und Bfield\_3d durchgeführt. Es zeigte sich jedoch, dass es in bestimmten Fällen bei der Bahnverfolgungsberechnung in Simion zu einer starken Akkumulation numerischer Fehler kommt, so dass die Genauigkeit nicht mehr ausreichend ist. Die Untersuchung dieser Effekte wird in Kapitel 5 beschrieben. Da der Quelltext der kommerziell vertriebenen Software Simion geschützt und nicht öffentlich zugänglich ist, kam eine Lösung durch Veränderung des bestehenden Programms nicht in Frage. Statt dessen wurde für die weiteren Rechnungen ein Paket verschiedener von Dr. Ferenc Glück (Universität Mainz, jetzt Forschungszentrum Karlsruhe) entwickelter Programme verwendet, welches im Folgenden erläutert werden soll. Dieses Paket stellt Routinen sowohl zur Berechnung axialsymmetrischer elektrischer und magnetischer Felder als auch zur Bahnverfolgung zur Verfügung. Anders als bei Simion ist hier also keine volle dreidimensionale Behandlung möglich, was jedoch für die axialsymmetrischen Simulationen des KATRIN Hauptspektrometers unerheblich ist. Die Programme sind in der Programmiersprache C geschrieben und können vom Benutzer den Anforderungen entsprechend verändert werden. Hierdurch ergeben sich enorme Vorteile, da ein hoher Anpassungsgrad an die jeweilige Problemstellung erreicht wird.

Das Programmpaket wurde zum ersten Mal innerhalb dieser Diplomarbeit ausführlich getestet und verwendet und soll deshalb hier näher erläutert werden. In Abbildung 3.2 sind die verschiedenen Teile in einem Flussdiagramm gezeigt. Es dient der Veranschaulichung der in den folgenden Abschnitten beschriebenen Abläufe.



**Abbildung 3.2: Flussdiagramm der Feld- und Bahnberechnungs routinen.** Die Routinen aus der mit \*) gekennzeichneten Datei `field.c` können auch getrennt von den Bahnverfolgungsberechnungen verwendet werden.

### 3.3.1 Berechnung axialsymmetrischer Magnetfelder

Um das Magnetfeld einer gegebenen axialsymmetrischen Spulenkonfiguration zu berechnen, kann das Programm `coil.c` verwendet werden. Es benötigt die Datei `mag2.c`. Der Programmablauf gliedert sich in drei Schritte:

#### 1. Eingabe der Spulenkonfiguration

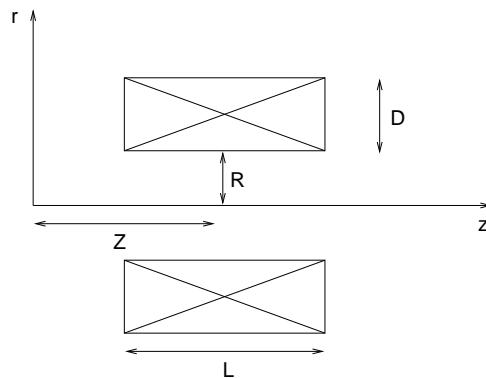
Zur Definition der Parameter einer beliebigen Anzahl von Spulen wird im Programm `coil.c` die Routine `inputcoil()` aufgerufen. Diese erlaubt es, alle benötigten Daten aus einer ASCII-Datei einzulesen, welche das folgende Format hat:

- In der ersten Zeile wird die Anzahl `Ncoil` der Solenoiden angegeben.
- Es folgt für jede einzelne Spule eine Zeile mit fünf Einträgen:

<code>Z</code>	<code>[cm]</code>	Position der Spulenmitte in $z$ -Richtung, d.h. entlang der Symmetriearchse der Konfiguration,
<code>R</code>	<code>[cm]</code>	Innenradius der Spule,
<code>D</code>	<code>[cm]</code>	Dicke der Spule,
<code>L</code>	<code>[cm]</code>	Länge der Spule,
<code>I</code>	<code>[A]</code>	Gesamtstromstärke in der Spule, d.h. (Windungszahl) $\times$ (Stromstärke pro Windung).

Alle diese Parameter sind bereits aus der Aufstellung der für Magnetfeldberechnungen mit `Bfield_3d` benötigten Angaben bekannt<sup>2</sup> (siehe Abschnitt 3.2). Es ist somit möglich, eine schon bestehende Parameterdatei des Programms `Bfield_3d` nach geringfügigen Modifikationen für das hier beschriebene Programm weiterzuverwenden.

Die geometrischen Eingabeparameter für eine Spule sind in Abb. 3.3 skizziert.



**Abbildung 3.3: Skizze zur Veranschaulichung der Spulen-Eingabeparameter.** Gezeigt ist ein Schnitt entlang der  $z$ - $r$ -Ebene. Da bei der Berechnung der Magnetfelder die Zylindersymmetrie ausgenutzt wird, sind wegen der Rotation um die  $z$ -Achse nur positive Werte von  $r$  definiert. Bei der Spezifikation der Spulenparameter genügt daher das obere der beiden hier abgebildeten Rechtecke.

<sup>2</sup>Der einzige Unterschied besteht darin, dass hier Zylinderkoordinaten verwendet werden, so dass die Koordinate entlang der Symmetriearchse nun  $z$  statt  $x$  heißt. Da in dem neuen Programmpaket durchweg SI-Einheiten verwendet werden, müssen die – in Anlehnung an die Parameterdateien für `Bfield_3d` – in cm angegebenen Längen noch intern in m umgerechnet werden.

Die Spulenkonfiguration wird an das Feld `coil[i][j]` übertragen, welches die Dimension  $(N_{coilmax}+1) \times 5$  hat. Hierbei wird Speicherplatz für die maximal mögliche Anzahl von Spulen,  $N_{coilmax}$ , reserviert. Der Index  $i$  läuft von 1 bis  $N_{coil}$ , während  $j$  die Werte 0 bis 4 annehmen kann und somit alle fünf Spulenparameter berücksichtigt werden.

Nachdem die Konfiguration des gewünschten magnetischen Designs eingegeben ist, erfolgt die Definition der sogenannten Quellpunkte (*source points*), welche in diskreten Abständen auf der Symmetriearchse (der  $z$ -Achse) verteilt sind. An diesen Punkten werden später die Quellkonstanten berechnet. Die  $z$ -Positionen werden in dem Vektor `z0vec[k]` gespeichert, welcher die Länge  $N_{sp}$  (number of source points) hat. Sowohl die Anzahl als auch die Anordnung der Quellpunkte sollte der gewählten Magnetfeldgeometrie angepasst sein. Eine besonders einfache, aber häufig ausreichende Variante ist die äquidistante Quellpunktverteilung. In diesem Fall brauchen vom Benutzer nur die Positionen des ersten und letzten Punktes, sowie ein fester Abstand zwischen den Quellpunkten, angegeben zu werden. Der Abstand sollte dabei stets kleiner gewählt werden als der minimale Innenradius der verwendeten Solenoide.

## 2. Berechnung der magnetischen Quellkonstanten

Als nächstes wird die Funktion `magsource(z0vec)` aufgerufen. Diese berechnet an allen Quellpunkten  $z_0$  die sogenannten Quellkoeffizienten  $B_n$ , welche proportional zur  $n$ -ten Ableitung der Magnetfeldkomponente  $B_z$  bezüglich  $z$  sind. Der Benutzer kann durch die Zahl  $n_{max}$  die höchste berücksichtigte Ordnung der Ableitung festlegen. Die Berechnung dieser Koeffizienten, auch Quellkonstanten genannt, kann für dünne Spulen analytisch mittels der ersten Ableitungen von Legendre-Polynomen erfolgen; die Zuhilfenahme numerischer Integration wird erst bei der Zusammensetzung ausgedehnter (realistischer) Spulen aus den dünnen Spulen erforderlich.

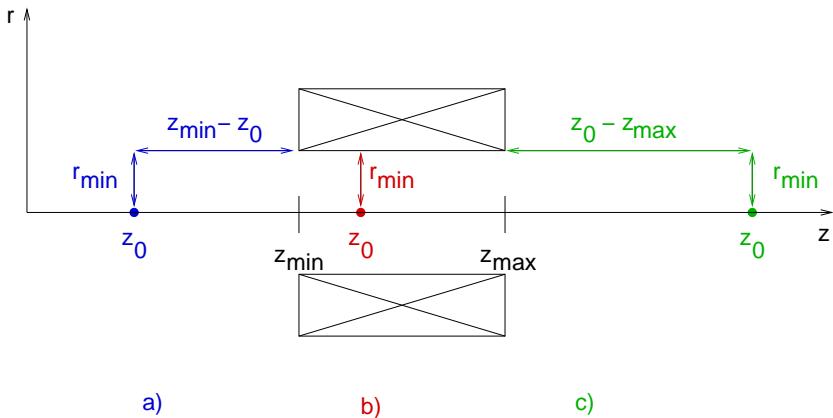
Außerdem wird für jeden Quellpunkt  $z_0$  ein zentraler Konvergenzradius  $\varrho_{cen}$  ermittelt<sup>3</sup>. Dieser ist festgelegt durch den kleinsten Abstand des Quellpunktes von den Spulen. Eine vereinfachte Darstellung ist in Abb. 3.4 gegeben: Dort wird nur eine einzelne Spule mit den Begrenzungen  $z_{min}$  und  $z_{max}$  betrachtet. In dieser Situation können drei verschiedene Fälle auftreten:

$$\varrho_{cen} = \begin{cases} \sqrt{r_{min}^2 + (z_{min} - z_0)^2} & \text{für } z_0 < z_{min} & (a) \\ r_{min} & \text{für } z_{min} \leq z_0 \leq z_{max} & (b) \\ \sqrt{r_{min}^2 + (z_{max} - z_0)^2} & \text{für } z_0 > z_{max} & (c). \end{cases} \quad (3.6)$$

Als Ergebnis dieser Berechnungen werden folgende Informationen in die ASCII-Datei `magsource.dat` geschrieben:

- die Anzahl  $N_{sp}$  der Quellpunkte und die maximale Ordnung  $n_{max}$  der betrachteten Ableitungen des Magnetfeldes,
- der Index  $k$ , die Position  $z_0$ , der Konvergenzradius und die Quellkoeffizienten  $B_n$  ( $n = 0, \dots, n_{max}$ ) für jeden Quellpunkt.

<sup>3</sup>Erläuterung zur Bezeichungsweise: es wird unterschieden zwischen einem „zentralen“ Konvergenzradius  $\varrho_{cen}$  und einem „entfernen“ Konvergenzradius  $\varrho_{rem}$  (*remote*), welcher aber für die hier beschriebenen axial-symmetrischen Magnetfeldberechnungen nicht relevant ist.



**Abbildung 3.4: Schemazeichnung zur Erläuterung des zentralen Konvergenzradius.** Gezeigt sind drei mögliche Positionen eines Quellpunktes  $z_0$  relativ zu einer Spule mit den Eckpunkten  $(z_{min}, r_{min})$  und  $(z_{max}, r_{min})$ . Der Abstand zwischen Quellpunkt und Spulenrand definiert den zentralen Konvergenzradius  $\varrho_{cen}$  in diesem Punkt.

### 3. Komponentenweise Berechnung des magnetischen Feldes

Um schließlich das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und die Komponenten  $B_z$  und  $B_r$  des Magnetfeldes in einem beliebigen Feldpunkt  $(z, r)$  zu erhalten, werden in der Funktion `magfield` geeignete Reihenentwicklungen mit Legendrepolytomen verwendet. Als Beispiel soll hier die Berechnung von  $B_z(z, r)$  betrachtet werden:

$$B_z(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left( \frac{\varrho}{\varrho_{cen}} \right)^n P_n(u). \quad (3.7)$$

Darin ist

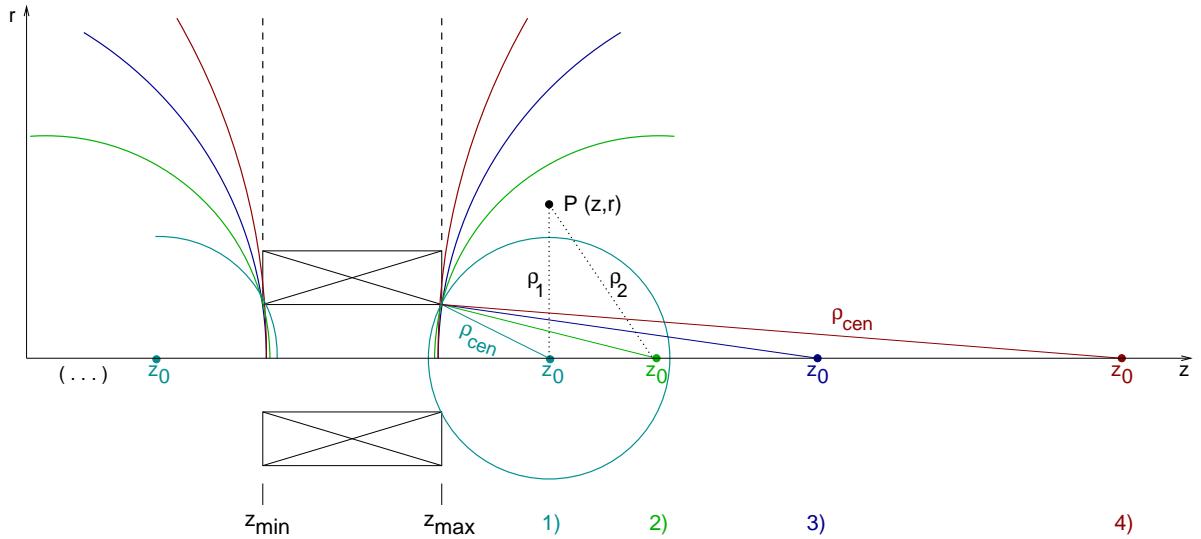
$\varrho = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2}$   
der Abstand zwischen Feldpunkt und dem nächstgelegenen Quellpunkt,

$B_n$  der  $n$ -te Quellkoeffizient im nächstgelegenen Quellpunkt,

$u = (z - z_0)/\varrho$   
ein dimensionsloser Parameter, und

$P_n(u)$  das  $n$ -te Legendrepolytom.

Bei dieser Methode ist zu beachten, dass die Reihe in (3.7) nur konvergiert, falls  $\varrho < \varrho_{cen}$  erfüllt ist. Das bedeutet, dass der Abstand zwischen Feldpunkt und Quellpunkt immer klein sein muss gegenüber den Abständen der Quellpunkte von den Spulen. Die Berechnung wird in `magfield` beim Überschreiten von  $\varrho = 0.999 \cdot \varrho_{cen}$  automatisch unter Ausgabe einer Fehlermeldung gestoppt. Liegen Feld- und Quellpunkt nahe beieinander, so konvergiert die Reihe rasch. Meist gibt es zu einem gegebenen Feldpunkt  $P(z, r)$  verschiedene Möglichkeiten für die Wahl des Quellpunktes. Hier sollte natürlich derjenige Quellpunkt mit minimalem  $\varrho/\varrho_{cen}$  verwendet werden. Dies ist in Abbildung 3.5 verdeutlicht. Der eingezeichnete Feldpunkt  $P(z, r)$  hat einen Abstand  $\varrho_1$  zum ersten eingezeichneten Quellpunkt, welcher größer ist als der Konvergenzradius  $\varrho_{cen}$  an diesem Quellpunkt. Die Reihe (3.7) konvergiert hier also nicht. Die Distanz  $\varrho_2$  zum zweiten angegebenen Quellpunkt ist jedoch kleiner als der Konvergenzradius dieses Quellpunktes,



**Abbildung 3.5: Skizze zur Wahl eines geeigneten Quellpunktes für einen gegebenen Feldpunkt  $P$ .** Die Zeichnung zeigt beispielhaft vier Quellpunkte (an willkürlich verteilten  $z$ -Positionen) mit unterschiedlichen Abständen  $\rho_{cen}$  zur nächstgelegenen Spule. Der das Konvergenzgebiet definierende Kreis mit Radius  $\rho_{cen}$  um den Quellpunkt  $z_0$  ist für die erste Position eingezzeichnet, für die übrigen als Kreissegment angedeutet. Der Feldpunkt  $P(z, r)$  liegt außerhalb des Konvergenzkreises für den ersten Quellpunkt, aber innerhalb des Kreises für den etwas weiter von der Spule entfernten zweiten Quellpunkt. — Mit wachsendem Abstand vom Solenoiden nähert sich die Umrandung des Konvergenzgebietes dem Verlauf einer Geraden an. Die gestrichelt gezeichneten vertikalen Linien symbolisieren den hypothetischen Fall eines unendlich weit von der Spule entfernten Quellpunktes. Im Idealfall ist das einzige Gebiet, in dem das Magnetfeld mit dieser Methode nicht berechnet werden kann, der Bereich direkt ober- und unterhalb des Magneten selbst. Bildlich gesprochen wirft die Spule also einen „Konvergenzschatzen“, welcher durch ihre Abmaße  $z_{min}$  und  $z_{max}$  begrenzt ist.

so dass die Konvergenz der Reihe gewährleistet ist.

Hier zeigen sich zwei wesentliche Vorteile der Entwicklung mit Legendrepolynomen gegenüber der in Bfield\_3d implementierten radialem Reihenentwicklung:

- Die in Bfield\_3d verwendete radiale Entwicklung stellt einen Spezialfall der Reihe (3.7) mit  $z = z_0$  und  $u = 0$  dar. Für einen Feldpunkt  $P(z, r)$  kann die Reihenentwicklung in Bfield\_3d somit nur bezüglich eines Quellpunktes  $(z, 0)$  mit derselben  $z$ -Koordinate stattfinden. Liegt dieser Feldpunkt außerhalb des Konvergenzgebietes für diesen Quellpunkt, so gibt es keine Möglichkeit, die Konvergenz der Reihe in diesem Punkt herzustellen. Die Entwicklung mit Legendrepolynomen erlaubt hingegen die Wahl eines Quellpunktes mit beliebiger Position auf der  $z$ -Achse. Abbildung 3.5 illustriert, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit deutlich größer ist, einen Quellpunkt mit Konvergenz für diesen Punkt  $P(z, r)$  zu finden.
- Ein weiterer Vorzug der Legendrepolynom-Methode liegt darin, dass die Quellkonstanten  $B_n$  nur einmal vor Beginn der Magnetfeldberechnungen ermittelt werden müssen, und zwar in einer begrenzten Zahl von vorher definierten Quellpunkten  $z_0$ . Die radiale Reihenentwicklung erfordert hingegen eine ständige Interpolation zwischen den vorhandenen Quellpunkten, um die Bedingung  $z_{\text{source point}} = z_{\text{field point}}$  zu wahren.

### 3.3.2 Berechnung axialsymmetrischer elektrostatischer Felder

Als Gegenstück zum Magnetfeldberechnungsprogramm `coil.c` dient `electrode.c` dazu, das aus einer axialsymmetrischen Elektrodenkonfiguration resultierende elektrische Feld zu ermitteln. Das Verfahren beruht darauf, zunächst die elektrische LadungsdichteVerteilung an den Elektrodenoberflächen aus einer vorgegebenen Potentialbelegung zu gewinnen. Es handelt sich hierbei um eine Form der Randelement- oder Integralgleichungsmethode (*boundary element method, BEM; integral equation method*), welche u.a. neben der Finiten-Differenzen-Methode (FDM) und der Finiten-Elemente-Methode (FEM) ein wichtiges Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen darstellt<sup>4</sup>. Die Randelementmethode unterscheidet sich von anderen Verfahren dadurch, dass sie lediglich eine Diskretisierung von Oberflächen erfordert, was je nach Anwendungszweck eine beträchtliche Reduzierung des Rechenaufwandes bedeuten kann.

Die Verwendung der Randelementmethode bildet einen Unterschied zu Simion, dessen Algorithmen auf der Methode der finiten Differenzen basieren. Die benötigten Routinen werden in `elcd2.c` (`electric charge density`) zur Verfügung gestellt. Wie schon in Abschnitt 3.3.1 lassen sich auch hier einzelne Schritte identifizieren, in welche sich die Berechnung unterteilt.

#### 1. Definition und Diskretisierung der Elektroden

Komplexe Elektrodengeometrien wie die eines MAC-E-Filters werden durch Aneinanderfügen von linearen Segmenten in der  $z$ - $r$ -Ebene realisiert. Jedes dieser Elemente mit den Endpunkten  $(z_A, r_A)$  und  $(z_B, r_B)$  wird durch eine vom Benutzer festzulegende Anzahl von Subelementen diskretisiert. Die Zylindersymmetrie wird automatisch ausgenutzt; zusätzlich kann auch noch die Option der Spiegelsymmetrie gewählt werden. Somit ist nur die Angabe eines Viertels des auf die  $z$ - $r$ -Ebene projizierten Elektroden-systems notwendig.

Im Programm `electrode.c` wird die Routine `inputelectrode()` aufgerufen, welche aus einer ASCII-Datei die folgenden Parameter der Elektrodensegmente einliest:

- Aus der Kopfzeile der Datei wird die Anzahl  $N$  der Segmente gelesen.
- Für jedes Segment folgt eine Zeile mit fünf Einträgen:

$z_A$	[m]	$z$ -Position des Anfangspunktes,
$z_B$	[m]	$z$ -Position des Endpunktes,
$r_A$	[m]	radiale Position des Anfangspunktes,
$r_B$	[m]	radiale Position des Endpunktes,
$U$	[V]	Potential des Segments.

Bei der Eingabe ist zu beachten, dass keines der Elemente die Länge null hat und dass die Radialpositionen  $r_A$  und  $r_B$  nicht negativ sind.

Als zusätzliche Information werden noch die Diskretisierungsparameter benötigt, welche ebenfalls in der Routine `inputelectrode()` anzugeben sind. Zum einen muss für jedes Segment mit dem Index 1 die Anzahl `num[1]` der unterteilenden Subelemente festgelegt werden. Zum anderen kann mittels des Parameters `power[1]` die Anordnung und relative Länge dieser Subelemente eingestellt werden. Wird `power[1]` etwa der Wert 2

<sup>4</sup>Unter der URL <http://www.boundary-element-method.com> sind die Eigenschaften verschiedener Verfahren gegenübergestellt; dort können auch explizite Beispiele zum Einsatz der BEM in unterschiedlichen Anwendungsgebieten eingesehen werden. Für weitere Informationen siehe auch <http://www.numerical-methods.com/>.

zugewiesen, so nimmt die Länge der Subelemente quadratisch mit dem Abstand von den Enden des Segments zu. Die Diskretisierung verfeinert sich somit zu den Enden des Elements hin und berücksichtigt die in den Endregionen zunehmende Feldstärke und Ladungsdichte. `power[1] = 1` bedeutet hingegen, dass alle Subelemente gleich lang und äquidistant verteilt sind. Die Datei `elcd2.c` hält die Funktion `inputAB` bereit, welche die Aufteilung der Subelemente anhand der gegebenen Parameter automatisch durchführt.

Auch für die Berechnung des elektrischen Feldes ist die Definition von Quellpunkten entlang der  $z$ -Achse erforderlich. Die Abstände zwischen benachbarten Punkten sollten einige Male kleiner sein als die Distanz zu den Elektroden. Die äquidistante Quellpunktverteilung ist auch hier im Allgemeinen eine praktikable Lösung. Wie im Fall der magnetischen Quellpunkte wird auch hier ein Vektor `z0vec[k]` angelegt, in welchem die Positionen der *source points* auf der  $z$ -Achse definiert sind.

## 2. Berechnung der Ladungsdichte an den Elektrodenoberflächen

Durch den Aufruf der Routine `cd2()` wird die Berechnung der zweidimensionalen Ladungsdichteverteilung (`charge density distribution`) gestartet. Nimmt man an, dass die Ladungsdichte  $\sigma$  über ein Subelement konstant bleibt, so brauchen nur die Werte an je einem Punkt (z.B. in der Mitte) jedes Subelements berechnet zu werden. Bezeichnet `Nel` die Gesamtzahl der Subelemente aller linearen Elektrodensegmente zusammen, so erhält man auf diese Weise einen Satz von Ladungsdichten

$$\sigma_k, \quad k = 1, \dots, \text{Nel}.$$

Um nun die Werte der  $\sigma_k$  bestimmen zu können, nutzt man die lineare Relation mit den Subelement-Potentialen  $U_i$  aus:

$$U_i = \sum_{k=1}^{\text{Nel}} C_{ik} \sigma_k \quad (i = 1, \dots, \text{Nel}). \quad (3.8)$$

Dabei wird allen Subelementen innerhalb desselben Elektrodensegments jeweils das gleiche Potential zugewiesen. Die Wichtungsfaktoren  $C_{ik}$  (Coulomb-Integrale) werden mit den in `elcd2.c` beschriebenen Funktionen `Phielementcen` (falls  $i = k$ ) und `Phielement` (falls  $i \neq k$ ) berechnet. Diese Funktionen benutzen vollständige elliptische Integrale erster Art, welche in der Literatur auch mit dem Buchstaben  $K$  bezeichnet werden (siehe z.B. [Bro95]). Das hierzu verwendete Verfahren beruht auf der Tschebyscheff-Näherung zur numerischen Berechnung vollständiger elliptischer Integrale [Cod65].

Im nächsten Schritt wird in `cd2()` die Subroutine `gauss` aufgerufen, welche einen Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Art  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  enthält. In diesem Fall ist  $\mathbf{A}$  die  $(\text{Nel} \times \text{Nel})$ -dimensionale Matrix der Coulomb-Integrale  $C_{ik}$ ,  $\mathbf{b}$  der Vektor, welcher die Subelement-Potentiale  $U_i$  beinhaltet und  $\mathbf{x}$  der Vektor der gesuchten Ladungsdichten  $\sigma_k$ .

Als Resultat dieser Prozedur werden nun die Ladungsdichten zusammen mit den weiteren Parametern in dem Feld `element[k][j]` ( $k = 1, \dots, \text{Nel}$ ;  $j = 0, \dots, 5$ ) gespeichert:

<code>element[k][0]</code>	$=$	$\sigma[k]$	Ladungsdichte des $k$ -ten Subelements,
<code>element[k][1]</code>	$=$	$z_A[k]$	Anfangsposition entlang $z$ -Richtung,
<code>element[k][2]</code>	$=$	$z_B[k]$	Endposition entlang $z$ -Richtung,
<code>element[k][3]</code>	$=$	$r_A[k]$	Anfangsposition entlang $r$ -Richtung,
<code>element[k][4]</code>	$=$	$r_B[k]$	Endposition entlang $r$ -Richtung,
<code>element[k][5]</code>	$=$	$U[k]$	Potentialwert.

Die gesamte Information über die Aufteilung der Elektrodengeometrie in Subelemente, sowie deren jeweilige Ladungsdichte, wird von der Funktion `elementwrite()` in die Datei `element.dat` wugeschrieben.

### 3. Kalkulation der elektrischen Quellkoeffizienten

Die elektrischen Quellkonstanten  $\phi_n$  sind proportional zur  $n$ -ten Ableitung des elektrischen Potentials bezüglich  $z$ . Die Werte dieser Konstanten werden an jedem Quellpunkt  $z_0$  analytisch mit hoher Genauigkeit berechnet. Dies geschieht durch Aufrufen der Routine `elsource(z0vec)`. Hierzu werden die bereits in `element.dat` gespeicherten Informationen über die Subelemente benötigt, welche mit Hilfe der Funktion `elementread()` gelesen werden. Es erfolgt schließlich die Ausgabe der relevanten Größen in die ASCII-Datei `elsource.dat`:

- Anzahl  $N_{sp}$  der Quellpunkte und maximale Ordnung  $n_{max}$  der betrachteten Ableitungen des elektrischen Potentials,
- laufender Quellpunktindex  $k = 1, \dots, N_{sp}$ , Position  $z_0$ , Konvergenzradius  $\varrho_{cen}$  und Quellkoeffizienten  $\phi_n$  am jeweiligen Quellpunkt.

### 4. Berechnung des elektrischen Feldes

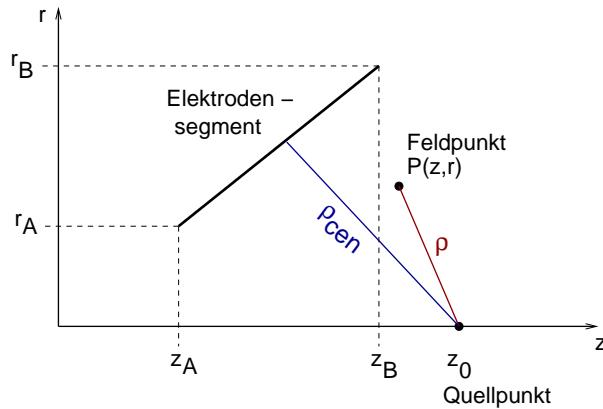
Wiederum ähnlich wie bei der Berechnung des Magnetfeldes, wird auch zur Bestimmung des elektrostatischen Potentials  $\phi$  sowie der Komponenten  $E_z$  und  $E_r$  des elektrischen Feldes an einem beliebigen Feldpunkt  $(z, r)$  in der Funktion `elfield` auf die Methode der Reihenentwicklung mittels Legendrepolynomen zurückgegriffen. Als Beispiel sei hier die Entwicklung für das elektrische Potential angegeben:

$$\phi(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \left( \frac{\varrho}{\varrho_{cen}} \right)^n P_n(u). \quad (3.9)$$

Die Bezeichnungen  $\varrho$ ,  $u$  und  $P_n(u)$  sind analog zu denen in Gleichung (3.7). Der Konvergenzradius  $\varrho_{cen}$  ist definiert als die kürzeste Distanz zwischen dem betrachteten Quellpunkt und der ihm am nächsten liegenden Elektrode (Abb. 3.6). Auch die Reihe (3.9) konvertiert nur für  $\varrho < \varrho_{cen}$ , d.h. der Abstand zwischen Feldpunkt und Quellpunkt muss kleiner sein als der zwischen dem Quellpunkt und jeglicher Elektrodenoberfläche. Wie in `magfield` wird auch in `elfield` eine Fehlermeldung ausgegeben und die Berechnung abgebrochen, sobald  $\varrho > 0.999 \cdot \varrho_{cen}$  erreicht wird. Für große Werte von  $\varrho/\varrho_{cen}$  nahe bei eins ist die Konvergenz langsam. Dieser Fall wird jedoch in der Praxis selten auftreten, da man gewöhnlich Feldpunkte innerhalb des Flussschlauchs betrachtet, welche hinreichend weit von den Elektroden entfernt liegen.

#### Anmerkung zur numerischen Zuverlässigkeit der Feldberechnungsroutinen

Bei der Betrachtung der erreichbaren Genauigkeit muss zwischen den Fällen des Magnetfeldes und des elektrischen Potentials unterschieden werden. Bei der Magnetfeldberechnung ist die Situation insofern einfacher, als hier die Quelle des Feldes (die Stromverteilung in der Spule) bereits bekannt ist und nicht erst ermittelt werden muss, wie dies beim elektrischen Potential der Fall ist. Der Simulationsprozess beinhaltet hauptsächlich zweierlei Fehler: einerseits die unvermeidbare Abweichung des „idealen“ und zum Teil vereinfachten mathematischen Modells vom realen Experimentaufbau und andererseits die Ungenauigkeit, welche durch die notwendige Diskretisierung des Problems eingeführt wird. Die erste Fehlerart trifft



**Abbildung 3.6: Skizze zur Erläuterung von  $\rho_{cen}$  und  $\rho$  bei der Berechnung des elektrischen Feldes.** Zur Vereinfachung sind lediglich ein Elektrodensegment und ein Quellpunkt dargestellt. Der Abstand  $\rho$  zwischen Feldpunkt und Quellpunkt muss zur Erfüllung des Konvergenzkriteriums kleiner sein als der minimale Abstand zwischen dem gewählten Quellpunkt und der nächstgelegenen Elektrode,  $\rho_{cen}$ . Dieser Konvergenzradius  $\rho_{cen}$  wird mit Hilfe eines Algorithmus für jeden Quellpunkt  $z_0$  und bezüglich jedes Elektrodensegments einzeln ermittelt. Tritt bezüglich eines bestimmten Quellpunktes keine Konvergenz ein, so können andere Quellpunkte für die Feldberechnung herangezogen werden. Die in `field.c` enthaltene Routine `elfield` beinhaltet eine automatische Suche des am besten geeigneten Quellpunktes für den jeweiligen Feldpunkt.

für beide Felder zu, während sich der Diskretisierungsfehler insbesondere bei der Ermittlung der Ladungsdichte zur Kalkulation des elektrischen Potentials bemerkbar macht. Hier kann der Benutzer lediglich durch eine geschickte Wahl der Diskretisierungsparameter versuchen, diesen Fehlerbeitrag zu minimieren.

Was die Kalkulation der Felder in beliebigen Punkten innerhalb des Konvergenzbereiches angeht, so sind die verwendeten Routinen auf der Basis der Legendrepolyynom-Entwicklung sehr zuverlässig. Die Konvergenz der Reihen tritt vergleichsweise schnell ein, insbesondere für Feldpunkte in der Nähe der  $z$ -Achse. Eine Überprüfung der entsprechenden Subroutinen ist mittels einer komplementären Berechnungsmethode möglich, welche vollständige elliptische Integrale verwendet. Die Berechnung mit diesem Verfahren wird durch kein Konvergenzkriterium eingeschränkt, ist jedoch wesentlich langsamer als bei Verwendung der Legendrepolyynom-Methode.

Vergleiche der Feld- und Potentialberechnungen zwischen beiden Methoden [Glü04b] ergaben eine relative Übereinstimmung im Bereich  $\lesssim 10^{-13}$ , wobei in den Regionen nahe der Elektroden bzw. Spulen stets eine größere Anzahl von Summanden in der Legendrepolyynom-Reihe erforderlich ist, um eine hohe Präzision zu erreichen. Auch hier ist wieder eine Warnung angebracht: ausgehend von einer vorgegebenen Strom- oder Ladungsdichteverteilung kann eine hohe Präzision bei der Berechnung der Felder erreicht werden; über die Genauigkeit der vorangegangenen Kalkulation der Ladungsdichteverteilung wird durch diesen Test jedoch keine Aussage gemacht.

### 3.3.3 Bahnverfolgungsrechnungen

Das Bahnverfolgungsprogramm `tracking.c` dient zur Berechnung der Trajektorien geladener Teilchen in elektro- und magnetostatischen Feldern. Es benötigt die in `rungekutta.c` und `field.c` enthaltenen Routinen. Die Bahnberechnung basiert auf relativistisch formulierten Bewegungsgleichungen, so dass auch Elektronen aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall relativistisch korrekt behandelt werden können<sup>5</sup>. Beim Aufruf des Programms werden durch den Benutzer einige Startwerte definiert: die kinetische Energie des geladenen Teilchens, die Startkoordinaten  $z_{\text{start}}$  und  $r_{\text{start}}$ , die Elevations- und Azimutwinkel  $\theta_{\text{start}}$  und  $\varphi_{\text{start}}$  relativ zur Richtung des Magnetfeldes, sowie der Endpunkt  $z_{\text{end}}$ , bis zu dem die Trajektorie berechnet werden soll. Ladung und Masse des zu verfolgenden Teilchens sind bereits als Konstanten im Quelltext von `tracking.c` integriert; als Vorgabe werden die entsprechenden Werte für das Elektron angenommen.

Insbesondere bei der Einteilung der Rechenschritte zeigen sich die Vorteile einer speziell angepassten Routine gegenüber der Zeitschrittdiskretisierung von weniger anwendungsspezifischen Programmen wie Simion. Hierbei lässt sich ausnutzen, dass man schon einige Kenntnisse über die besondere Form der Bahn des geladenen Teilchens durch den MAC-E-Filter hat: Es wird sich auf einer Zyklotronbahn längs der Magnetfeldlinien bewegen. Die Trajektorie wird somit zunächst in eine Anzahl von  $n_{\text{period}}$  Zyklotronumläufen unterteilt. In jedem dieser Umläufe führt das Programm eine Zahl von  $n_{\text{timestep}}$  Zeitschritten aus und berücksichtigt so automatisch die starke Variation der Zyklotronumlaufdauer aufgrund der enormen Magnetfeldänderung entlang der Teilchenbahn<sup>6</sup>. Die Gesamtzahl der Rechenschritte ist also gegeben durch  $N = n_{\text{period}} \cdot n_{\text{timestep}}$ . Da sowohl  $n_{\text{period}}$  als auch  $n_{\text{timestep}}$  vom Benutzer festgelegt werden können, lässt sich das Bahnverfolgungsprogramm den Anforderungen der jeweiligen Aufgabe anpassen und erreicht so eine sehr hohe Genauigkeit. Als dritter benutzerdefinierter Parameter gibt  $n_{\text{print}}$  an, nach wie vielen Rechenschritten eine Ausgabe der Bahnverfolgungsgrößen erfolgen soll. Die dazwischenliegenden Rechenschritte werden somit nicht aufgezeichnet.

Nach dem Programmaufruf

```
./tracking Estart [eV] zstart [m] rstart [m] theta [deg] phi [deg] zend [m]
```

werden zuerst alle Startparameter initialisiert. Basierend auf diesen Angaben werden durch Aufruf der Funktion `velocity` die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des Teilchens am Startpunkt berechnet. Wenn dies geschehen ist, kann das Gleichungssystem der Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, welches mit Hilfe eines Runge-Kutta-Algorithmus gelöst wird. Es handelt sich um ein System von insgesamt sechs Differentialgleichungen erster Ordnung<sup>7</sup>, welche die Bewegung eines relativistischen geladenen Teilchens unter Einfluss der Lorentzkraft  $\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  beschreiben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad (3.10)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_L, \quad (3.11)$$

wobei zwischen dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  und dem Impulsvektor  $\mathbf{p}$  die relativistische Beziehung  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$  gilt ( $m$  bezeichnet die Ruhemasse des Teilchens).

<sup>5</sup>Eine nichtrelativistische Behandlung würde wegen  $\gamma \leq 1.04$  zu einem u.U. nicht vernachlässigbaren Fehler führen.

<sup>6</sup>Das Fehlen einer solchen Anpassungsmöglichkeit ist vermutlich eine der Hauptursachen für die numerischen Probleme bei der Bahnverfolgung von Elektronen im KATRIN Hauptspektrometer mit Simion.

<sup>7</sup>Der verwendete Algorithmus kann nur Differentialgleichungssysteme erster Ordnung lösen. Deshalb wird das Gleichungssystem  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_L$  aus drei Gleichungen zweiter Ordnung in ein äquivalentes System aus sechs Gleichungen erster Ordnung überführt.

Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems kann zwischen dem Runge-Kutta-Verfahren vierter oder achter Ordnung gewählt werden, entsprechend dem geforderten Genauigkeitsgrad. Für die Berechnungen der vorliegenden Arbeit wurde stets das Verfahren achter Ordnung verwendet. Eine Erläuterung der Runge-Kutta-Methode zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme findet sich in Anhang B. Bezüglich einer Diskussion der numerischen Genauigkeit der beiden Runge-Kutta-Algorithmen sei auf Abschnitt 5.4.2 verwiesen.

Als nächstes wird die Funktion `constant` aufgerufen, welche aus den Startparametern drei Größen berechnet, die später u.a. zur Kontrolle der numerischen Genauigkeit benötigt werden:

- die Gesamtenergie  $E_{\text{total}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ ,
- den verallgemeinerten kanonischen axialen Drehimpuls  $L = \gamma m (x_1 v_2 - x_2 v_1) + q r A$  (mit  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ), sowie
- die adiabatische Erhaltungsgröße  $\gamma\mu$ .

Nun werden in einer Schleife alle N Rechenschritte durchlaufen. In jedem Schritt werden folgende Berechnungen vorgenommen:

1. Kalkulation der Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes in kartesischen Koordinaten durch Aufruf der Funktion `field` (aus `field.c`);
2. Berechnung einiger abgeleiteter Größen wie Betragsquadrat von Magnetfeld- und Geschwindigkeitsvektor und Zyklotronfrequenz  $\omega = (|q|B)/(\gamma m)$ ;
3. Ermittlung der Umlaufperiode  $T = 2\pi/\omega$  und der Größe des nächsten Zeitschrittes

$$h = \frac{T}{n_{\text{timestep}}};$$

4. Bestimmung des relativistischen Faktors  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$ ;
5. Lösung des Differentialgleichungssystems durch Aufruf der Routine `rungekutta4` bzw. `rungekutta8`.

In jedem Schritt erfolgt eine Kontrolle, ob das Ende der Berechnung erreicht ist. Sobald die momentane Koordinate in  $z$ -Richtung den vorgegebenen Wert  $z_{\text{end}}$  überschreitet, wird die Schleife nicht weiter durchlaufen.

Die Ausgabe der Ergebniswerte findet, wie bereits erwähnt, nicht in jedem Berechnungsschritt statt, sondern in benutzerdefinierten Intervallen. Eine Liste der Ausgabeparameter ist in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Während die Fehlerangaben `err1` und `err2` hauptsächlich der Überwachung der numerischen Genauigkeit dienen und daher bei beliebigen Einsatzgebieten des Bahnverfolgungsprogramms gleichermaßen von Interesse sind, kommt dem Wert von  $\Gamma$  speziell bei der Untersuchung des elektromagnetischen Designs des KATRIN Experiments eine besondere Bedeutung zu. Im Gegensatz zu Gesamtenergie und Drehimpuls, welche entlang der Bahn des betrachteten Teilchens absolut konstant bleiben sollten, kann eine Abweichung bei der Größe  $\gamma\mu$  neben den numerischen Fehlern auch physikalische Ursachen haben. Deshalb ermöglicht die Kontrolle dieses Parameters Aussagen über eine zentrale Eigenschaft des Spektrometers, nämlich den Grad der Einhaltung des adiabatischen Energietransfers  $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$  gemäß Gleichung (2.14).

Tabelle 3.1: Erläuterung der Ausgabewerte des Bahnverfolgungsprogramms.

$z$		momentane Position in $z$ -Richtung
$r$		momentane Position in radialer Richtung
$ \mathbf{B} $	$= \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}$	Betrag der Magnetfeldstärke am Ort $(z, r)$
$\phi$		Wert des elektrostatischen Potentials am Ort $(z, r)$
err1	$= \frac{E_{\text{total}} - E_{\text{total,0}}}{E_{\text{total}}}$	relativer Fehler der Gesamtenergie
err2	$= \frac{L - L_0}{L}$	relativer Fehler des axialen Drehimpulses
$\Gamma$	$= \frac{(\gamma\mu) - (\gamma\mu)_0}{(\gamma\mu)}$	rel. Abweichung der adiabatischen Erhaltungsgröße $\gamma\mu$
$\cos(\mathbf{p}, \mathbf{B})$		Kosinus des Winkels zwischen Impuls- und Magnetfeldvektor
$E_{\parallel}$		longitudinaler Anteil der kinetischen Energie
$E_{\perp}$		transversaler Anteil der kinetischen Energie

Da bei Verletzung der Adiabasie die Transmissionsfunktion verbreitert wird, stellt die Analyse des sogenannten „Adiabasieparameters“  $\gamma\mu$  einen wichtigen Bestandteil der Designstudien zum KATRIN Hauptspektrometer dar und wird in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit noch im Detail beschrieben werden (siehe auch Abschnitt 4.2).

### Berechnung elektrischer und magnetischer Felder in kartesischen Koordinaten

Bei der Beschreibung des Bahnverfolgungsprozesses wurde bereits die Funktion `field` erwähnt, welche es ermöglicht, in jedem Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  der Trajektorie die elektrischen und magnetischen Felder  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$  und  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$  komponentenweise in kartesischen Koordinaten zu berechnen. Gleichzeitig bestimmt `field` auch das elektrostatische Potential  $\phi(\mathbf{x})$  und das magnetische Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ . Hierzu stehen die Subroutinen `elfield` und `magfield` zur Verfügung, welche die zuvor schon berechneten elektrischen bzw. magnetischen Quellkonstanten (siehe Abschn. 3.3.1, 3.3.2) aus den Dateien `elsource.dat` und `magsource.dat` einlesen.

## Kapitel 4

# Anforderungen an das elektromagnetische Design des Hauptspektrometers

Nachdem in Abschnitt 2.4 schon die Notwendigkeit der großen Spektrometerdimensionen aus den Anforderungen an die Energieauflösung und die Einhaltung der adiabatischen Energietransformation abgeleitet wurde, sollen in diesem Kapitel die wichtigsten Kriterien zur Erstellung des elektromagnetischen Designs für das KATRIN Hauptspektrometer vorgestellt werden:

- Zum Entwurf einer Feldkonfiguration für das Spektrometer werden im Wesentlichen drei Merkmale herangezogen: die Transmissions- und Adiabasieeigenschaften sowie die Homogenität der elektrischen und magnetischen Felder.
- Im Hinblick auf eine Minimierung der Untergrundzählrate sind ebenfalls einige Kriterien zu beachten. So sollen z.B. Teilchenfallen, d.h. Bereiche des Spektrometervolumens, in denen geladene Teilchen gespeichert werden können, möglichst vermieden werden. Außerdem können durch den Mechanismus der Feldemission aus den Elektrodenoberflächen Elektronen austreten. Durch einen genügend großen Abstand des auf den Detektor abgebildeten Flussschlauches von den Elektroden kann der hierdurch entstehende Untergrundbeitrag verringert werden.

### 4.1 Transmissionseigenschaften

Die Funktion des Spektrometers als hochpräziser Elektronen-Energiefilter ist nur dann gewährleistet, wenn sein elektromagnetisches Design bestimmte Anforderungen erfüllt. In Abschnitt 2.2.2 wurden diese Bedingungen bereits im Zusammenhang mit der (nichtrelativistisch formulierten) Transmissionsbedingung (Gl. (2.18)) kurz angesprochen.

In relativistisch korrekter Form setzt sich die longitudinale kinetische Energie  $E_{\parallel}$  an einem beliebigen Bahnpunkt wie folgt zusammen:

$$E_{\parallel} = E_S - E_S \cdot \sin^2 \theta_S \cdot \frac{B \cdot (\gamma_S + 1)}{B_S \cdot (\gamma + 1)} - q (U - U_S). \quad (4.1)$$

Darin stellen die mit  $S$  indizierten Größen jeweils die Werte am Startort dar. Die sogenannte *Transmissionsenergie*  $E_{\text{transm}}$  lässt sich über die Bedingung

$$(E_{\parallel})_A = 0 \quad \text{falls} \quad E_S = E_{\text{transm}} \quad (4.2)$$

definieren.  $E_{\text{transm}}$  bezeichnet also denjenigen Betrag an kinetischer Energie, welcher dem Elektron beim Start mitgegeben werden muss, damit es gerade mit der Longitudinalenergie  $E_{\parallel} = 0$  eV in der Analysierebene ankommt. Aus der Kombination von Gl. (4.1) und (4.2) folgt:

$$E_{\text{transm}} = q (U_A - U_S) \cdot \left( 1 - \sin^2 \theta_S \frac{B_A \cdot (\gamma_S + 1)}{B_S \cdot (\gamma_A + 1)} \right)^{-1}. \quad (4.3)$$

(Der Index  $A$  steht für die Analysierebene.) Bei erfüllter Transmissionsbedingung sollten also Elektronen mit  $E_S > E_{\text{transm}}$  stets die Analysierebene passieren können, während solche mit  $E_S < E_{\text{transm}}$  vorher reflektiert werden.

Diese Feststellung lässt sich zur Überprüfung der Transmissionseigenschaften des Spektrometers verwenden. Das elektromagnetische Design erfüllt die Bedingung der adiabatischen Transmission, falls für jedes mit  $E_S = E_{\text{transm}}$  gestartete Elektron entlang seiner gesamten Bahn bis zur Analysierebene die Longitudinalenergie stets positiv bleibt oder höchstens bis auf den Wert null in der Analysierebene abfällt:  $E_{\parallel} \geq 0$ . Im Falle von  $E_{\parallel} < 0$  wird das Elektron an der Stelle reflektiert, an der seine Longitudinalenergie negativ wird. Tritt dieser Fall ein, so ist das elektromagnetische Design fehlerhaft und muss entsprechend korrigiert werden.

Bei der Durchführung von Bahnverfolgungssimulationen werden die Elektronen mit einer (meist kleinen) Überschussenergie gegenüber der Filterschwelle gestartet. Das wichtigste Kriterium zur Überprüfung der elektrischen und magnetischen Feldkonfiguration hinsichtlich der Transmissionseigenschaften besteht dann darin, dass das *Minimum der Longitudinalenergie* stets genau in der Analysierebene erreicht werden muss, und nicht etwa schon vorher. Tritt das Minimum  $E_{\parallel}^{\min}$  schon vor der Analysierebene auf, ergibt sich eine zu frühe Retardierung des Elektrons. Die daraus resultierenden negativen Auswirkungen auf den Verlauf der Transmissionsfunktion werden in Abschnitt 5.2 besprochen.

## 4.2 Adiabasieeigenschaften

Um zu überprüfen, ob die Umwandlung  $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$  gemäß der adiabatischen Approximation vonstatten geht, muss getestet werden, ob die sogenannte *adiabatische Invariante*

$$\gamma \mu = \frac{p_{\perp}^2}{2 m B} \quad (4.4)$$

entlang der Flugbahn des Elektrons tatsächlich erhalten ist. Bleibt  $\gamma \mu$  nicht konstant, bedeutet dies eine unkontrollierte Verbreiterung der Transmissionsfunktion. Anschaulich gesprochen erhält das Elektron in diesem Fall auf dem Weg zur Analysierebene nicht den vollen Longitudinalenergiezuwachs aus der adiabatischen Energiekonversion  $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$ , welcher ihm eigentlich zusteht. Im Bereich kurz nach dem Eintritt des Elektrons in das Hauptspektrometer sind Abweichungen  $\Delta E$  von der adiabatischen Näherung weniger relevant, da sie auf dem Weg zur Analysierebene bei  $x_{\text{analys}}$ , d.h. vom Bereich hoher Magnetfeldstärke zu kleinerer Feldstärke hin, stark herunterskaliert werden:  $\Delta E(x) \rightarrow \Delta E(x) \cdot B(x_{\text{analys}})/B(x)$ . Nahe der Spektrometermitte ist jedoch der Gradient der Magnetfeldstärke geringer, so dass sich eine signifikante Verletzung der adiabatischen Bewegung dort viel stärker auf die Energie auswirkt,

welche dem Elektron zum Überqueren der Analysierebene zur Verfügung steht. Hier kann der geringe aus der Energietransformation stammende Beitrag zur Longitudinalenergie darüber entscheiden, ob das Elektron die Analysierebene passiert oder reflektiert wird, so dass sich eine fehlerhafte Transformation unmittelbar auf die Zählrate am Detektor auswirkt.

In der nichtrelativistischen Näherung lässt sich ein Parameter

$$\Delta E_{\perp}(x) = E_{\perp}(x) - E_{\perp}(x_{\text{start}}) \cdot \frac{B(x)}{B(x_{\text{start}})} \quad (4.5)$$

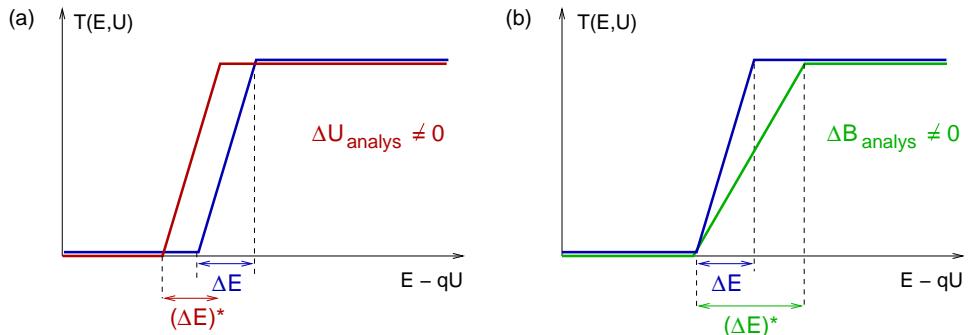
definieren, welcher im Idealfall überall den Wert null haben sollte. Nimmt man an, dass durch eine Abweichung vom adiabatischen Verhalten eine gaußförmige Verschmierung des Spektrums verursacht wird, und dass für diese Verschmierung  $\sigma \approx \Delta E_{\perp}$  gilt, so kann man mit Hilfe der Relation  $\Delta m_{\nu}^2 = -2\sigma_{\text{syst}}^2$  eine Abschätzung des aus  $\Delta E_{\perp}$  resultierenden systematischen Fehlers ableiten. Für  $\Delta E_{\perp} = 10 \text{ meV}$  ergibt sich nach dieser Rechnung etwa eine Änderung des gefundenen Neutrinomassenquadrates von  $|\Delta m_{\nu}^2| = 0.0002 \text{ eV}^2$ . Eine Adiabatischeabweichung dieser Größenordnung nahe der Analysierebene ist im Hinblick auf den Beitrag zum gesamten systematischen Fehler des KATRIN Experiments tolerabel.

### 4.3 Homogenität der Felder

Als drittes Designkriterium ist der Homogenitätsgrad des elektrischen Potentials bzw. des Magnetfeldes zu nennen. Untersucht wird hierbei hauptsächlich das Maß der Variation der Felder in radialer Richtung entlang der Analysierebene. Man definiert für Retardierungspotential und Magnetfeldstärke die Inhomogenitätsparameter

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{analys}} &= |U_{\text{analys}}(r = 0) - U_{\text{analys}}(r = r_{\text{max}})|, \\ \Delta B_{\text{analys}} &= |B_{\text{analys}}(r = 0) - B_{\text{analys}}(r = r_{\text{max}})|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Für  $\Delta U_{\text{analys}} \neq 0$  oder  $\Delta B_{\text{analys}} \neq 0$  ergeben sich somit innerhalb der Analysierebene in Abhängigkeit der radialen Position  $r$  verschiedene Werte von  $U_{\text{analys}} = U_{\text{analys}}(r)$  und  $B_{\text{analys}} = B_{\text{analys}}(r)$ . Dies führt dazu, dass die verschiedenen Bereiche des auf den Detektor abgebildeten Flussschlauches unterschiedliche Transmissionsfunktionen aufweisen. Die Auswirkungen der Potential- bzw. Magnetfeldinhomogenität auf die Transmissionsfunktion sind in Abb. 4.1 veranschaulicht.



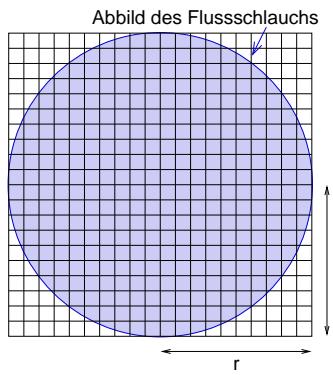
**Abbildung 4.1: Auswirkungen von Feldinhomogenitäten auf die Transmissionsfunktion.** Die nominelle Transmissionsfunktion ist blau dargestellt. (a) Der Potentialdurchgriff  $\Delta U_{\text{analys}}$  bewirkt für die inneren Radien eine Verschiebung der Transmissionsfunktion zu kleineren Energien bei gleichbleibender Anstiegsbreite  $\Delta E = (\Delta E)^*$  (rote Kurve). (b) Die Magnetfeldinhomogenität  $\Delta B_{\text{analys}}$  führt zu einer Radialabhängigkeit der Anstiegsbreite:  $\Delta E \neq (\Delta E)^*$  (grüne Kurve).

Es handelt sich um zwei verschiedene Effekte:

- Durch eine radialabhängige Filterspannung  $U_{\text{analys}}(r)$  werden die auf den Innenbahnen laufenden Elektronen schwächer retardiert, da dort das Potential gegenüber den Außenbereichen nahe der Tankwand geringfügig positiver ist. Für achsennahe Elektronen ergibt sich daher eine zu kleineren Überschussenergien hin verschobene Transmissionsfunktion, deren Breite jedoch weiterhin der der nominellen Transmissionsfunktion entspricht (Abb. 4.1 (a)).
- Das radialabhängige Magnetfeld  $B_{\text{analys}}(r)$  hingegen verursacht aufgrund der Relation

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{B_{\text{analys}}}{B_{\text{max}}}$$

eine mit dem Bahnradius  $r$  variierende Anstiegsbreite  $\Delta E(r)$  der Transmissionsfunktion (Abb. 4.1 (b)).



**Abbildung 4.2:**  
Schemazeichnung eines ortsauflösenden Detektors mit  $20 \times 20$  Pixeln.

Bei einer Kombination aus Potential- und Magnetfeldinhomogenitäten wird die Transmissionsfunktion sowohl verschoben als auch verformt. Durch einen ortsauflösenden Detektor können solche Inhomogenitäten berücksichtigt werden, jedoch nur bis zu einem gewissen Grad.

Als Beispiel soll hier ein Detektor mit  $20 \times 20 = 400$  Pixeln betrachtet werden (Abb. 4.2). Der Radius des Flussschlauchabbilds auf dem Detektor erstreckt sich in diesem Fall über maximal zehn Pixel.

In Abbildung 4.3 ist der typische radiale Verlauf des Potentialdurchgriffs  $\Delta U(r) = U_{\text{analys}}(r) - U_{\text{vessel}}$  sowie der Magnetfeldstärke  $B(r)$  in der Analysierebene gezeigt. Die Steigung der Kurven ist jeweils in dem linearen Teil bei großen Radien am größten; daher ist es sinnvoll, diesen Wert zur Festlegung der Homogenitätskriterien heranzuziehen.

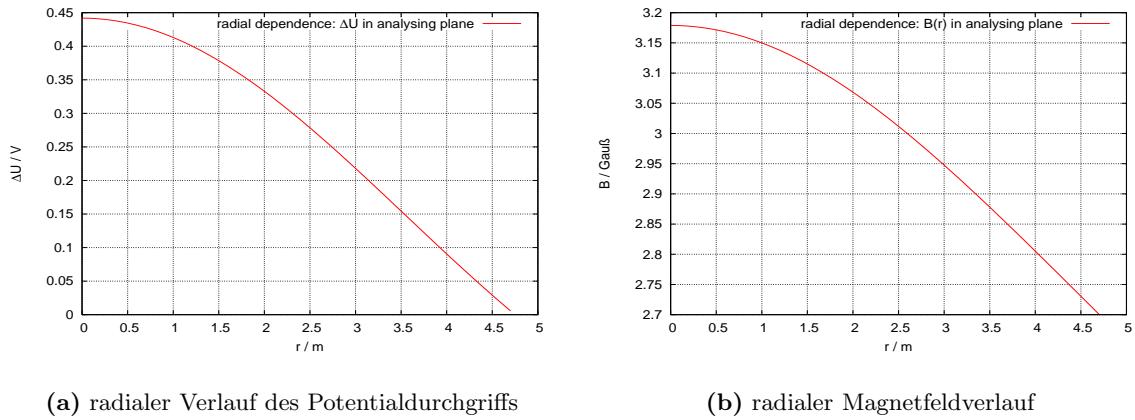
Im Fall der Potentialinhomogenität ergibt sich aus Abb. 4.3 (a) ein Gradient von

$$\frac{\Delta U}{\text{pixel}} = \underbrace{\left[ -0.125 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]}_{\text{Steigung linearer Abfall}} \cdot \frac{4.75 \text{ m}}{10 \text{ pixel}} \approx \frac{0.06 \text{ V}}{\text{pixel}}, \quad (4.7)$$

d.h. die tatsächliche Transmissionsfunktion kann innerhalb eines Pixels gegenüber der nominellen Position um ca.  $\pm 0.03$  eV verschoben sein. In dieser Rechnung gibt der erste Faktor die Steigung der Kurve im Bereich großer Radien an, der zweite Faktor berücksichtigt die Aufteilung des maximalen Flussschlauchradius von 4.75 m auf 10 Pixel des Detektors. Analog erhält man aus Abb. 4.3 (b) für das Magnetfeld:

$$\frac{\Delta B}{\text{pixel}} = \underbrace{\left[ -0.14 \frac{\text{Gauß}}{\text{m}} \right]}_{\text{Steigung linearer Abfall}} \cdot \frac{4.75 \text{ m}}{10 \text{ pixel}} \approx \frac{0.07 \text{ Gauß}}{\text{pixel}}, \quad (4.8)$$

d.h. pro Pixel beträgt die Magnetfeldinhomogenität bei einer nominellen Feldstärke von ca. 3 Gauß etwa  $\pm \Delta B/B = \pm 1.2\%$  (totale Abweichung pro Pixel:  $\Delta B_{\text{tot}}/B = 2.4\%$ ). In jedem



**Abbildung 4.3: Typischer radialer Verlauf der Feldinhomogenität in der Analysierebene.** In Bild (a) ist die Differenz  $\Delta U(r) = U_{\text{analys}}(r) - U_{\text{vessel}}$  gegen  $r$  aufgetragen, während (b) die Radialabhängigkeit von  $B_{\text{analys}}$  wiedergibt.

Pixel wird somit die Energieauflösung modifiziert zu

$$\frac{B_{\text{analys}} \pm \Delta B}{B_{\text{max}}} = \frac{(\Delta E)^*}{E}. \quad (4.9)$$

Verglichen mit der nominellen Energieauflösung  $\Delta E = 0.93$  eV ergibt sich eine Änderung  $\delta(\Delta E) = 0.012 \cdot 0.93$  eV = 0.011 eV.

Auch wenn es sich hier streng genommen nicht um eine gaußförmige, sondern eher um eine rechteckförmige Abweichung handelt, soll wieder die Beziehung  $\Delta m_\nu^2 = -2\sigma^2$  als Ausgangspunkt für eine grobe Abschätzung der Größenordnung des systematischen Fehlers verwendet werden. Für  $\sigma$  wird dabei die halbe Breite der Rechtecks eingesetzt. Im Falle einer Potentialinhomogenität von  $\Delta U = \pm 0.03$  V pro Pixel ergibt sich somit eine Verschiebung des gefundenen Wertes des Neutrinomassenquadrates von  $|\Delta m_\nu^2| \approx |-2 \cdot (0.03)^2| \text{ eV}^2 = 0.0018 \text{ eV}^2$ . Überträgt man dieses Verfahren auf die Variation der Magnetfeldstärke, welche sich bei der Abb. 4.3 (b) zu Grunde liegenden Konfiguration durch eine Veränderung der Energieauflösung um  $\pm 0.011$  eV pro Pixel bemerkbar macht, so ergibt sich ein zusätzlicher Beitrag zum systematischen Fehler von  $|\Delta m_\nu^2| \approx |-2 \cdot (0.011)^2| \text{ eV}^2 = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^2$ .

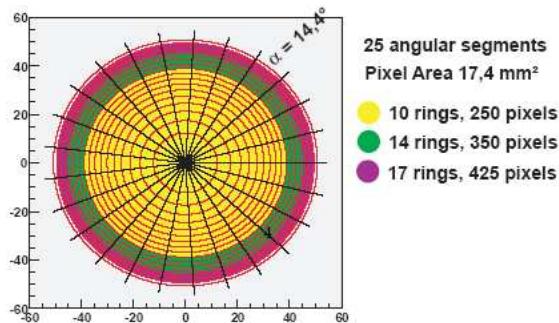
Um die aus der Feldinhomogenität resultierenden systematischen Effekte möglichst genau zu untersuchen, wären vergleichsweise lange Kalibrationsmessungen notwendig, was angesichts der hohen Betriebskosten des KATRIN Experiments vermieden werden sollte. Die spätere Datenanalyse wäre im Fall lediglich geringer Abweichungen der Transmissionsfunktion von Pixel zu Pixel nicht nur wesentlich einfacher, sondern auch zuverlässiger und schneller. Außerdem ist die Analyse bei kleinen Feldinhomogenitäten unempfindlicher gegenüber geringen Ausrichtungsfehlern oder Abweichungen der Detektorposition im Laufe einer Messphase zwischen je zwei Kalibrationsphasen. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, folgende Homogenitätsforderungen an das elektromagnetische Design aufzustellen:

$$\Delta U_{\text{analys}} \leq 0.5 \text{ V}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\Delta B_{\text{analys}}}{B_{\text{analys}}} \leq 20 \%. \quad (4.11)$$

### Bemerkungen zu den Anforderungen an das Detektordesign

Bei der vorangegangenen Diskussion der Homogenitätskriterien für das elektromagnetische Design des Hauptspektrometers werden bestimmte Eigenschaften des Detektors vorausgesetzt. Eine wichtige Anforderung ist, dass der Detektor eine Ortsauflösung von *mindestens* zehn Pixeln in *jeder beliebigen* Richtung bietet. Außerdem soll die sensitive Fläche aller Pixel gleich groß sein. Abbildung 4.2 zeigt ein Design aus einer quadratischen Anordnung ebenfalls quadratischer Elemente, wie sie zur Zeit (mit kleinerer Pixelzahl) für den Vorspektrometer-Detektor getestet wird (vlg. Abb. 2.8). Diese Variante weist jedoch das geometriebedingte Defizit auf, dass nicht alle Richtungen des Flussschlauchbildes durch die gleiche Anzahl von Segmenten abgedeckt werden. Das Problem lässt sich durch einen kreisscheibenförmigen Detektor mit Radial- und Winkelsegmentierung umgehen (Abb. 4.4). Der hier gezeigte



**Abbildung 4.4: Designvorschlag für einen Pixeldetektor mit Radial- und Winkelsegmentierung [Ste04].** Eine solche Geometrie ermöglicht eine konstante Anzahl von Segmenten gleicher Fläche in allen Richtungen und berücksichtigt gleichzeitig den höheren Feldgradienten in den Randbereichen des Flussschlauches.

Entwurf besteht aus einer Anzahl von (mindestens zehn) konzentrischen Kreisringen gleicher Fläche, welche zusätzlich in eine bestimmte Zahl von Winkelsegmenten (hier: 25) unterteilt sind. Aufgrund der Tatsache, dass der Radius der Kreisringe nach außen hin in immer kleineren Schritten zunimmt, bietet diese Geometrie einen zusätzlichen Vorteil. Die aus Abb. 4.3 ersichtliche Zunahme des elektrischen und magnetischen Feldgradienten in den Außenregionen des Flussschlauches wird auf natürliche Weise durch eine höhere Anzahl radialer Unterteilungen in diesem Bereich berücksichtigt.

Eine Entscheidung über die Detektorgeometrie wurde bisher noch nicht getroffen. Bei den fortdauernden Designstudien werden unter anderem die hier aufgeführten Aspekte miteinbezogen [Ste04].

## 4.4 Vermeidung von Teilchenfallen

Unter bestimmten Umständen können geladene Teilchen unter dem Einfluss der elektrischen und magnetischen Felder im Spektrometer gespeichert werden. Durch die Speicherung kann es zu einer Erhöhung der Untergrundrate aufgrund von Prozessen wie z.B. Restgasionisation kommen, etwa in dem Fall eines Stoßes eines gespeicherten Elektrons mit einem Wasserstoffmolekül:



Bei geeigneten Bedingungen können die so erzeugten Sekundärelektronen auf den Detektor gelangen und dort ein Untergrundsignal verursachen. Falls sie in einem Gebiet entstehen, in dem ein Potential vergleichbar dem Retardierungspotential  $U_A$  herrscht, ist das Signal am Detektor wegen der begrenzten Energieauflösung nicht von einem „wahren“  $\beta$ -Ereignis zu unterscheiden. Um Reaktionen nach der Art von (4.12) zu unterbinden, muss zum einen der Restgasanteil im Spektrometervolumen durch Ultrahochvakuumbedingungen gering gehalten

und zum anderen der Einfang geladener Teilchen in Fallen möglichst von vornherein vermieden werden. Treten dennoch Teilchenfallen auf, so sollte die Dauer der Speicherung klein bleiben, um die Möglichkeit der Untergrunderzeugung zu reduzieren.

Im Wesentlichen werden drei Speicherungsmechanismen unterschieden, welche hier am Beispiel von Elektronen kurz erläutert werden sollen<sup>1</sup>.

- 1) **Rein magnetische Speicherung:** Diese Fallenart basiert auf dem Prinzip der *magnetischen Flasche*. Zur Erläuterung dieses Effekts betrachte man ein Elektron am Ort  $x_i$  mit einer anfänglichen Longitudinalenergie  $E_{\parallel}(x_i)$ . An diesem Ort liegen ein Potential  $U(x_i)$  und ein Magnetfeld der Stärke  $B(x_i)$  vor. Bewegt sich dieses Elektron nun von der Analysierebene weg in Richtung eines der Spektrometermagneten, so durchläuft es entlang einer Magnetfeldlinie einen positiven Gradienten von  $B$ , d.h. die Magnetfeldstärke wird höher. Die magnetische Gradientenkraft bewirkt dann – in Umkehrung des in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Effekts – eine Abnahme von  $E_{\parallel}$  zugunsten von  $E_{\perp}$ . Das Elektron wird also in Vorwärtsrichtung magnetisch abgebremst. Da gleichzeitig eine Potentialdifferenz zwischen dem Startort  $x_i$  und dem momentanen Ort  $x$  besteht, setzt sich die longitudinale Energie an einem beliebigen Bahnpunkt folgendermaßen zusammen:

$$E_{\parallel}(x) = E_{\parallel}(x_i) + E_{\perp}(x_i) \cdot \left(1 - \frac{B(x)}{B(x_i)}\right) + q [U(x_i) - U(x)]. \quad (4.13)$$

Eine magnetische Speicherung des Elektrons findet also unter der Bedingung statt, dass die anfängliche Energie  $E_{\parallel}(x_i)$  und der Energiegewinn aus der Potentialdifferenz nicht ausreichen, um den Verlust an Longitudinalenergie aufgrund des magnetischen Spiegeleffektes auszugleichen. Bei der rein magnetischen Speicherung treten zwei dieser magnetischen Reflexionen in beiden Spektrometerhälften auf.

- 2) **Rein elektrostatische Speicherung mit magnetischer Führung:** Bewegt sich ein Elektron entlang einer Magnetfeldlinie, welche eine elektrische Äquipotentiallinie zweimal schneidet, so kann das Elektron in den resultierenden elektrostatischen Potentialtopf eingefangen und dort – ähnlich dem Prinzip einer Penningfalle – gespeichert werden.
- 3) **Elektromagnetische Speicherung:** In dieser Fallenvariante findet einerseits eine elektrostatische Reflexion am stark negativen Potential in der Analysierebene und andererseits eine magnetische Reflexion im ansteigenden Magnetfeld statt.

Da das Prinzip des MAC-E-Filters eng mit der Möglichkeit der Speicherung geladener Teilchen verknüpft ist, sind Untersuchungen dieser immanenten Teilchenfallen relevant für den späteren Betrieb des Spektrometers im Experiment. Teilchenfallen des Typs 1) und 3) sind beim MAC-E-Filter prinzipiell nicht vermeidbar; es wird daher ein besonders gutes Vakuum benötigt, um mögliche Untergrundbeiträge aus diesen Fallen zu unterdrücken. Die in 2) beschriebenen elektrostatischen Fallen mit magnetischer Führung können hingegen größtenteils durch ein speziell optimiertes Design verhindert werden. Es wurde deshalb bei der Erstellung des elektromagnetischen Designs darauf geachtet, ideale Fallenbedingungen des Typs 2) nach Möglichkeit zu vermeiden. Auch aktive Maßnahmen zur Reduktion des Untergrundes müssen erwogen werden. Hierzu sei auf die Betrachtungen zur Drahtelektrode in Kapitel 7 verwiesen.

---

<sup>1</sup>Detailierte Ausführungen zum Zusammenhang zwischen gespeicherten Teilchen und Untergrundereignissen finden sich z.B. in den Diplomarbeiten von B. Müller [Müll02], T. Thümmler [Thü02] und K. Essig [Ess04].



# Kapitel 5

# Erste Simulationen und Untersuchungen zur Numerik

In diesem und dem folgenden Kapitel soll der Hauptteil der vorliegenden Arbeit beschrieben werden, deren Zielsetzung darin bestand, mit Hilfe von Simulationsrechnungen ein elektromagnetisches Design für das Hauptspektrometer des KATRIN Experiments zu entwerfen. Die wichtigsten Kriterien, welche bei der Konzipierung eines solchen Spektrometers des MAC-E-Filter-Typs zu beachten sind, wurden bereits im vorangegangenen Kapitel 4 erläutert.

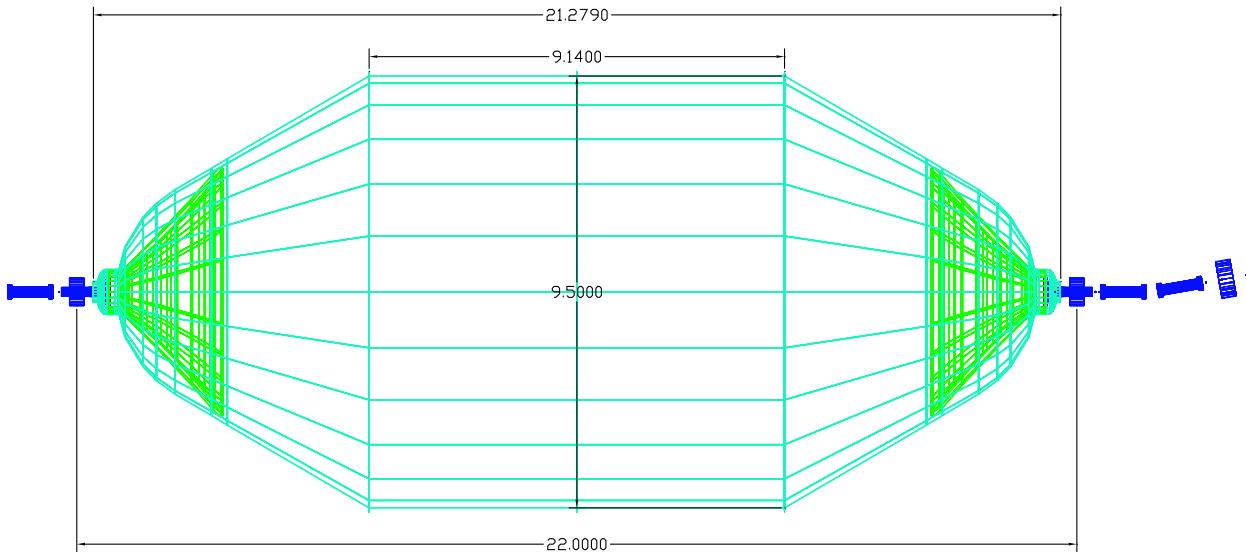
## 5.1 Simulationsrechnungen mit Simion 3D

Wie schon in Kapitel 3 angedeutet, lassen sich die im Rahmen dieser Diplomarbeit durchgeführten Computersimulationen in zwei Phasen gliedern. In der ersten Phase, der die Unterkapitel 5.1 bis 5.3 gewidmet sind, wurden Studien mit Hilfe des Programms Simion angefertigt. Obwohl die endgültigen Berechnungen erst in der zweiten Phase mittels spezialisierter C-Programme erfolgten, sind auch die Resultate der ersten Simulationen relevant, welche im Folgenden beschrieben werden sollen.

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit war das in Abb. 5.1 gezeigte Referenzdesign eines 22 m langen Hauptspektrometers mit 9.5 m Durchmesser (A. Osipowicz et al.), auf welches im Folgenden unter der Bezeichnung „Standarddesign des 22-m-Spektrometers“ Bezug genommen werden wird. Zunächst wurden detaillierte Tests dieses Designs mit unabhängigen Simulationsprogrammen vorgenommen.

### 5.1.1 Eingabe der Feldgeometrien des Hauptspektrometers in Simion 3D

Um die Simulationen des Hauptspektrometers beginnen zu können, mussten zunächst aus der Konfiguration und den Parametern des Standarddesigns elektrische und magnetische Feldkarten erstellt werden. Einige wichtige Daten zu dem verwendeten Design sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Das magnetische Führungsfeld wird durch zwei supraleitende Magnete mit je 3.5 T Feldstärke generiert, deren Zentren im Standarddesign einen Abstand von 22 m aufweisen. Zur Erzeugung des elektrostatischen Retardierungspotentials  $U_{\text{vessel}}$  dient die Hülle des Spektrometertanks selbst, welche eine Hochspannungselektrode bildet. Sie besteht aus einem zentralen zylinderförmigen Teil und zwei sich zu den Enden hin verjüngenden konischen Teilen. Die Erdelektroden, durch welche die Elektronen in das Hauptspektrometer hinein bzw.



**Abbildung 5.1: Bisheriges Standarddesign des 22-m-Spektrometers (CAD-Zeichnung von A. Osipowicz).** Dargestellt sind die Kontur der Tankelektrode (türkis), die beiden zusätzlichen trichterförmigen Hochspannungselektroden (grün), die Erdelektroden (blau) und Teile des Magnetsystems (Hauptspektrometermagnete und Transportelemente, blau). Die Distanz zwischen den Zentren der beiden Hauptspektrometermagnete beträgt 22 m, der Innendurchmesser im zylindrischen Teil des Tanks 9.5 m.

**Tabelle 5.1: Daten zum Standarddesign des 22-m-Hauptspektrometers.** Zur Erläuterung:

\*) Distanz zwischen den Zentren der beiden Hauptspektrometersolenoiden.

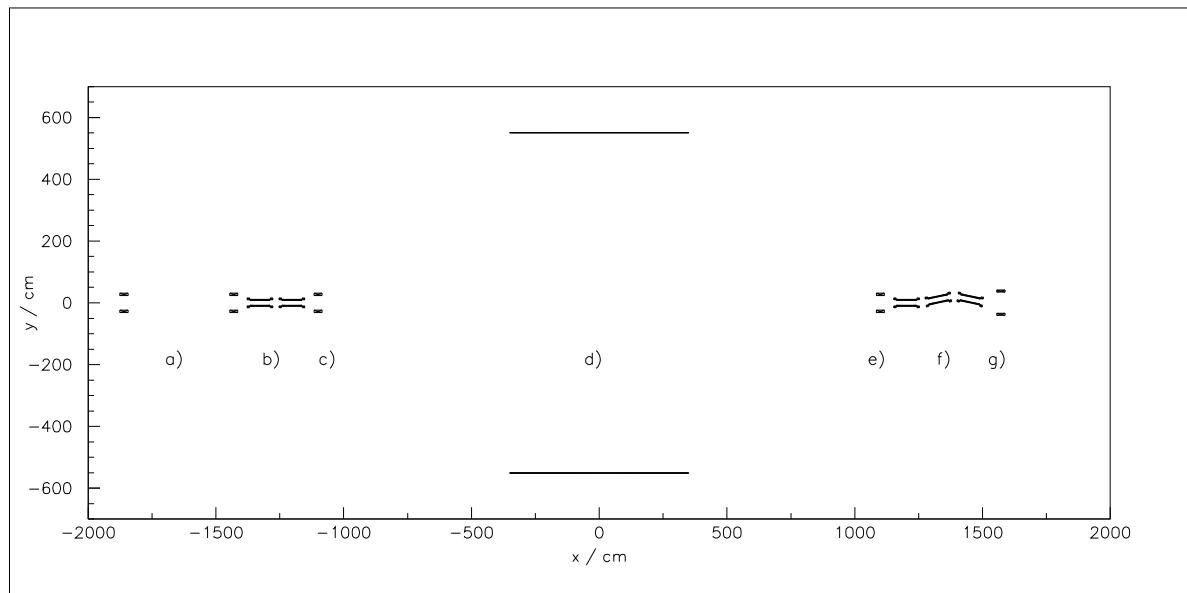
\*\*) Innendurchmesser des Vakuumtanks im zylindrischen Teil.

Magnetfeldstärke Solenoidzentrum	$B_{\text{solenoid}} = 3.5 \text{ T}$
Magnetfeldstärke Analysierebene	$B_{\text{analys}} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$
Spektrometerlänge*)	$L = 22 \text{ m}$
Spektrometerdurchmesser**)	$D = 9.5 \text{ m}$
Retardierungspotential an Tankhülle	$U_0 = -18600 \text{ V}$
Potential an Zusatz-HV-Elektrode	variabel, positiv gegenüber $U_0$

wieder hinaus geleitet werden, verlaufen durch die Magnete hindurch und sind zum Spektrometerinneren hin trichterförmig aufgebogen. Als weitere Komponente zeigt Abb. 5.1 die beiden zusätzlichen Elektroden, welche mit einer leicht vom Tankelektrodenpotential abweichenden Hochspannung belegt werden. Neben ihrer feldformenden Wirkung sollen sie dazu beitragen, Teilchenfallen im abgerundeten Teil des Tanks zu vermeiden. Bei der Wahl des Potentials  $U_{\text{add. electrode}}$  dieser Elektroden ist zu beachten, dass der radiale Potentialdurchgriff längs der Analysierebene empfindlich von der Differenz  $U_{\text{vessel}} - U_{\text{add. electrode}}$  abhängt (siehe Abschnitt 6.1). Dieser Sachverhalt kann auch dazu genutzt werden, den Potentialdurchgriff in der Analysierebene gezielt einzustellen.

**Erzeugung elektrischer Feldkarten mit Simion:** Aus einer CAD-Zeichnung des bisherigen Hauptspektrometerdesigns (siehe Abb. 5.1) wurden die Bemaßungen des Vakuumtanks, der Erdelektroden am Ein- und Ausgang des Spektrometers sowie der beiden zusätzlichen feldformenden Hochspannungselektroden entnommen. Mit den so abgelesenen Geometriedaten wurde eine ASCII-Datei erstellt (*geometry file*, siehe Anhang D.1), welche die aufwendige und vergleichsweise unpräzise Eingabe der Elektrodenkonfiguration mit Hilfe des grafischen Editors in Simion ersetzt. Auf diese Weise wurden die Konturen der Elektroden als geschlossene Polygonzüge definiert. Unter Ausnutzung der Spiegelsymmetrie bezüglich der vertikalen Mittelachse sowie der Zylindersymmetrie wurde nur ein Viertel der gesamten Elektrodenkontur spezifiziert, der Rest wurde während des Feldberechnungsprozesses automatisch ergänzt.

**Erzeugung magnetischer Feldkarten mit Bfield\_3d:** Zur Berechnung des skalaren magnetischen Potentials für die Hauptspektrometersimulationen wurden aus einer Parameterdatei die Informationen für insgesamt 21 Spulen in Bfield\_3d eingelesen (siehe Anhang D.2). Dabei sind dem Hauptspektrometer selbst nur drei Magnete zuzurechnen: die Ein- und Ausgangssolenoiden sowie eine lange Luftspule mit 5.5 m Radius, welche den Spektrometertank im Bereich der Analysierebene umschließt. Die Berücksichtigung der übrigen 18 Magnete ist aufgrund der von ihnen erzeugten Streufelder notwendig. Die größten Beiträge kommen dabei von den beiden Vorspektrometerspulen und dem Detektormagneten. Abbildung 5.2 zeigt die Kette der in die Rechnung einbezogenen Magnete.



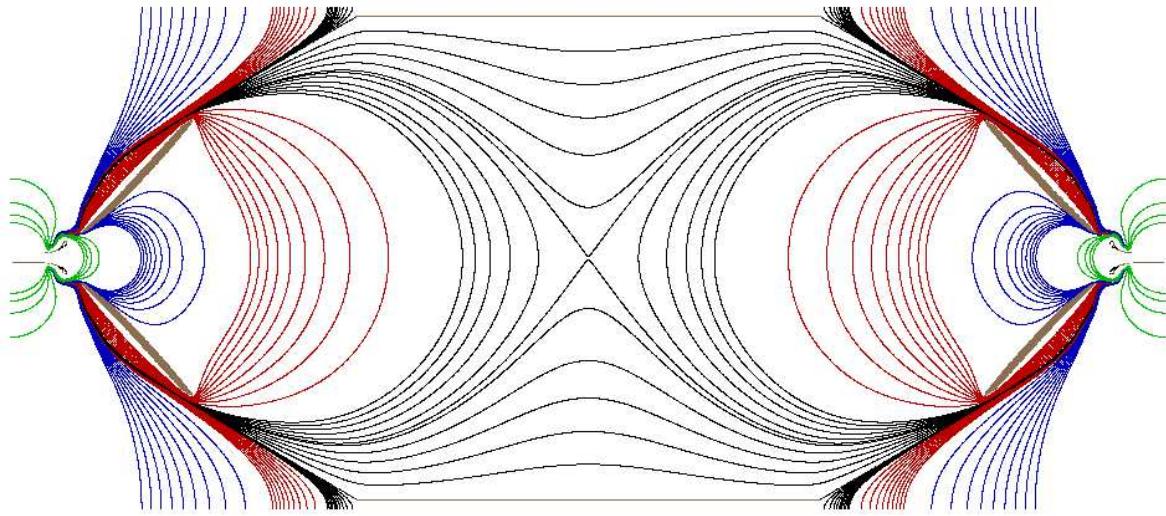
**Abbildung 5.2: Magnetkonfiguration vom Vorspektrometer bis zum Detektor.** Die Grafik zeigt die beiden Vorspektrometersolenoiden (a), mehrere Transportelemente (b und f), den Hauptspektrometer-Eingangsmagneten (c), die den Tank umschließende große Luftspule (d), den Hauptspektrometer-Ausgangsmagneten (e) sowie den Detektormagneten (g).

Vor Beginn der ersten Simulationen müssen die elektrische und magnetische Feldkarte in Simion präzise überlagert werden. Dies geschieht durch geeignete Verschiebung der beiden Karten relativ zueinander auf der sogenannten „Arbeitsfläche“. Außerdem muss die Gitterfeinheit so eingestellt werden, dass die Dimensionen der Karten übereinstimmen. Ausschlaggebend für die Gitterfeinheit ist die bei der Erstellung der Feldkarten benutzte Diskretisierung, d.h. im

Wesentlichen der Abstand benachbarter Punkte im zweidimensionalen Gitter (*grid*). Für die elektrische Karte wurde ein Skalierungsfaktor von 2.2002 mm/gu gewählt, für die magnetische Karte 5.0 mm/gu (gu = *grid unit*). Schließlich muss in der elektrischen Karte noch die Potentialbelegung der verschiedenen Elektroden gesetzt werden. Falls nicht anders angegeben, wurden hierzu stets die folgenden Standardeinstellungen gewählt:

$$\begin{aligned} U_{\text{vessel}} &= -18600.0 \text{ V} & \text{Tankelektrode,} \\ U_{\text{add. electrode}} &= -18585.0 \text{ V} & \text{Zusatzelektrode,} \\ U_{\text{ground electrode}} &= 0.0 \text{ V} & \text{Erdelektrode.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ein aus dieser Potentialbelegung resultierendes Äquipotentiallinienbild ist in Abb. 5.3 gezeigt.



**Abbildung 5.3: Äquipotentiallinien im Hauptspektrometer: Projektion in der x-y-Ebene.** Die Abbildung zeigt Äquipotentiallinien im Abstand von 0.1 V im Bereich von  $-18599.9 \text{ V}$  bis  $-18599.0 \text{ V}$  (schwarz), im Abstand von 1.0 V im Bereich von  $-18598.0 \text{ V}$  bis  $-18590.0 \text{ V}$  (rot), im Abstand von 10.0 V im Bereich von  $-18580.0 \text{ V}$  bis  $-18500.0 \text{ V}$  (blau) und im Abstand von 1000.0 V im Bereich von  $-17500.0 \text{ V}$  bis  $-14500.0 \text{ V}$  (grün). Die Potentialbelegung der in braun eingezeichneten Elektroden ist die in Gl. (5.1) angegebene. Mit dieser Belegung wird ein radialer Potentialdurchgriff von  $\Delta U_{\text{analys}} = 0.53 \text{ V}$  in der Analysierebene erreicht (innerste schwarze Linie:  $-18599.47 \text{ V}$ ).

Die Homogenität des Retardierungspotentials in der Analysierebene erfüllt mit

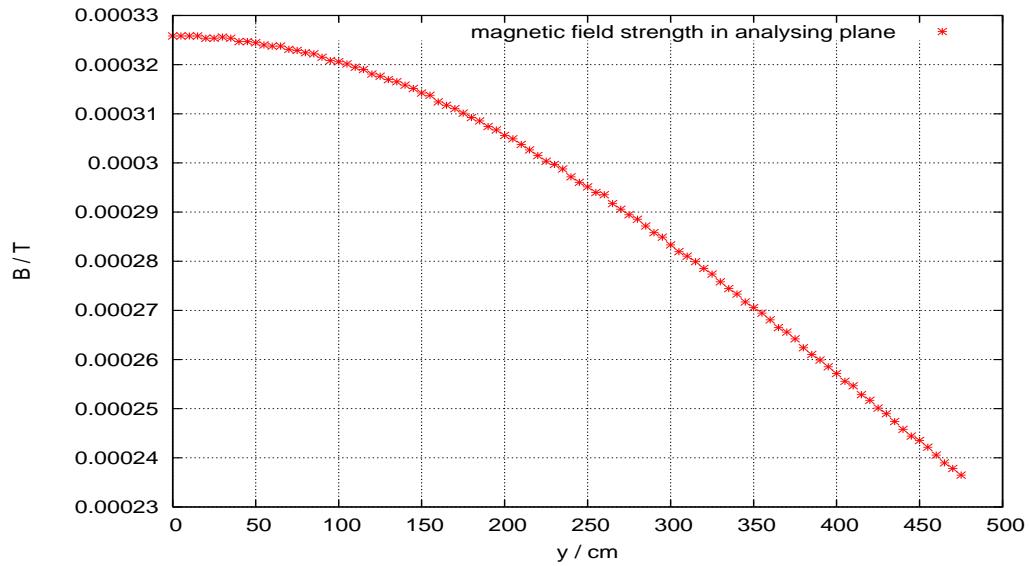
$$\Delta U_{\text{analys}} = -18599.47 \text{ V} - (-18600.0 \text{ V}) = 0.53 \text{ V}$$

nicht ganz die in Gl. (4.10) angegebene Bedingung.

Die relative radiale Variation der Magnetfeldstärke (Abb. 5.4) ist mit

$$\frac{\Delta B_{\text{analys}}}{B_{\text{analys}}} = \frac{(3.25 - 2.35) \text{ G}}{3.25 \text{ G}} \approx 28 \%$$

gemäß dem Kriterium in Gl. (4.11) ebenfalls zu groß.

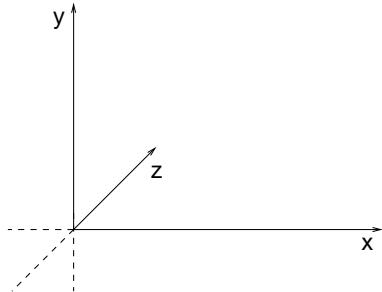


**Abbildung 5.4: Radialer Verlauf der Magnetfeldstärke in der Analysierebene.** Die Feldstärke fällt von  $B = 3.25$  Gauß im Zentrum des Spektrometers nach außen hin auf  $B = 2.35$  Gauß ab. Berücksichtigt wurden alle 21 Magnete aus der Aufstellung in Abb. 5.2.

### 5.1.2 Erstellung und Auswertung von Bahnverfolgungsdateien

Zum Start der Simulation in Simion muss der Benutzer noch einige Anfangsparameter eingeben. Als Rechengenauigkeitsparameter wurde (sofern nicht anders angegeben) stets der Wert  $QF = 200$  gewählt. Zur Automatisierung der Simulation können vom Benutzer ganze Gruppen von Elektronen mit verschiedenen Startparametern definiert werden.

Dazu wählt man z.B. feste Werte für die Positionen  $x_{\text{start}}$  und  $z_{\text{start}}$ , den Elevations- und Azimutwinkel  $\theta_{\text{start}}$  bzw.  $\varphi_{\text{start}}$  sowie die kinetische Energie  $E_{\text{start}}$ , während die Koordinate  $y_{\text{start}}$  in festen Schritten für verschiedene nacheinander gestartete Elektronen variiert. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass durch Vergleich der resultierenden Elektronenbahnen der Einfluss des varierten Parameters ersichtlich wird. Das in Simion verwendete Koordinatensystem ist in Abb. 5.5 dargestellt. Die Längsachse des Spektrometers verläuft parallel zur  $x$ -Achse. Die Trajektorie der Elektronen kann während des Simulationsprozesses in verschiedenen Projektionen mitverfolgt werden. Da es aufgrund der vorhandenen Symmetrien ausreicht, zweidimensionale Feldkarten des Hauptspektrometers zu verwenden, wählt man als Projektionsfläche sinnvollerweise die  $x$ - $y$ -Ebene, was einem Längsschnitt des Spektrometers entspricht. Die Simion-Benutzeroberfläche erlaubt es, Zeitschritte festzulegen (typischerweise eine bis einige Nanosekunden), in denen bestimmte Bahnparameter mitgelogggt und in eine Textdatei geschrieben werden. Diese Informationen über elektrische und magnetische Felder, Anstellwinkel relativ zum Magnetfeld, Geschwindigkeit und kinetische Energie entlang der Trajektorie werden mit einem Auswertungsprogramm

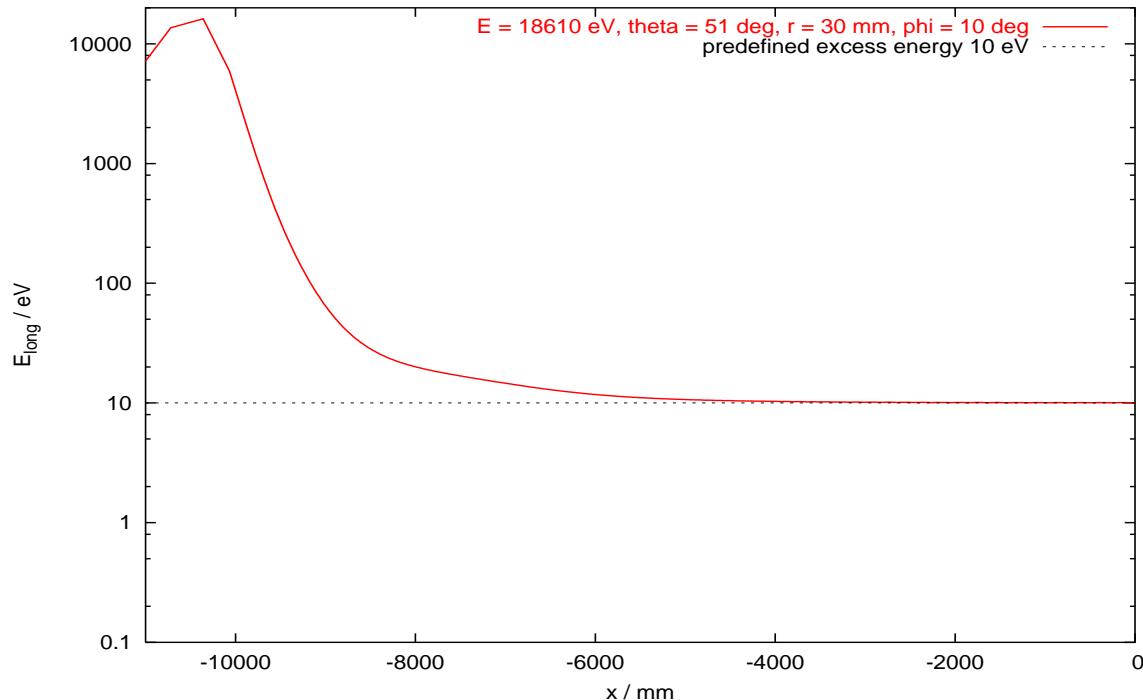


**Abbildung 5.5: Koordinatensystem in Simion.**

unter Verwendung des „Objektorientierten Datenanalysesystems“ ROOT verarbeitet<sup>1</sup>. So werden beispielsweise aus der kinetischen Energie und den Komponenten der Vektoren  $\vec{B}$  und  $\vec{v}$  die wichtigen Größen  $E_{\parallel}$  und  $E_{\perp}$  ermittelt (siehe Gl. (2.9) – (2.10)).

Üblicherweise werden die Elektronen im Zentrum des Spektrometer-Eingangssolenoiden mit einer gewissen Überschussenergie  $\epsilon = E - qU_0$  gegenüber der Filterschwelle gestartet<sup>2</sup>. Es ist zu überprüfen, ob die Longitudinalenergie der Elektronen entlang der Bahn stets oberhalb des Vorgabewertes bleibt und ihr Minimum genau in der Analysierebene liegt. Da  $E_{\parallel}$  vom Startpunkt im Eingangsmagneten bis zur Analysierebene um mehrere Größenordnungen abfällt, ist die Wahl einer halblogarithmischen Darstellung für die Auftragung von  $E_{\parallel}$  gegen  $x$  sinnvoll.

Abb. 5.6 zeigt exemplarisch die Auftragung der Longitudinalenergie eines Elektrons gegen die in  $x$ -Richtung zurückgelegte Strecke bis zur Analysierebene. Die Grafik zeigt den typischen Verlauf von  $E_{\parallel}$  mit einem anfänglichen Anstieg der Longitudinalenergie aufgrund der Konversion  $E_{\perp} \rightarrow E_{\parallel}$ , gefolgt von einem raschen Abfall durch die kontinuierliche Verringerung der Energie in Vorwärtsrichtung beim Durchlaufen des elektrostatischen Gegenfeldes.



**Abbildung 5.6: Longitudinalenergie entlang der Trajektorie eines Elektrons mit 10 eV Überschussenergie (mit korrigierter Startenergie).** Das simulierte Elektron wurde im Zentrum des ersten Spektrometermagneten bei  $x = -11$  m gestartet und bis zur Analysierebene bei  $x = 0$  m verfolgt. Das halblogarithmische Diagramm zeigt zunächst einen Anstieg von  $E_{\parallel}$ , solange sich das Elektron noch innerhalb der Erdelektrode befindet. Dort wirkt lediglich die magnetische Gradientenkraft, welche aufgrund des Abfalls der Magnetfeldstärke einen Teil der Transversalenergie  $E_{\perp}$  nach  $E_{\parallel}$  konvertiert. Beim Eintritt in den Einflussbereich des negativen Retardierungspotentials setzt als zweiter Effekt eine rasche Abnahme von  $E_{\parallel}$  ein, welche sich in Richtung der Analysierebene fortsetzt.

<sup>1</sup>ROOT – An Object-Oriented Data Analysis Framework [Root]

<sup>2</sup>Hierbei kann eine in Anhang C beschriebene Startenergiokorrektur vorgenommen werden.

## 5.2 Resultate der ersten Simulationen

Mittels der oben beschriebenen Verfahrensweisen wurden viele Simulationen von Elektronen mit unterschiedlichen Startparametern durchgeführt. Es zeigten sich dabei Probleme bei den Transmissionstests, vor allem für Elektronen mit sehr geringer Überschussenergie  $\epsilon_{\parallel} = 1 \text{ eV}$  und Startradien bzw. -winkel am Rande des zu überprüfenden Parameterbereichs. Die Grenzen des sinnvollen Startparameterbereichs lassen sich im Wesentlichen anhand von zwei Bedingungen festlegen:

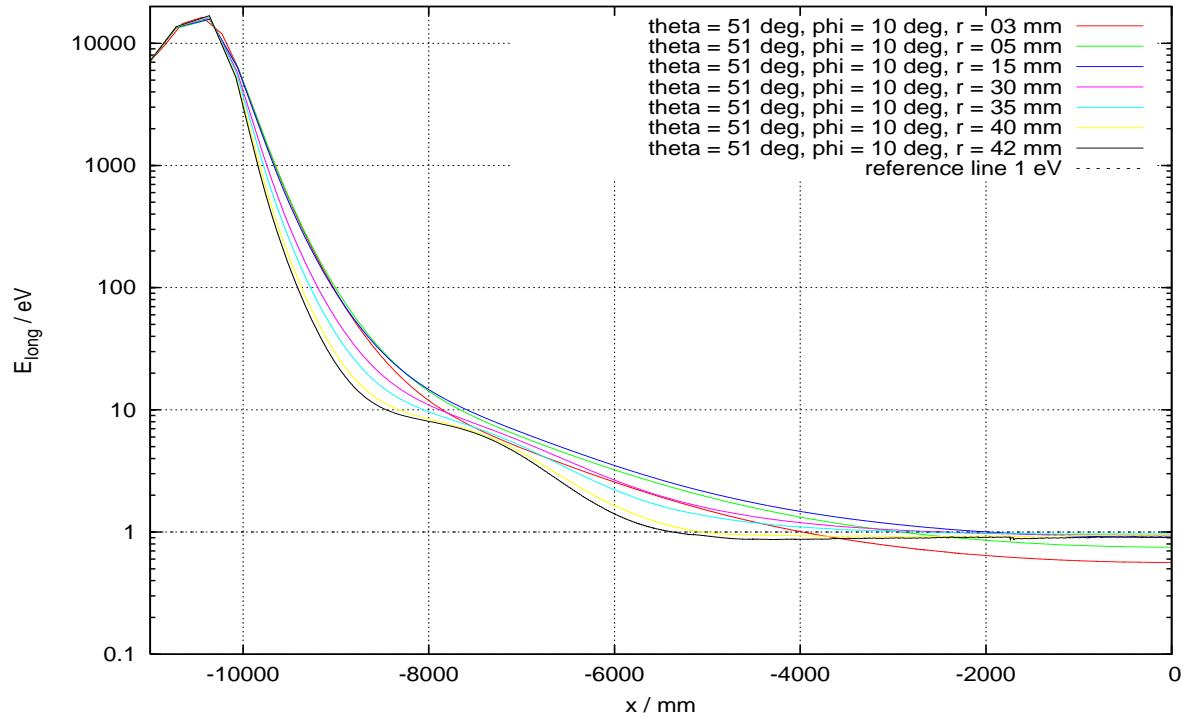
- a) Der zu transmittierende magnetische Fluss beträgt  $\Phi = 191 \text{ T cm}^2$ . Für den Radius des Flussschlauches im Zentrum des Eingangssolenoiden, wo ein Magnetfeld der Stärke  $3.5 \text{ T}$  herrscht, ergibt sich somit  $r_{\text{start, max}} = 4.17 \text{ cm}$ . Dies entspricht einem maximalen Radius von  $r_{\text{analyse}} = 450 \text{ cm}$  in der Analysierebene. Bei einem auf  $475 \text{ cm}$  festgelegten Innenradius des Hauptspektrometertanks bedeutet dies, dass die bei  $r = 4.17 \text{ cm}$  im Magneten gestarteten Elektronen der Tankelektrode zwar recht nahe kommen, der nominelle Flussschlauch aber noch vollständig vom Tank umschlossen wird.
- b) Alle Elektronen, deren Impulsvektor im Startpunkt einen Winkel größer als  $\theta_{\text{max}}$  mit den Magnetfeldlinien bildet, werden beim Erreichen des maximalen Magnetfeldes der Stärke  $B_{\text{max}}$  (*Pinch*-Feld) magnetisch reflektiert. Daher brauchen bei den Studien zum elektromagnetischen Design des Hauptspektrometers nur Elektronen mit Startwinkeln  $\theta \leq \theta_{\text{max}}$  betrachtet zu werden, wobei  $\sin \theta_{\text{max}} = \sqrt{B_S/B_{\text{max}}}$  gilt ( $B_S$  ist die Magnetfeldstärke am Startort, in diesem Fall also im Zentrum des ersten Spektrometersolenoiden). Setzt man  $B_S = 3.5 \text{ T}$  und  $B_{\text{max}} = 6 \text{ T}$  ein, so ergibt sich  $\theta_{\text{max}} \approx 50^\circ$ .

Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Studien wurden in allen Simulationsreihen Elektronen mit den leicht aufgerundeten Startparametern  $r \leq 4.2 \text{ cm}$  und  $\theta \leq 51^\circ$  berücksichtigt.

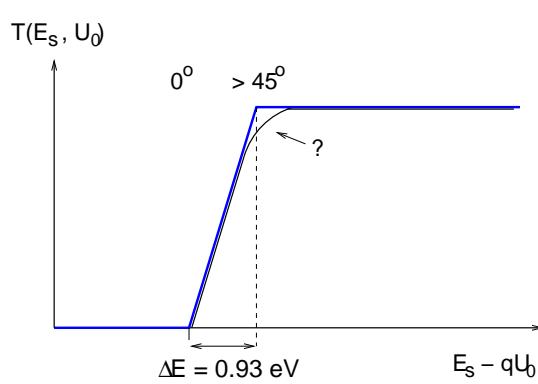
In Abbildung 5.7 sind einige Simulationsergebnisse für Elektronen mit verschiedenen Startradien ( $r_{\text{start}} = 3 \dots 42 \text{ mm}$ ) bei gleicher Überschussenergie (1 eV) und gleichen Startwinkeln ( $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ,  $\varphi_{\text{start}} = 10^\circ$ ) festgehalten. Die Grafik stellt nur einen kleinen Ausschnitt aller durchgeführten Simulationsrechnungen dar. Es zeigt sich, dass Verletzungen der Transmissionsbedingung auftreten, und zwar hauptsächlich in zwei Fällen:

1. *Elektronenbahnen mit sehr kleinen Startradien* (z.B.  $r_{\text{start}} = 3 \dots 10 \text{ mm}$ ), also Flugbahnen nahe der Längsachse des Spektrometers: Die kinetische Longitudinalenergie zeigt in Richtung der Analysierebene einen starken kontinuierlichen Abfall, weitgehend unabhängig von der Größe des Startwinkels  $\theta_{\text{start}}$ . Je kleiner  $r_{\text{start}}$ , desto größer ist der Verlust an Longitudinalenergie bis zur Analysierebene.
2. *Elektronenbahnen mit sehr großen Startradien* (insbesondere  $r_{\text{start}} = 40 \text{ mm}$  und  $42 \text{ mm}$  in Abb. 5.7) in Kombination mit hohen Startwinkeln  $\theta_{\text{start}}$ . Es erfolgt ein Abfall der Longitudinalenergie unter die Solllinie, z.T. schon 5 m vor Erreichen der Analysierebene, wonach meist ein geringfügiger Wiederanstieg von  $E_{\parallel}$  zu beobachten ist.

Systematische Untersuchungen legten den Schluss nahe, dass es sich in den oben genannten Fällen um zwei grundsätzlich verschiedene Probleme handelt. Diese Vermutung wurde durch spätere Kontrollen mit unabhängigen Simulationsprogrammen bestätigt: siehe Abschnitt 5.4.



**Abbildung 5.7: Verlauf der Longitudinalenergie für verschiedene Startradien (mit korrigierter Startenergie).** Bei idealen Transmissionseigenschaften sollte  $E_{\parallel}$  an keiner Stelle der Bahn unter den vorgegebenen Überschussenergiewert von 1 eV fallen. Die Kurven wurden alle für  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$  und  $\varphi_{\text{start}} = 10^\circ$  aufgenommen, allerdings mit verschiedenen Startradien im Bereich von  $r = 3 \text{ mm}$  bis  $r = 42 \text{ mm}$ . Die bei extrem kleinen sowie die bei extrem großen Radien gestarteten Elektronen können ihre longitudinale Überschussenergie laut dieser Darstellung nicht konservieren.



**Abbildung 5.8: Skizze zur modifizierten Transmissionsfunktion.** *Blau:* Transmissionsfunktion mit wohldefinierter Breite  $\Delta E$ . *Schwarz:* unkontrolliert verbreiterte Transmissionsfunktion durch zu frühe Retardierung: Elektronen mit hohen Startradien und Startwinkeln werden erst bei höherer Überschussenergie  $E_s - qU_0$  transmittiert.

Zum einen stellen sich offenbar für Bahnverfolgungsrechnungen sehr nahe der Spektrometer-Längsachse numerische Probleme ein, die auf den in Simion verwendeten Algorithmus zurückzuführen sind. Da der Quelltext von Simion nicht frei zugänglich ist, ist es schwierig, präzise Aussagen über die Art dieses Problems zu machen oder mögliche Lösungswege zu finden.

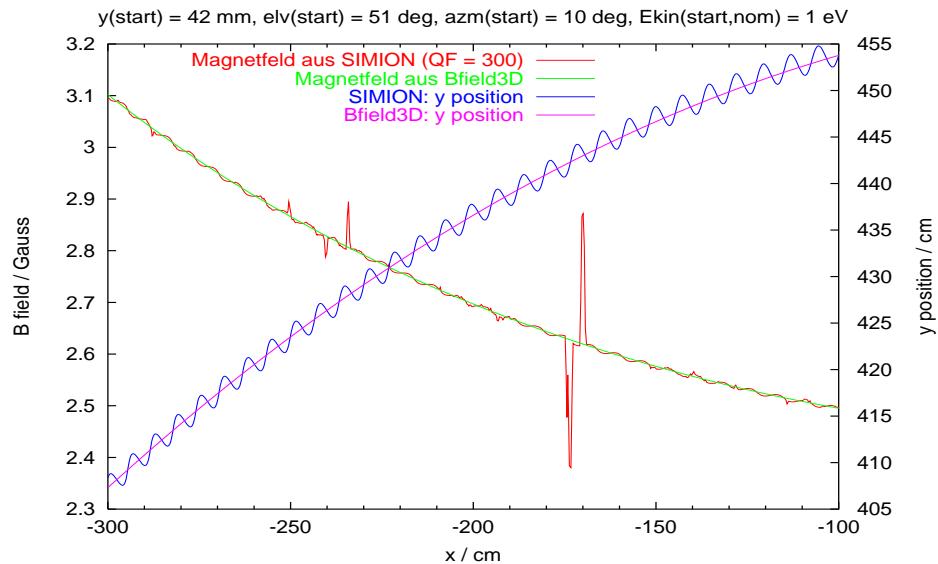
Zum anderen existieren anscheinend physikalisch begründete Probleme bei der Transmission von Elektronen auf den Außenbahnen (d.h. für große Startradien) bei gleichzeitig hohen Startwinkeln. Diese letztgenannten Schwierigkeiten wären demnach nur durch geeignete Umkonfiguration der elektro- bzw. magnetostatischen Felder zu beseitigen und stellen somit ein Defizit des bisher verwendeten sogenannten Standarddesigns des Hauptspektrometers dar. Solche Transmissionsprobleme sollten möglichst beho-

ben werden, da sie Abweichungen von der analytisch berechenbaren Form der Transmissionsfunktion in Gl. (2.23) durch ein Verschmieren des scharfen Abknickens im Bereich hoher Startwinkel verursachen können (Abb. 5.8). Das Ausmaß dieser Verschmierung der Transmissionsfunktion ist dabei nur schwer quantifizierbar, weshalb solche Effekte möglichst vermieden werden sollten.

### 5.3 Weitere numerische Probleme mit Simion 3D

Neben den zu Beginn des Abschnitts 5.2 erwähnten Schwierigkeiten bei der Bahnverfolgung von Teilchen bei kleinen Abständen von der Spektrometerachse treten auch bei den Elektronen auf den Außenbahnen numerische Fehler auf.

Bei der genauen Betrachtung der Transmissionskurve für  $r_{\text{start}} = 42 mm in Abb. 5.7 fällt ein „unphysikalischer“ Sprung in der Longitudinalenergie bei einer Position von  $x = 1750$  mm vor der Analysierebene auf. Detaillierte Untersuchungen dieses Phänomens haben gezeigt, dass die Ursache in einem bipolaren Sprung in der Magnetfeldstärke liegt, welcher eine Amplitude von etwa 0.3 Gauß aufweist und nur in den Ausgabewerten von Simion zu sehen ist, nicht jedoch im eingelesenen Magnetfeld aus Bfield_3d (Abb. 5.9). Diese Unstetigkeit zeigt sich in den Daten der Trajektorien für Elektronen mit  $r_{\text{start}} = 35 \dots 42$  mm, während sie für  $r_{\text{start}} \leq 30$  mm verschwindet. Sie lässt sich auch durch Erhöhen des Rechengenauigkeitsparameters  $QF$  nicht vermeiden. Da nun also auch Elektronen mit den für die Designstudien besonders interessanten extremen Startparametern (in diesem Fall: großen Startradien) von diesen numerischen Fehlern betroffen sind, ist die Vertrauenswürdigkeit und damit die Verwendbarkeit von Simion für die weiteren Studien zum Hauptspektrometer fraglich.$



**Abbildung 5.9: Numerische Fehler bei achsenfernen Elektronen.** *Linke Ordinatenachse:* Magnetfeldstärke aus der mit Bfield\_3d erstellten Eingabedatei für Simion (grün) bzw. aus der Simion-Bahnverfolgungsdatei (rot). Der bipolare Sprung bei  $x \approx -175$  cm tritt nur in den Berechnungen mit Simion auf. *Rechte Ordinatenachse:* Auftragung der  $y$ -Koordinate zur Kontrolle der korrekten Überlagerung der Simion-Daten (blau) mit den Bfield\_3d-Daten (magenta). — Die Oszillationen stammen von der Projektion der Zyklotronbewegung des Elektrons auf die  $x$ - $y$ -Ebene.

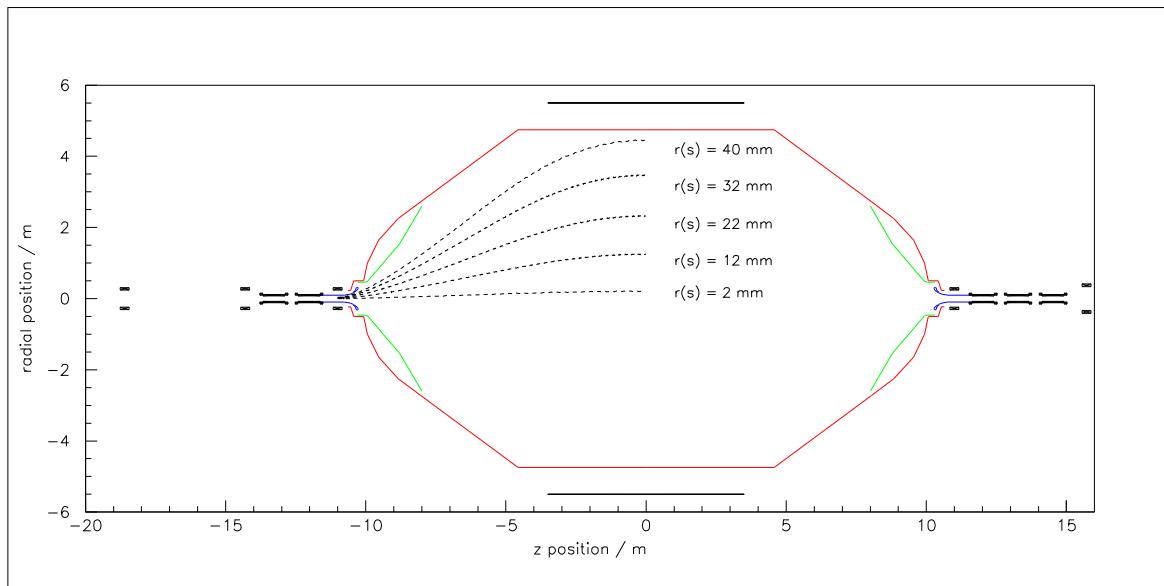
## 5.4 Simulationen mit neu entwickelten Programmen

Um die Ausführungen der vorigen Abschnitte hinsichtlich der Simulationsmethode zusammenzufassen, lassen sich folgende Punkte festhalten:

- Die Eingabe der elektro- und magnetostatischen Feldkonfiguration eines MAC-E-Filters sowie die Durchführung von Bahnverfolgungsrechnungen sind mit dem Programm Simion 3D Version 7.0 *prinzipiell* möglich.
- Numerische Genauigkeit und Zuverlässigkeit sind im Hinblick auf die enormen Präzisionsanforderungen an die Berechnungen für das KATRIN Hauptspektrometer jedoch nicht ausreichend.
- Aus diesen Gründen ist es erforderlich, für die weiteren Designstudien ein besser an die Anforderungen angepasstes Programmpaket zu verwenden (Beschreibung in Abschnitt 3.3). Es ist zu überprüfen, ob es sich bei den gefundenen Transmissionsproblemen tatsächlich um zwei verschiedene Phänomene handelt, von denen eins auf numerische und das andere auf physikalische Ursachen zurückzuführen ist.

### 5.4.1 Revision der Ergebnisse der Simulationen mit Simion 3D

Zur Überprüfung der Simion-Resultate wurde zunächst eine Kopie der bisherigen Spektrometergeometrie mit Hilfe der neuen Feldberechnungsroutinen implementiert (Abb. 5.10). Die Ergebnisse wurden für Bahnberechnungen mit Hilfe der neuen Bahnverfolgungsroutine verwendet.



**Abbildung 5.10:** Verlauf einiger Trajektorien, eingezeichnet in die  $z$ - $r$ -Projektion der Magnet- und Elektrodenkonfiguration des Spektrometers. Die gestrichelten Linien stellen die Bahnen von Elektronen dar, welche in der Simulation bei Radien von  $r_{\text{start}} = 2$  mm bis 40 mm im Zentrum des Eingangssolenoiden gestartet wurden.

### Revision des Transmissionsproblems bei kleinen Startradien

In Abb. 5.11 ist der Verlauf der Longitudinalenergie für Elektronen mit den gleichen Startparametern ( $\epsilon_{\parallel} = 1 \text{ eV}$ ,  $r_{\text{start}} = 3 \text{ mm}$ ,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ,  $\varphi_{\text{start}} = 10^\circ$ ) dargestellt, gemäß den Berechnungen mit den zwei verschiedenen Programmen.

Die rote Kurve (Simion-Daten) zeigt deutlich einen Abfall der Longitudinalenergie unter die vorgesehene Überschussenergie von 1 eV, welcher sich monoton bis hin zur Analysierebene fortsetzt. Dort beträgt der Unterschied zum Sollwert von  $E_{\parallel}$  einige 100 meV.

Der Verlauf der blauen Kurve (neue Bahnverfolgungsroutine) unterscheidet sich grundlegend von den Simion-Berechnungen. Hier kommt das Elektron gerade mit der vorgegebenen Longitudinalenergie in der Spektrometermitte an. Die beiden Kurven weichen schon nach einer Flugstrecke von wenigen Metern deutlich voneinander ab. Es herrscht relativ gute Übereinstimmung in dem Bereich kurz nach dem Eintritt des Elektrons in das Spektrometer, wo seine Longitudinalenergie noch vergleichsweise hoch ist. Erst nachdem  $E_{\parallel}$  bereits um fast zwei Größenordnungen reduziert worden ist, werden signifikante Unterschiede zwischen den beiden Kurven sichtbar. Diese Untersuchung bestätigt die Vermutung, dass es sich bei den scheinbaren Transmissionsproblemen der achsennahen Elektronen, welche sich fern von jeglichen Elektrodenoberflächen durch das Spektrometer bewegen, um numerische Probleme in Simion handelt.

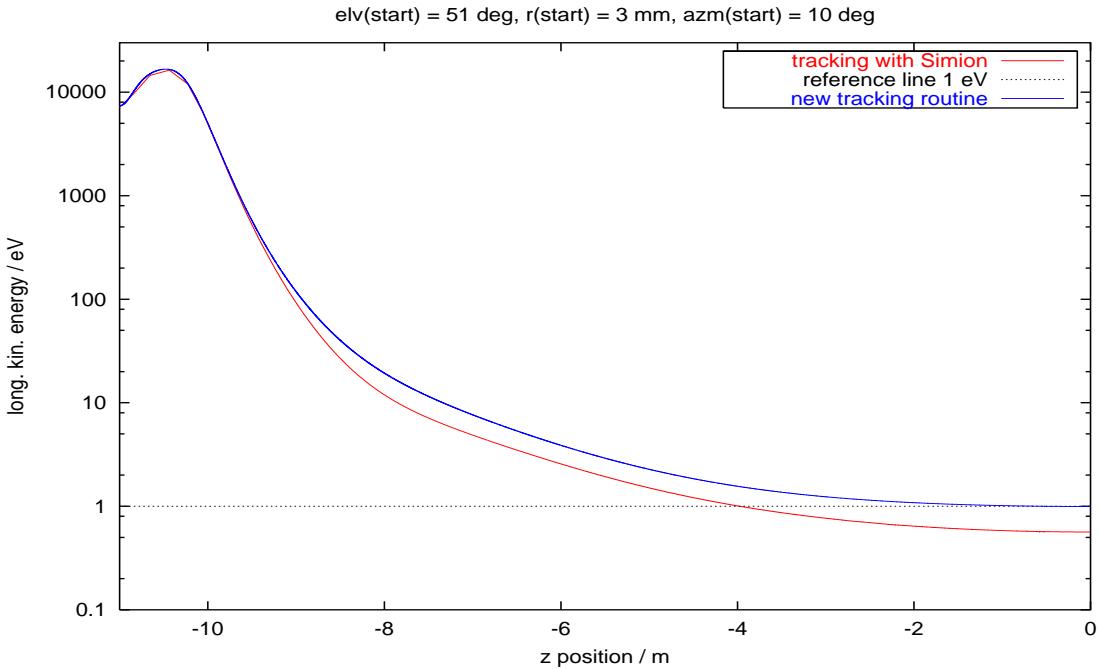
### Revision des Transmissionsproblems bei großen Startradien und -winkeln

Abb. 5.12 hingegen zeigt den mit der neuen Bahnverfolgungsroutine simulierten Longitudinalenergieverlauf für ein Elektron mit  $r_{\text{start}} = 42 \text{ mm}$  und  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ . Die grüne Kurve wurde mit der üblichen Zusatzelektrode ( $U_{\text{add. electrode}} = -18585 \text{ V}$ ) erstellt, bei der roten Kurve wurde die Zusatzelektrode aus der Konfiguration entfernt.

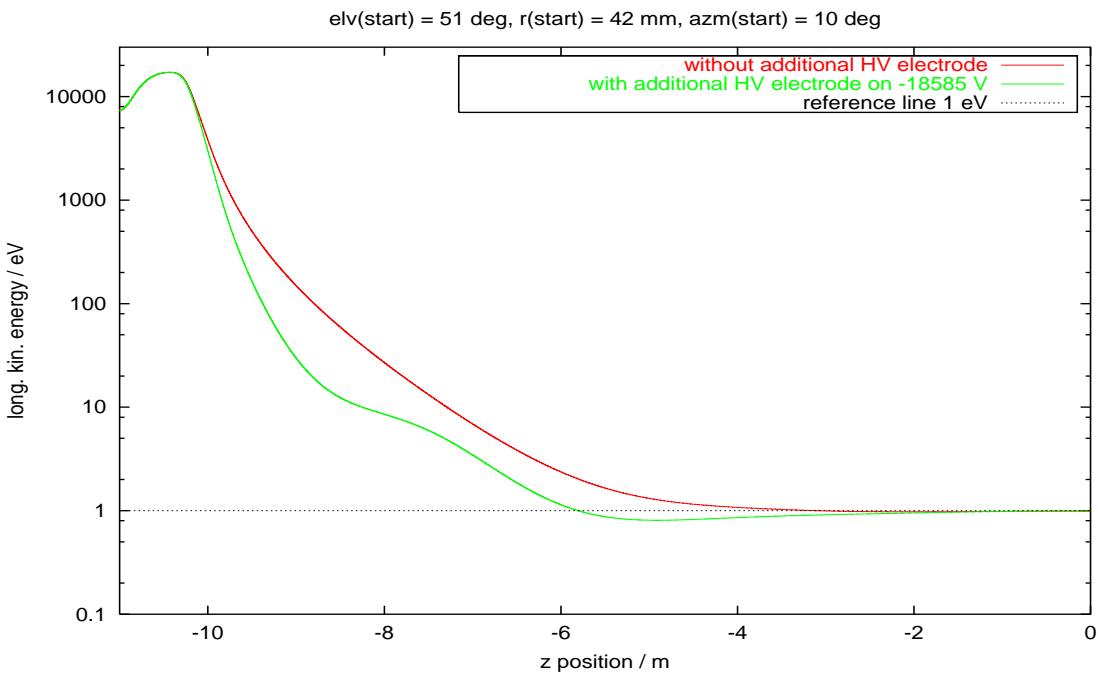
Anhand dieser Grafik wird klar, dass die Probleme bei der Transmission der Elektronen auf den Außenbahnen bei gleichzeitig hohen Startwinkeln sowohl bei den Berechnungen mit Simion als auch in den neuen Simulationen auftreten<sup>3</sup>. Sie scheinen daher real zu sein und eine physikalische Ursache zu haben. Das Minimum der longitudinalen kinetischen Energie wird für das in Abb. 5.12 betrachtete Elektron bei einer Position von etwa  $z = -5 \text{ m}$  vor der Analysierebene erreicht, und nicht wie erforderlich bei  $z = 0 \text{ m}$  (grüne Kurve in Abb. 5.12). Es findet also tatsächlich eine zu frühe Retardierung der Außen elektronen mit hohen Startwinkeln statt. Im Minimum liegt  $E_{\parallel}$  in dem betrachteten Fall etwa 0.2 eV unterhalb der vorgegebenen Energie von 1 eV. Dass dieser Effekt nur bei großen Startradien auftritt, liegt daran, dass die Retardierung aufgrund des radialen Potentialdurchgriffs außen stärker ist als entlang der achsennahen Flugbahnen.

Der Optimierungsprozess für das elektromagnetische Design wird unter anderem die Behandlung dieses Transmissionsproblems umfassen.

<sup>3</sup>Das Phänomen der zu frühen Retardierung der Elektronen mit hohen Startwinkeln und gleichzeitig großen Startradien wurde in Simulationen mit insgesamt drei unabhängigen Programmen gefunden. Neben Simion und den in dieser Arbeit beschriebenen neu entwickelten Programmen lieferten auch die von A. Osipowicz mit PartOpt/IGUN durchgeführten Simulationen vergleichbare Ergebnisse [Osi04b].



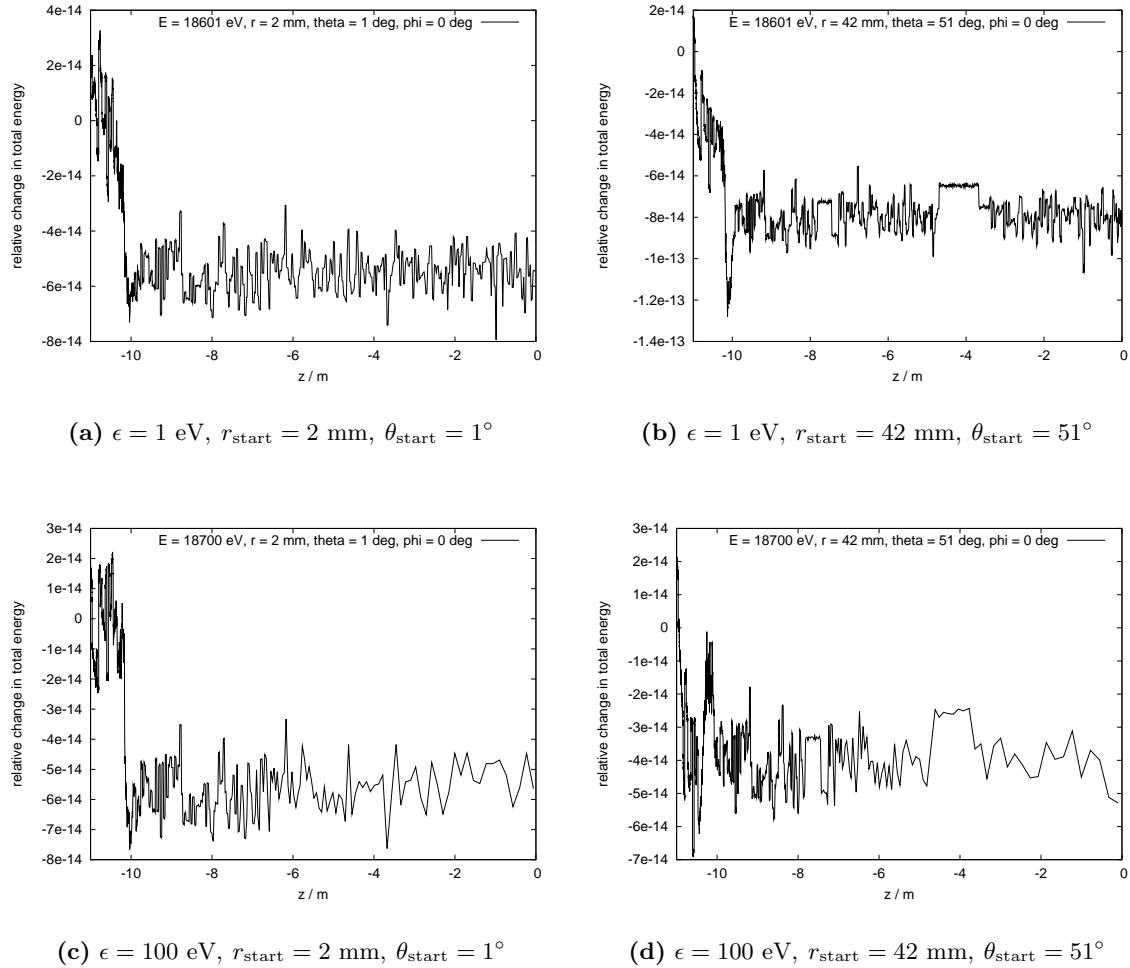
**Abbildung 5.11: Untersuchung zur Transmission achsennaher Elektronen (mit korr. Startenergie).** Errechneter Verlauf von  $E_{\parallel}$  für Elektronen mit identischen Startparametern ( $\epsilon_{\parallel} = 1 \text{ eV}$ ,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ,  $r_{\text{start}} = 3 \text{ mm}$ ,  $\varphi_{\text{start}} = 10^\circ$ ): Simion (rot) bzw. neue Routine (blau). Die Überchlussenergie von 1 eV bleibt im Fall des neuen Programms erhalten, im Fall von Simion *nicht*.



**Abbildung 5.12: Untersuchung zur Transmission achsenferner Elektronen bei hohen Startwinkeln (mit korr. Startenergie).** Auch bei Verwendung der neuen Bahnverfolgungsroutine fällt  $E_{\parallel}$  für Elektronen mit extremen Startbedingungen ( $r_{\text{start}} = 42 \text{ mm}$ ,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ) unter die Grenze von  $\epsilon_{\parallel} = 1 \text{ eV}$  (grüne Kurve: mit Zusatzelektrode, rote Kurve: ohne Zusatzelektrode).

### 5.4.2 Untersuchungen zur numerischen Genauigkeit

In Abschnitt 3.3.3 wurde bereits erwähnt, dass die neue Bahnverfolgungsroutine bestimmte Ausgabewerte zur Kontrolle des numerischen Fehlers vorsieht. Die in Tab. 3.1 auf Seite 46 aufgeführten Parameter  $\text{err1}$  und  $\text{err2}$  beschreiben die relative Abweichung der Gesamtenergie  $E_{\text{total}}$  bzw. des axialen Drehimpulses  $L$  des Elektrons im Verlauf der Bewegung. Da sowohl  $E_{\text{total}}$  als auch  $L$  Erhaltungsgrößen sind, bilden  $\text{err1}$  und  $\text{err2}$  sinnvolle Indikatoren zur Beurteilung der Rechengenauigkeit des Programms.



**Abbildung 5.13: Untersuchung zur numerischen Genauigkeit der neuen Bahnverfolgungsroutine.** Die Graphen zeigen den relativen Energieverletzungsparameter  $\text{err1}$  entlang der Teilchenbahn für verschiedene Startbedingungen. Es wurden in `tracking.c` die Parameter `itype = 8` (→ Runge-Kutta-Verfahren 8. Ordnung) `ntimestep = 80`, `nperiod = 3000` und `nprint = 20` gewählt.

Abbildung 5.13 zeigt die Entwicklung von  $\text{err1} = (E_{\text{total}} - E_{\text{total},0})/E_{\text{total}}$  entlang der simulierten Flugbahn von Elektronen mit verschiedenen Startparametern. Die Gesamtenergie  $E_{\text{total}}$  wird als Summe aus kinetischer und potentieller Energie berechnet:

$$E_{\text{total}} = (\gamma - 1) mc^2 + q\phi, \quad (5.2)$$

wobei  $m$  und  $q$  die Ruhemasse bzw. elektrische Ladung des Teilchens (hier: des Elektrons),

$c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $\gamma$  den relativistischen Lorentzfaktor und  $\phi$  das elektrostatische Potential bezeichnen.

Es wurden zwei Werte der Überschussenergie, nämlich  $\epsilon = 1$  eV und 100 eV, herausgegriffen. Für beide Fälle sind exemplarisch die Kombinationen  $r_{\text{start}} = 2$  mm,  $\theta_{\text{start}} = 1^\circ$  und  $r_{\text{start}} = 42$  mm,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$  gezeigt, welche sich am unteren bzw. oberen Rand des in Abschnitt 5.2 definierten Parameterbereichs befinden. Für alle hier aufgeführten Fälle bleibt der Betrag der relativen Energieabweichung  $|\text{err1}|$  stets von der Größenordnung  $10^{-14}$  bis  $10^{-13}$ , wobei Abweichungen zu positiven und zu negativen Werten möglich sind. Der hierdurch abgeschätzte numerische Fehler ist somit ausreichend klein<sup>4</sup>. Auffallend ist der in den Graphen 5.13 (a) – (c) erkennbare Sprung im relativen Gesamtenergiefehler um die Position  $z \lesssim -10$  m herum. An dieser Stelle durchfliegt das Elektron das Endstück der Erdelektrode. Aufgrund des besonders hohen Feldstärkegradienten findet in diesem Bereich ein abrupter Übergang vom Erdpotential auf ein stark negatives Potential statt.

Es ist wichtig, auf die Beziehung zwischen der erreichbaren numerischen Genauigkeit der Bahnverfolgungsroutine `tracking.c` und den darin eingestellten Parametern hinzuweisen.

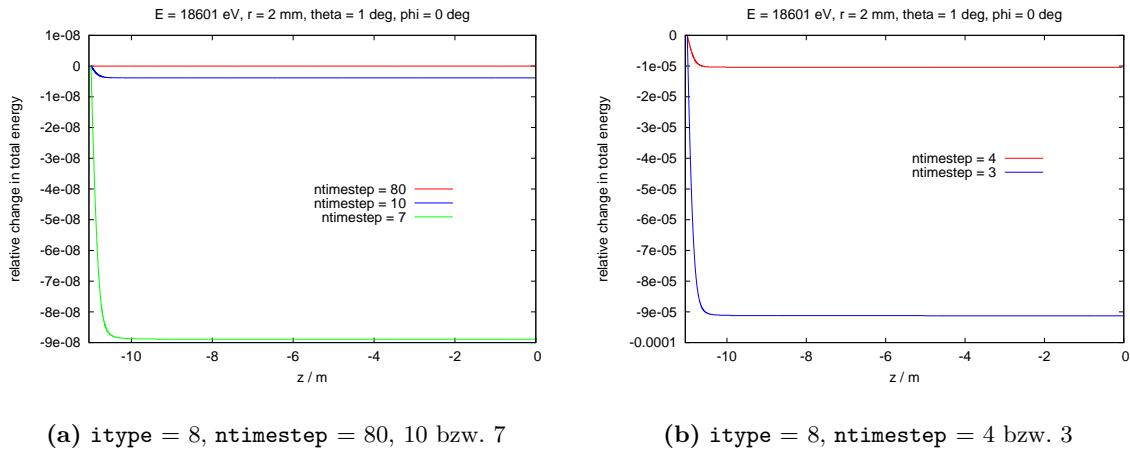
Der Parameter `ntimestep` legt die Anzahl der pro Zyklotronumlauf durchgeführten Rechenschritte fest (siehe Abschn. 3.3.3). Mit höheren Werten von `ntimestep` wächst i.A. die numerische Genauigkeit, gleichzeitig jedoch auch die Rechenzeit. Die Zahl `ntimestep` sollte nicht zu klein gewählt werden, da ansonsten das Runge-Kutta-Verfahren instabil wird: für  $\text{ntimestep} \lesssim 5$  sind Werte von  $|\text{err1}| > 1$  möglich. Für die Bahnverfolgungsberechnungen innerhalb dieser Arbeit wurde stets `ntimestep` = 80 verwendet; mit diesem Wert wurden auch die Graphen in Abb. 5.13 erstellt. Um den Einfluss des Parameters zu verdeutlichen, ist in Abb. 5.14 der Verlauf von `err1` für verschiedene Werte von `ntimestep` aufgetragen.

Tabelle 5.2 enthält eine Auflistung der ermittelten Werte von  $|\text{err1}|$  in der Analysierebene (bei  $z = 0$ ). Dabei werden nicht nur verschiedene Einstellungen von `ntimestep`, sondern auch die beiden von `tracking.c` zur Verfügung gestellten Runge-Kutta-Verfahren getestet. Der vom Benutzer einzustellende Parameter `itype` entscheidet darüber, ob der Algorithmus 4. oder 8. Ordnung verwendet wird (zum Vergleich: Simion benutzt ausschließlich ein Verfahren 4. Ordnung). Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass zum Erreichen der gleichen Rechengenauigkeit in 4. Ordnung ein etwa 10-mal größerer Wert von `ntimestep` (und dementsprechend eine größere Rechenzeit) als beim Verfahren 8. Ordnung erforderlich ist. In der Praxis zeigt sich, dass der intrinsische Unterschied in der Rechenzeit zwischen den Algorithmen `rungekutta8` und `rungekutta4` nicht groß genug ist, um den Unterschied an benötigten Zeitschritten (`ntimestep`) auszugleichen, wenn ein bestimmter vorgegebener Genauigkeitsgrad erreicht werden soll. Die Methode 8. Ordnung eignet sich also wesentlich besser für Bahnverfolgungsberechnungen, welche eine hohe Präzision erfordern<sup>5</sup>. Hierdurch ergibt sich ein weiterer Vorteil des neuen Bahnverfolgungsprogramms gegenüber Simion.

Abbildung 5.15 illustriert, wie sich die Instabilität des Runge-Kutta-Verfahrens bei zu klein gewähltem `ntimestep` auf die Berechnung der Longitudinalenergie des Elektrons auswirkt. Sowohl für achsennahe als auch fürachsenferne Elektronenbahnen ergibt sich eine frühe Reflexion des Elektrons aufgrund einer fehlerhaften Energiekonversion  $E_\perp \rightarrow E_\parallel$ . Diese äußert sich durch extrem große Werte des Adiabasieverletzungsparameters  $\Gamma$  (vgl. Tabelle 3.1). Zum Vergleich ist stets die mit Hilfe der Standardeinstellungen `ntimestep` = 80 und `itype` = 8 erhaltene Kurve (schwarz) abgebildet.

<sup>4</sup>Ähnlich gute Ergebnisse zeigen sich auch bei der Untersuchung des Parameters `err2`. Die Resultate sollen jedoch hier nicht separat diskutiert werden.

<sup>5</sup>Diese Feststellung deckt sich erwartungsgemäß sehr gut mit den allgemeinen Überlegungen zur Genauigkeit von Runge-Kutta-Verfahren unterschiedlicher Ordnung, welche in Anhang B zu finden sind.

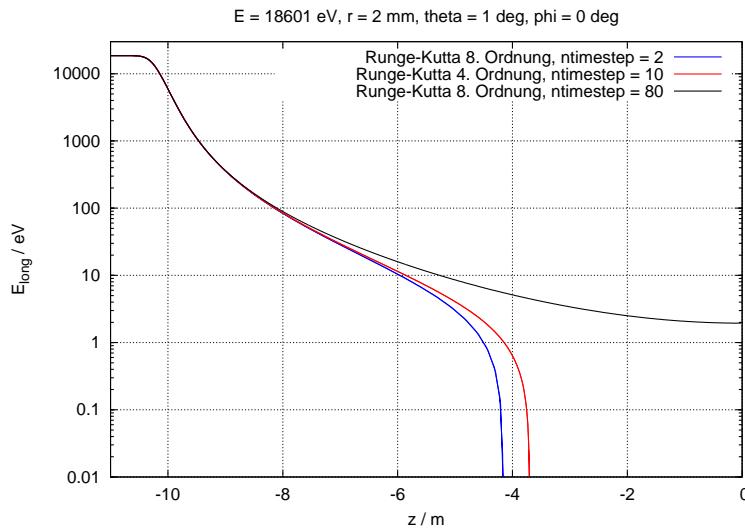
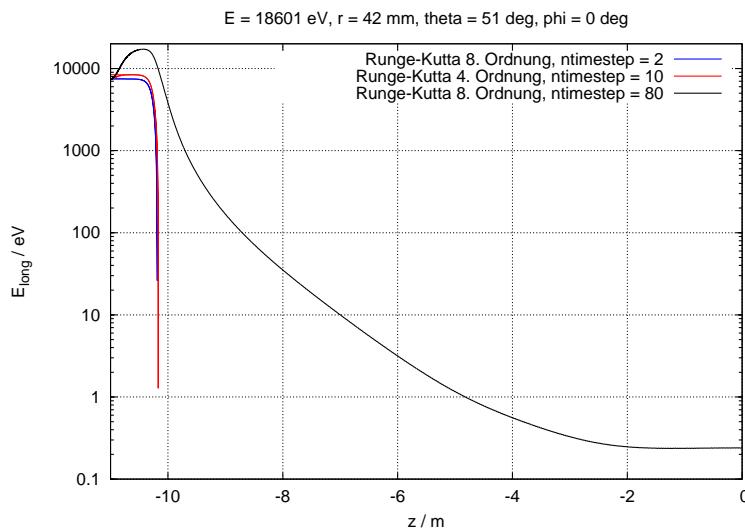


**Abbildung 5.14: Einfluss von `ntimestep` auf die numerische Genauigkeit der Bahnverfolgungsroutine bei `itype` = 8.** Man beachte, dass der Graph für `ntimestep` = 80 in (a) die gleiche Kurve darstellt wie die in Abb. 5.13 (a) einzeln gezeigte. — Für `ntimestep` = 10 stellt sich ein Wert von  $|\text{err1}|$  in der Größenordnung von  $10^{-9}$  ein, während  $|\text{err1}|$  für `ntimestep` = 7 um etwa eine Zehnerpotenz größer ist. Auf dieser Skala sind die Schwankungen des relativen Energiefchers für `ntimestep` = 80 nicht mehr sichtbar. In (b) ergibt sich zwischen `ntimestep` = 4 und `ntimestep` = 3 eine ähnliche Steigerung.

**Tabelle 5.2: Numerische Genauigkeit für Runge-Kutta-Verfahren 4. bzw. 8. Ordnung.** Benutzt man das Verfahren 8. Ordnung, so lässt sich für den numerischen Fehler der Bahnverfolgungsroutine ein Wert im Bereich von `double precision` erreichen (`double` ist ein Fließkomma-Datentyp der Länge 64 bit mit einer Präzision von 15 Nachkommastellen). Die Genauigkeit für den Algorithmus 4. Ordnung ist bei gleichem `ntimestep` deutlich geringer. Die Bemerkung „Fehler“ bedeutet, dass das Elektron vor Erreichen der Analysierebene reflektiert wird, da es all seine kinetische Energie in Vorrwärtsrichtung verloren hat. Diese Reflexion hat keine physikalische Ursache, sondern wird allein durch die Summation numerische Fehler hervorgerufen.

<code>ntimestep</code>	<code>itype</code> = 8 (Runge-Kutta 8. O.)		<code>itype</code> = 4 (Runge-Kutta 4. O.)	
	$ \text{err1} $ ( $z = 0$ )	Bemerkung	$ \text{err1} $ ( $z = 0$ )	Bemerkung
160	$2 \cdot 10^{-15}$		$6 \cdot 10^{-10}$	
80	$5 \cdot 10^{-14}$		$2 \cdot 10^{-8}$	
15	$1 \cdot 10^{-10}$		$7 \cdot 10^{-5}$	
10	$3 \cdot 10^{-9}$		$\approx 10^{-4}$	Fehler
7	$9 \cdot 10^{-8}$		$\approx 10^{-4}$	Fehler
4	$1 \cdot 10^{-5}$		$\approx 10^{-4}$	Fehler
3	$9 \cdot 10^{-5}$		$\approx 10^{-4}$	Fehler
2	$\approx 10^{-4}$	Fehler	$\approx 0.7$	Fehler
1	$\approx 1$	Fehler	$\approx 1$	Fehler

Entscheidend dafür, dass bei genügend großen Werten von `ntimestep` für die Bahnverfolgung sehr kleine numerische Fehler im Bereich von  $10^{-15}$  erreicht werden können, ist die hohe Genauigkeit der verwendeten Feldberechnungsroutinen (vgl. Anmerkung auf S. 42f).

(a)  $\epsilon = 1 \text{ eV}, r_{\text{start}} = 2 \text{ mm}, \theta_{\text{start}} = 1^\circ$ (b)  $\epsilon = 1 \text{ eV}, r_{\text{start}} = 42 \text{ mm}, \theta_{\text{start}} = 51^\circ$ 

**Abbildung 5.15: Einfluss numerischer Fehler auf die Berechnung der Longitudinalenergie.** Für  $r_{\text{start}} = 2 \text{ mm}, \theta_{\text{start}} = 1^\circ$  (a) und  $r_{\text{start}} = 42 \text{ mm}, \theta_{\text{start}} = 51^\circ$  (b) ist der berechnete Longitudinalenergieverlauf für verschiedene Werte von `itype` und `ntimestep` dargestellt. Die schwarze Kurve zeigt die in dieser Arbeit standardmäßig verwendete Einstellung von `ntimestep` = 80, `itype` = 8. Die anderen beiden Kurven sind Beispiele für ein instabiles Verhalten des Runge-Kutta-Algorithmus bei zu klein gewähltem `ntimestep`. — Die starken Verluste an Longitudinalenergie hängen mit einer fehlerhaften adiabatischen Energietransformation zusammen. In (b) ist deutlich zu sehen, dass die Konversion von  $E_{\perp}$  nach  $E_{\parallel}$  im Bereich des stark abfallenden Magnetfeldes am Beginn der Flugbahn für die beiden Kurven mit zu kleinem `ntimestep` nicht in gleichem Maße stattfindet wie bei der Referenzkurve mit `ntimestep` = 80 und `itype` = 8.

## Kapitel 6

# Studien zur Optimierung des Hauptspektrometerdesigns

Die im vorangegangenen Kapitel 5 beschriebenen Untersuchungen haben gezeigt, dass die ursprüngliche Feldkonfiguration des Hauptspektrometers einige Probleme aufweist.

- In Abschnitt 5.1 hat sich herausgestellt, dass die *Homogenität* des Retardierungspotentials und des Magnetfeldes in der Analysierebene mit

$$\begin{aligned}\Delta U_{\text{analys}} &= 0.53 \text{ V} > 0.5 \text{ V} \\ \frac{\Delta B_{\text{analys}}}{B_{\text{analys}}} &= 28 \% > 20 \%\end{aligned}$$

den in Kapitel 4 aufgestellten Anforderungen nicht entspricht.

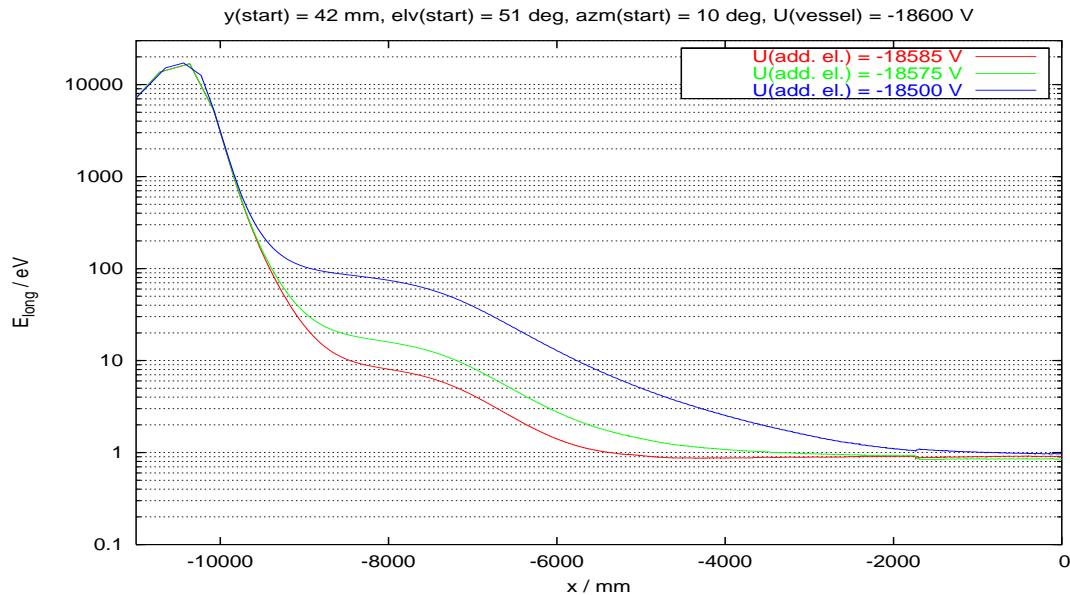
- Das bereits in Abschnitt 5.2 bei den Simulationen mit Simion aufgetretene Problem der *zu frühen Retardierung* bei Elektronen mit gleichzeitig hohen Startradien und großen Startwinkeln hat sich auch in der Überprüfung mittels der neuen C-Programme in Abschnitt 5.4 bestätigt.

Im vorliegenden Kapitel werden schrittweise Modifikationen der Feldkonfiguration beschrieben, welche mit dem Ziel der Optimierung des elektromagnetischen Designs für das Hauptspektrometer durchgeführt wurden. Die Maßnahmen, welche im Rahmen dieser Studien erprobt wurden, reichen von kleineren Veränderungen der Konfiguration der trichterförmigen Zusatzelektrode (Abschnitte 6.1 und 6.2) über Modifikationen der Spektrometertankform (Abschnitt 6.3) bis hin zu einer Verlängerung des gesamten Spektrometers um zwei Meter (Abschnitt 6.4). Diese letztgenannte Maßnahme beeinflusst neben dem elektrostatischen auch das magnetische Design, da hiermit Änderungen der Magnetkonfiguration verbunden sind (z.B. modifizierte Magnetabstände), so dass sich die Möglichkeit ergibt, auf diesem Wege Einfluss auf die bislang unzureichende Magnetfeldhomogenität zu nehmen.

In Kapitel 7 wird mit der Drahtelektrode eine zusätzliche Komponente des Hauptspektrometerdesigns vorgestellt. Das Ziel der hier beschriebenen Studien war es jedoch, zunächst ein Design vorzulegen, welches auch ohne die Drahtelektrode funktioniert. Der Einbau der Drahtelektrode wird dann an der Funktionsweise des Spektrometers nichts ändern, falls sie das homogene Wandpotential der massiven Tankelektrode nachbildet.

## 6.1 Änderung der Hochspannung an der Zusatzelektrode

Um die zuvor beschriebenen Probleme bei der Transmission von Elektronen unter extremen Startbedingungen näher zu untersuchen und wenn möglich zu beseitigen, wurden (noch mit Simion) Tests mit unterschiedlichen Potentialbelegungen der Zusatzelektrode durchgeführt. Wie Abbildung 6.1 zeigt, hat die an der Zusatzelektrode anliegende Hochspannung einen starken Einfluss auf den Verlauf der Longitudinalenergie entlang der weit außen verlaufenden Teilchenbahnen. Bei einer festen Spannung von  $U_{\text{vessel}} = -18600$  V an der Tankelektrode verbessern sich offenbar die Transmissionseigenschaften des Spektrometers für wachsenden Potentialunterschied zwischen Tank- und Zusatzelektrode. Allerdings erweist sich die Änderung des Potentials  $U_{\text{add. electrode}}$  nur innerhalb sehr enger Grenzen als geeignete Methode zur Steuerung der Transmission der Außenelektronen, da gleichzeitig der Potentialdurchgriff in der Analysierebene sehr sensitiv auf die Differenz  $U_{\text{vessel}} - U_{\text{add. electrode}}$  reagiert. Diese Abhängigkeit wird in Tabelle 6.1 angegeben. Eine volle Transmission der Elektronen mit  $r_{\text{start}} = 42$  mm und  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$  ist demnach nur in Verbindung mit einer inakzeptabel hohen Inhomogenität des elektrischen Potentials von  $\Delta U_{\text{analys}} > 2$  V zu erreichen.



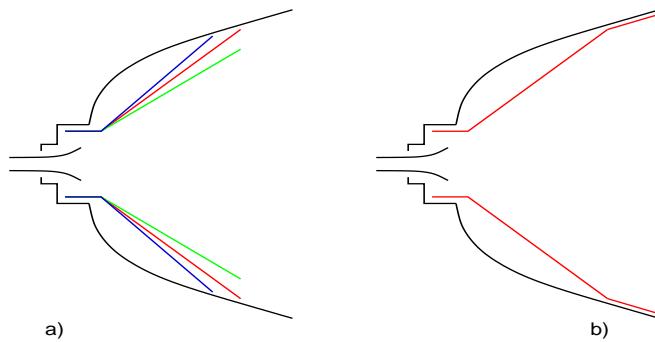
**Abbildung 6.1: Vergleich des Longitudinalenergieverlaufs für verschiedene Potentialbelegungen der Zusatzelektrode (mit korrigierter Startenergie).** Es wurden stets gleiche Startparameter verwendet ( $\epsilon_{\parallel} = 1$  eV,  $r_{\text{start}} = 42$  mm,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ). Rote Kurve: übliche Belegung  $U_{\text{add. electr.}} = U_{\text{vessel}} + 15$  V; grüne und blaue Kurve: Potentialunterschied 25 V bzw. 100 V.

**Tabelle 6.1: Abhängigkeit des radialen Potentialdurchgriffs in der Analysierebene von der Potentialdifferenz zwischen Zusatz- und Tankelektrode.**

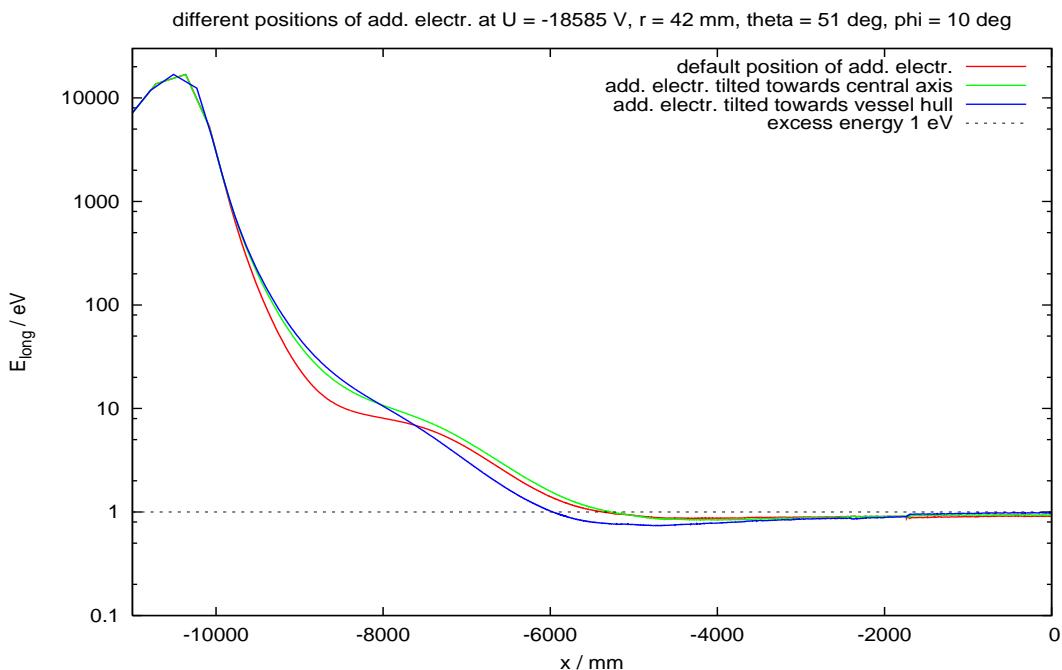
$U_{\text{vessel}} / \text{V}$	$U_{\text{add. el.}} / \text{V}$	$(U_{\text{vessel}} - U_{\text{add. el.}}) / \text{V}$	$\Delta U_{\text{analys}} / \text{V}$
-18600	-18585	-15	0.53
-18600	-18575	-25	0.75
-18600	-18500	-100	2.35

## 6.2 Änderung der Geometrie der Zusatzelektrode

In einem weiteren Schritt wurden (ebenfalls noch mit Simion) verschiedene Konfigurationen der trichterförmigen Zusatzelektrode getestet. Die in Abb. 6.2 a) gezeigten Positionen der Elektrode mit unterschiedlichen Neigungswinkeln relativ zur Spektrometerachse führten jedoch zu keiner deutlichen Verbesserung der Transmission für Außen elektronen (siehe Abb. 6.3). Auch die in Abb. 6.2 b) dargestellte verlängerte Form der Elektrode brachte keine positiven Auswirkungen auf die Transmissionseigenschaften. Statt dessen war die Änderung des Elektrodendesigns mit einer Zunahme des Potentialdurchgriffs auf  $\Delta U_{\text{analys}} = 0.97$  V bei  $U_{\text{add. electrode}} = -18585$  V verbunden.



**Abbildung 6.2: Skizze verschiedener Positionen der Zusatzelektrode.** Bei gleicher Potentialbelegung wurde der Einfluss a) der Anordnung und b) Form der Elektrode untersucht.



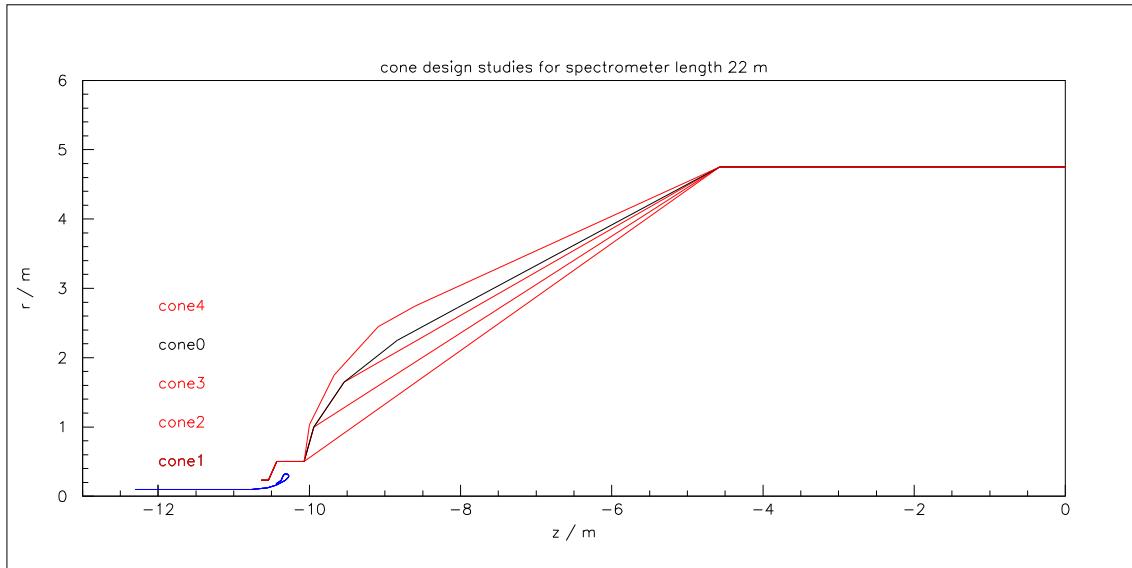
**Abbildung 6.3: Vergleich des Longitudinalenergieverlaufs für verschiedene Geometrien der Zusatzelektrode (mit korrigierter Startenergie).** Gezeigt sind die drei Anordnungsvarianten aus der Skizze in Abb. 6.2 a) für ein Elektron mit Startradius  $r_{\text{start}} = 4.2$  cm und Startwinkel  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ . Das Transmissionsproblem wird durch Variation der Zusatzelektrodenposition bei stets gleicher Potentialbelegung  $U_{\text{add. electrode}} = -18585$  V nicht behoben.

## 6.3 Modifikation der Form des Spektrometertanks

Wie die Betrachtungen in den vorherigen Abschnitten gezeigt haben, bieten die Eigenschaften der Zusatzelektrode (wie Position und Potentialbelegung) einen Angriffspunkt zur Abstimmung des elektrostatischen Designs im Hinblick auf bessere Transmissionseigenschaften des Spektrometers. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass die auf diesem Weg erreichte Minderung des Problems der zu frühen Retardierung im Allgemeinen mit einer Verschlechterung der Feldhomogenität in der Analysierebene einhergeht. Aus diesem Grund sollten zusätzlich weitere Maßnahmen wie Änderungen der Form der Tankelektrode in Erwägung gezogen werden.

### 6.3.1 Untersuchungen zu Transmission und Feldhomogenität

Um die Auswirkungen der Tankform auf die Spektrometereigenschaften prüfen zu können, wurde die trichterförmige Zusatzelektrode zunächst entfernt. Anschließend wurde eine Reihe von Simulationen für unterschiedlich geformte Spektrometer durchgeführt, wobei der zylindrische Mittelteil in seiner ursprünglichen Gestalt belassen und nur der konische Teil modifiziert wurde. Diese schrittweisen Veränderungen der Konusform sind in Abb. 6.4 aufgeführt.



**Abbildung 6.4: Getestete Modifikationen des konischen Spektrometertankteils.** Das bisherige Standarddesign des 22-m-Spektrometers ist als schwarze Kontur eingezeichnet (cone0). Beginnend mit dem am engsten geschnittenen Konus (cone1) sind die getesteten Konfigurationen aufsteigend nach ihrem Innendurchmesser nummeriert. Die Variante cone4 weist gegenüber der Standardkonfiguration einen deutlich vergrößerten Durchmesser am Übergang zwischen Konusteil und „Endkappe“ auf.

Auch wenn einige dieser Varianten von vornherein als nicht realistisch einzustufen sind, da etwa die engen Konusformen eine zu starke anfängliche Retardierung der Elektronen und damit meist eine frühe Reflexion bewirken, wurden diese trotzdem mit in die Studien aufgenommen, um systematisch die Unterschiede beim graduellen Erweitern des Konus zu untersuchen. Einige Resultate dieser Studien sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst.

Die Abbildungen 6.5 und 6.6 zeigen einen Vergleich des Longitudinalenergieverlaufs der Elektronen auf den Außenbahnen für verschiedene Konusformen, aufgeschlüsselt nach den Start-

**Tabelle 6.2: Ergebnisse der Konusmodifikationen beim 22-m-Spektrometer.** Die Bedeutung des Parameters  $\delta E_{\parallel}$  wird in Gleichung (6.1) erläutert.

Entwurf	$\Delta U_{\text{analys}} / \text{V}$	Transmission von Außenelektronen	$\delta E_{\parallel} / \text{meV}$
cone1	0.16	zu frühe Retardierung schon kurz nach Verlassen des Erdpotentials	—
cone2	0.45	zu frühe Retardierung schon kurz nach Verlassen des Erdpotentials	—
cone3	0.62	zu frühe Retardierung bei $r_{\text{start}} \geq 40 \text{ mm}$	$\leq 30$
cone0	0.69	zu frühe Retardierung bei $r_{\text{start}} \geq 40 \text{ mm}$	$\leq 20$
cone4	0.95	geringfügige zu frühe Retardierung bei $r_{\text{start}} \geq 42 \text{ mm}$	3

radien 38 mm, 40 mm und 42 mm. Berücksichtigt wurden hierbei nur die drei – bezüglich der Transmissionseigenschaften – realistischeren Versionen: **cone0** (ursprüngliche Spektrometerform), **cone3** (leicht verschmälerte Version) und **cone4** (verbreiterte Version).

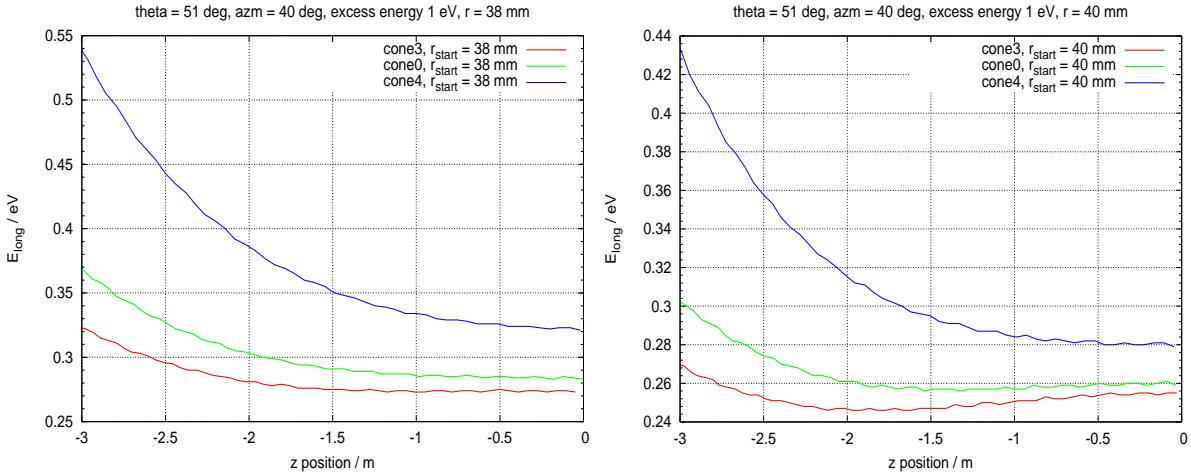
Der in Tab. 6.2 angegebene Parameter  $\delta E_{\parallel}$  stellt ein Maß für die Abweichung des Longitudinalenergieverlaufs von der erwünschten monoton abfallenden Form dar. Er gibt die Differenz zwischen der Longitudinalenergie  $E_{\parallel}^{\text{analys}}$  in der Analysierebene und dem minimalen entlang der Trajektorie auftretenden Wert  $E_{\parallel}^{\text{min}}$  an:

$$\delta E_{\parallel} = E_{\parallel}^{\text{analys}} - E_{\parallel}^{\text{min}}. \quad (6.1)$$

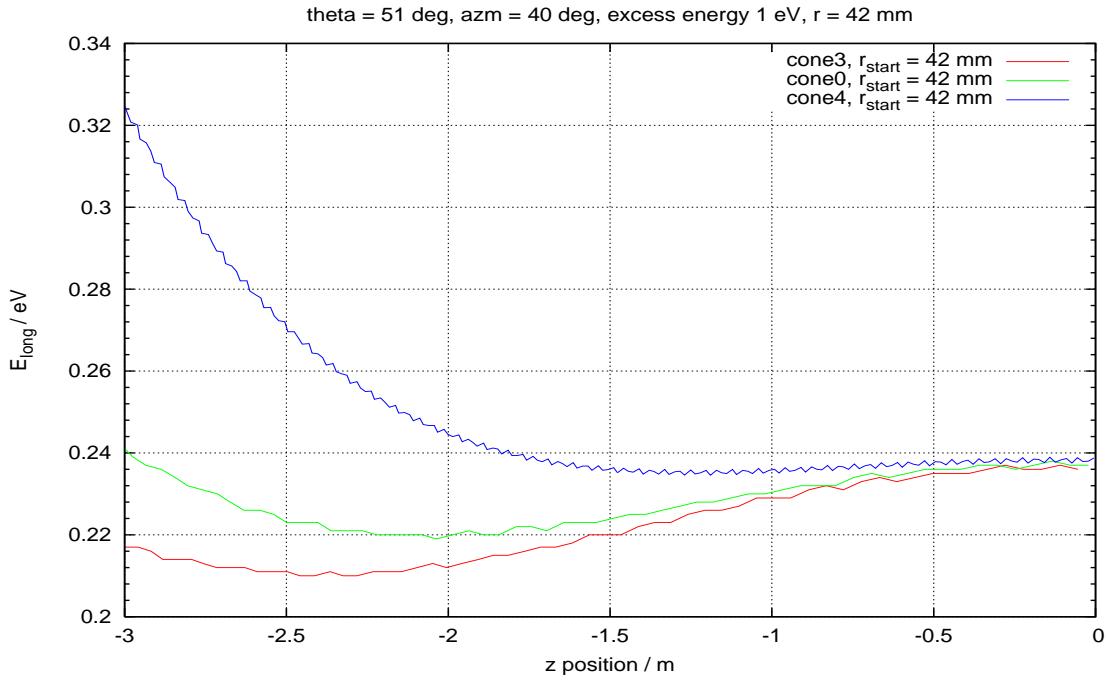
Die Angabe dieses Parameters ist auch dann sinnvoll, wenn bei der Simulation der Elektronenbahn keine Startenergiekorrektur nach der in Anhang C angegebenen Formel vorgenommen wurde. Die Korrektur der Startenergie bewirkt lediglich eine konstante Verschiebung des gesamten Longitudinalenergieverlaufs zu höheren Werten von  $E_{\parallel}$  hin. Wird sie nicht angewendet, kann  $E_{\parallel}$  zwar unter den vorgegebenen Wert der Überschussenergie sinken, es verändert sich jedoch nichts an der Tatsache, dass bei korrekter Transmission ein monotoner Abfall der Energie erwartet wird. Im Idealfall sollte also das Minimum von  $E_{\parallel}$  gerade in der Analysierebene liegen, so dass  $\delta E_{\parallel} = 0$  gilt. Diese Bedingung wird allerdings, zumindest für die ganz außen verlaufenden Elektronenbahnen mit einem Startradius von  $r_{\text{start}} = 42 \text{ mm}$ , von keiner der getesteten Konfigurationen exakt erfüllt. Die Variante **cone4** zeigt jedoch in dieser Hinsicht ein bedeutend besseres Verhalten als die übrigen (siehe Abb. 6.6).

Auch hier bestätigt sich wieder die Beobachtung, dass verbesserte Transmissionseigenschaften mit einer Verringerung der Homogenität des Retardierungspotentials in der Analysierebene einhergehen (vgl. Abb. 6.7 (a)). Es handelt sich dabei um einen prinzipiellen Zusammenhang, welcher sich folgendermaßen erklären lässt: Ein größerer Durchgriff  $\Delta U_{\text{analys}}$  in der Analysierebene bedeutet, dass die Elektronen ein stärker vom Tankpotential abweichendes, weniger negatives Retardierungspotential sehen. Dadurch werden sie auf dem Weg zur Analysierebene weniger stark abgebremst und behalten eine etwas höhere Longitudinalenergie bei, als dies bei verschwindendem Potentialdurchgriff der Fall wäre.

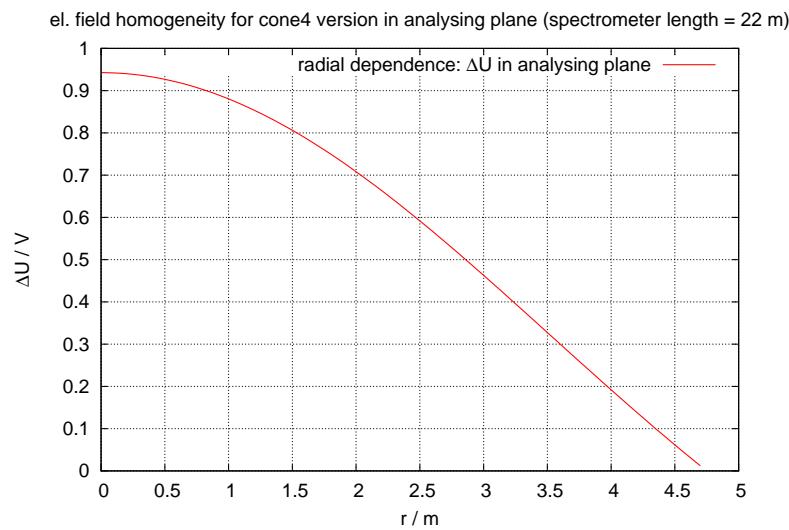
Da an der Magnetkonfiguration gegenüber dem bereits beschriebenen Status bis hierher keine Veränderungen vorgenommen wurden, werden an dieser Stelle keine gesonderten Betrachtungen zur Homogenität des Magnetfeldes in der Analysierebene aufgeführt. Der mit Hilfe der neuen C-Programme gewonnene Graph in Abb. 6.7 (b) zeigt im Wesentlichen den gleichen Verlauf wie die mit Bfield\_3d erstellte Kurve in Abb. 5.4.



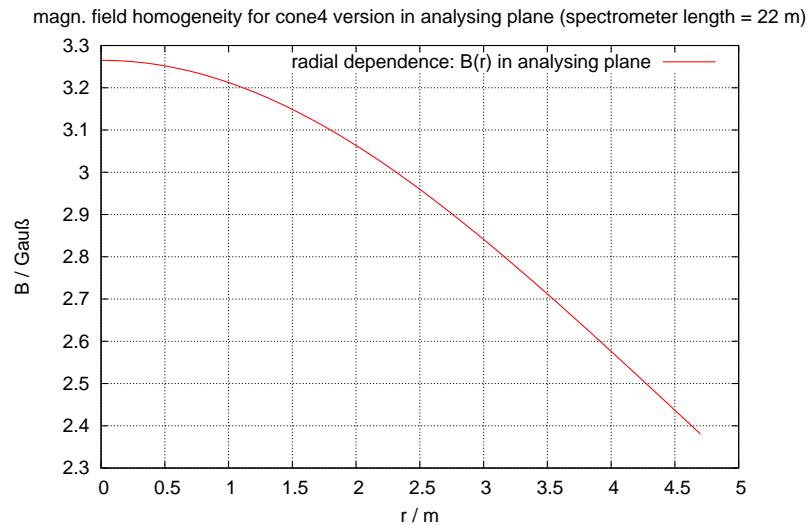
**Abbildung 6.5: Longitudinalenergieverlauf für verschiedene Konen bei 38 mm und 40 mm Startradius (ohne Startenergiekorrektur).** Gezeigt ist ein 3 m vor der Analysierebene beginnender Bahnausschnitt. Für  $r_{\text{start}} = 38 \text{ mm}$  fällt  $E_{\parallel}$  für alle drei Konen monoton ab (links), für  $r_{\text{start}} = 40 \text{ mm}$  zeigen sich jedoch bei cone3 und cone0 Anzeichen zu früher Retardierung (rechts).



**Abbildung 6.6: Longitudinalenergieverlauf für verschiedene Konen bei 42 mm Startradius (ohne Startenergiekorrektur).** Auch hier sind die letzten 3 m vor Erreichen der Analysierebene dargestellt. Bei cone3 und cone0 ergibt sich eine deutliche Abweichung vom idealen Verlauf mit  $\delta E_{\parallel}$  bis zu 30 meV. Das Minimum von  $E_{\parallel}$  liegt ca. 2.3 – 2.4 m vor der Analysierebene. Bei cone4 sind hingegen nur geringfügige Abweichungen vom erwünschten Verhalten von  $E_{\parallel}$  zu erkennen ( $\delta E_{\parallel} \approx 3 \text{ meV}$ ).



(a) radialer Verlauf des Potentialdurchgriffs



(b) radialer Magnetfeldverlauf

**Abbildung 6.7: Homogenität der Felder in der Analysierebene für das 22-m-Spektrometer.** Bild (a) zeigt die Differenz  $\Delta U(r) = U_{\text{analys}}(r) - U_{\text{vessel}}$  in Abhängigkeit von  $r$ , während (b) den radialen Verlauf von  $B_{\text{analys}}$  darstellt. Ohne zusätzliche feldformende Elektrode beträgt der Potentialdurchgriff im Zentrum der Analysierebene für cone4  $\Delta U_{\text{analys}} = 0.95$  V. Der Grad der Magnetfeldinhomogenität liegt aufgrund der unveränderten Konfiguration weiter bei etwa 28 % (vgl. Abb. 5.4).

### 6.3.2 Untersuchungen zur Adiabasie

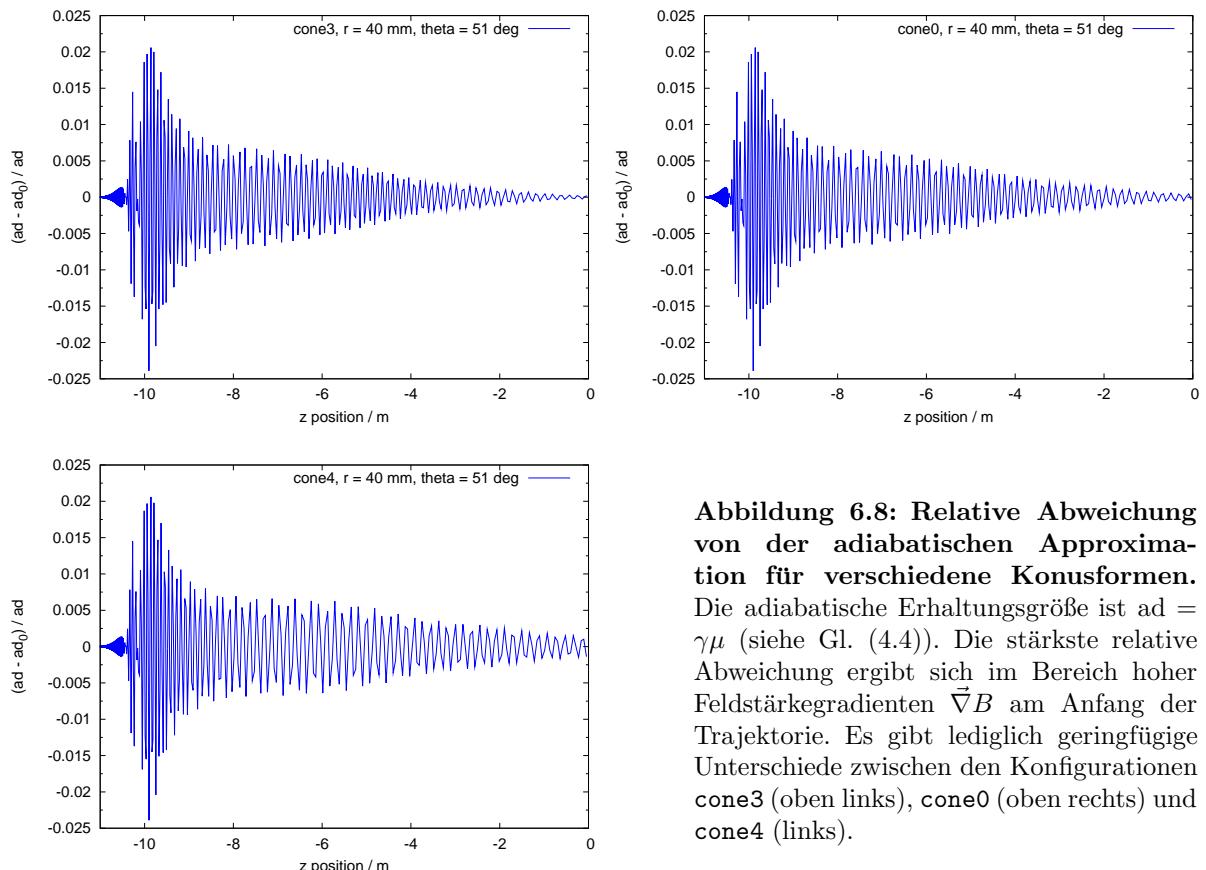
Bisher wurden die Studien zu den Adiabasieeigenschaften des Hauptspektrometers noch nicht ausführlich behandelt. In diesem Abschnitt soll ein Überblick über die Untersuchungen zu diesem Thema gegeben werden.

#### Adiabasieverhalten für verschiedene Konusformen

Abbildung 6.8 stellt die relative Abweichung vom adiabatischen Verhalten für die Konusversionen `cone3`, `cone0` und `cone4` exemplarisch für den Fall eines bei  $r_{\text{start}} = 40$  mm,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ,  $\varphi_{\text{start}} = 0^\circ$ ,  $\epsilon = 1$  eV gestarteten Elektrons dar. In jedem Punkt der Teilchenbahn wird der Quotient

$$\frac{(\gamma\mu) - (\gamma\mu)_0}{\gamma\mu} = 1 - \frac{(\gamma\mu)_0}{\gamma\mu} \quad (6.2)$$

gebildet, wobei die adiabatische Invariante aus Gl. (4.4) verwendet wird und  $(\gamma\mu)_0$  deren Wert am Startort des Elektrons bezeichnet. Wie man der Abbildung entnehmen kann, bleibt die relative Abweichung in der Analysierebene stets deutlich kleiner als 5 %. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Konusgeometrien sind gering; für `cone4` lässt sich nahe der Spektrometermitte eine leichte Erhöhung der Abweichung gegenüber den anderen beiden Varianten erkennen. Dies zeigt, dass im Fall der Außenelektronen eine Modifikation der Tankform in der zuvor beschriebenen Art das Adiabasieverhalten nicht wesentlich negativ beeinflusst.



**Abbildung 6.8: Relative Abweichung von der adiabatischen Approximation für verschiedene Konusformen.** Die adiabatische Erhaltungsgröße ist  $\text{ad} = \gamma\mu$  (siehe Gl. (4.4)). Die stärkste relative Abweichung ergibt sich im Bereich hoher Feldstärkegradienten  $\vec{\nabla}B$  am Anfang der Trajektorie. Es gibt lediglich geringfügige Unterschiede zwischen den Konfigurationen `cone3` (oben links), `cone0` (oben rechts) und `cone4` (links).

### Adiabasieverhalten für verschiedene Startenergien

Während Abb. 6.8 nur einen einzelnen Satz von Startparametern herausgreift, wurden umfangreiche Studien zur Überprüfung der Adiabasie mit vielen verschiedenen Startwertkombinationen von  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  und  $\epsilon$  durchgeführt. Aus Platzgründen kann hier nur eine kleine Auswahl dieser Simulationen vorgestellt werden. Um das Ausmaß der Adiabasieverletzung in Energieeinheiten einschätzen zu können, führt man anstelle der relativen Abweichung in Gl. (6.2) den Parameter

$$\begin{aligned}\Delta E_{\perp} &= \frac{p_{\perp}^2}{2m} - \frac{(p_{\perp}^2)_0}{2m} \cdot \frac{B}{B_0} \\ &= \frac{p_{\perp}^2}{2mB} \cdot B - \frac{(p_{\perp}^2)_0}{2mB_0} \cdot B \\ &= [\gamma\mu - (\gamma\mu)_0] \cdot B\end{aligned}\quad (6.3)$$

ein. Darin bezeichnen die Größen ohne Index jeweils die momentanen Werte entlang der Bahn, der Index 0 steht für den jeweiligen Wert am Startort.

Wie Abbildung 6.9 zeigt, weicht  $\Delta E_{\perp}$  bei wachsender Überschussenergie  $\epsilon$  gegenüber der Filterenergie nahe der Analysierebene stärker vom idealen Wert null ab. Dieser Effekt ist dadurch zu erklären, dass das Elektron bei höherer Energie eine größere Geschwindigkeit  $v_{\parallel}$  in Vorwärtsrichtung aufweist. Die Zyklotronschrittlänge  $l_{\text{cyc}}$  ist nach

$$l_{\text{cyc}} = 2\pi \frac{v_{\parallel}}{\omega_{\text{cyc}}} = 2\pi v_{\parallel} \frac{m}{|q|B} \quad (6.4)$$

direkt proportional zur Longitudinalkomponente der Geschwindigkeit, so dass sich bei gegebenem Magnetfeldgradienten im Fall hoher Energie eine stärkere relative Änderung  $\Delta B/B$  pro Zyklotronschritt ergibt. Die in Abschnitt 2.2.1 formulierte Adiabasiebedingung ist damit für hohe Überschussenergien offenbar weniger gut erfüllt als für niedrigere Überschussenergien.

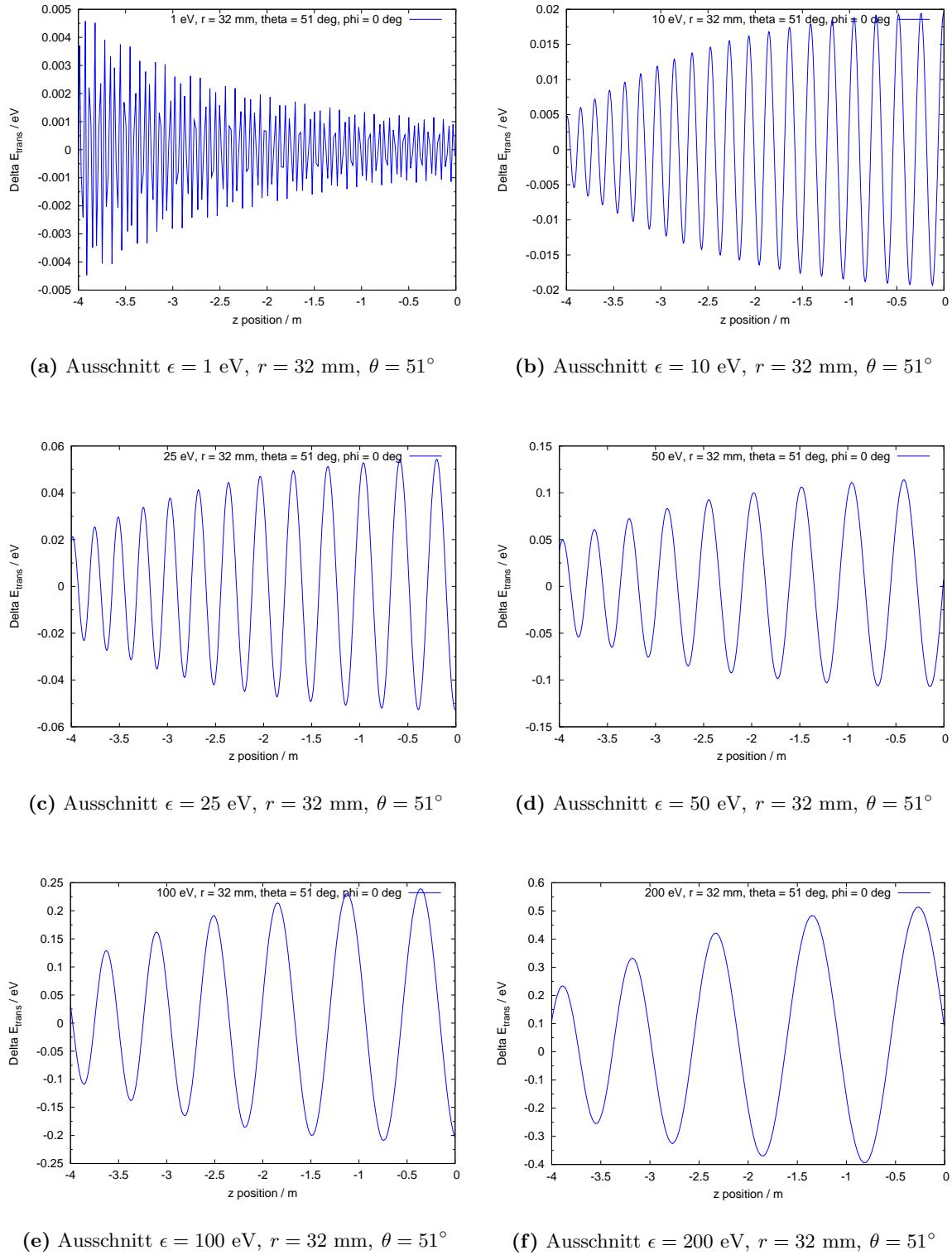
Tabelle 6.3 gibt eine Übersicht der aus Abb. 6.9 entnommenen Werte bei  $z = 0$  m (d.h. in der Analysierebene).

**Tabelle 6.3: Adiabasieverhalten in Abhängigkeit der Überschussenergie  $\epsilon$ .**

$\epsilon$ / eV	1	10	25	50	100	200
$\Delta E_{\perp}$ / eV	$\pm 1 \cdot 10^{-3}$	$\pm 2 \cdot 10^{-2}$	$\pm 5.5 \cdot 10^{-2}$	$\pm 0.12$	$\pm 0.23$	$\pm 0.5$

Außer der Überschussenergie  $\epsilon$  wurden bei dieser Untersuchung alle Startparameter unverändert gelassen ( $r_{\text{start}} = 32$  mm,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ,  $\varphi_{\text{start}} = 0^\circ$ ).

Der Adiabasieabweichungsparameter  $\Delta E_{\perp}$  ist für eine geringe Überschussenergie von  $\epsilon = 1$  eV mit  $\Delta E_{\perp} = \pm 1 \cdot 10^{-3}$  eV in der Analysierebene ausreichend klein, um die Transmission des Elektrons bei diesen Startbedingungen nicht signifikant zu stören. Dass die Adiabasieabweichung bei hohen Überschussenergien von  $\epsilon = 200$  eV auf bis zu  $\Delta E_{\perp} = \pm 0.5$  eV ansteigt, ist ebenfalls nicht weiter störend, da solche Elektronen in jedem Fall transmittiert werden sollten.



**Abbildung 6.9: Adiabasieverhalten in Abhängigkeit der Startenergie.** Gezeigt ist jeweils ein Bahnausschnitt 4 m vor Erreichen der Analysierebene ( $z = 0$  m). Mit steigender Energie treten aufgrund der größeren Zyklotronschrittänge auch stärkere Verletzungen der Adiabasie auf. Bei  $\epsilon = 200$  eV steigt der Adiabasieabweichungsparameter bei den gegebenen Startbedingungen in der Analysierebene bis auf  $\Delta E_\perp \approx \pm 0.5$  eV.

### Adiabasieverhalten für verschiedene Startradien und -winkel

Auch die radiale Startposition und der Winkel der Elektronenbahn zur Magnetfeldlinie haben Auswirkungen auf den Grad der Einhaltung der adiabatischen Bewegung. In Abbildung 6.10 ist  $\Delta E_{\perp}$  für variierende Startradien bei ansonsten gleichen Startparametern gegen die  $z$ -Koordinate aufgetragen. Die linke Spalte (Teilabbildungen (a), (c) und (e)) zeigt den Gesamtverlauf des Adiabasieverletzungsparameters vom Startpunkt im Zentrum des Eingangsmagneten bis zur Analysierebene, während in der rechten Spalte (Teilabbildungen (b), (d) und (f)) jeweils die letzten 4 m vor Erreichen der Analysierebene vergrößert dargestellt sind.

Beim Vergleich der Grafiken in Abb. 6.10 fallen verschiedene Dinge auf:

- 1) Der qualitative Verlauf von  $\Delta E_{\perp}$  in Abhängigkeit der  $z$ -Position ist in allen drei gezeigten Fällen ähnlich.
- 2) Die maximale Abweichung vom adiabatischen Verhalten tritt erwartungsgemäß stets am Beginn der Teilchenbahn auf, wo das Elektron einen Bereich hoher Feldstärkegradienten durchläuft. Der maximal erreichte Wert kann zwischen einigen 100 meV (bei kleinen Startradien) und einigen eV (bei größeren Startradien) betragen.
- 3) Zur Analysierebene hin fällt  $\Delta E_{\perp}$  rasch ab. In den vergrößerten Ausschnitten erkennt man, dass  $\Delta E_{\perp}$  auch an der Stelle  $z = 0$  m für große Startradien höher ist als für kleine. Bei  $r_{\text{start}} = 2$  mm ergibt sich  $\Delta E_{\perp}(z = 0 \text{ m}) \approx \pm 6 \cdot 10^{-5}$  eV, während man bei  $r_{\text{start}} = 42$  mm einen Wert von  $\Delta E_{\perp}(z = 0 \text{ m}) \approx \pm 1 \cdot 10^{-3}$  eV findet, bei ansonsten gleichen Startparametern  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ,  $\varphi_{\text{start}} = 40^\circ$ ,  $\epsilon = 1$  eV.

Das in dieser Studie gefundene Verhalten der Adiabasieabweichung bei unterschiedlichen Radien lässt sich durch eine Betrachtung der Krümmung der Magnetfeldlinien erklären. Hierzu sei auf die in Abb. 5.10 in der  $z$ - $r$ -Projektion gezeigten Elektronenbahnen verwiesen. Da sich die simulierten Elektronen auf ihrem Weg durch das Spektrometer entlang der Magnetfeldlinien bewegen, lässt sich der Verlauf der Feldlinien anhand dieser Trajektorien verfolgen. Man erkennt leicht, dass je nach Startradius eine unterschiedlich starke Krümmung der Feldlinien vorliegt<sup>1</sup>. Während die inneren Feldlinien nahezu geradlinig verlaufen, bildet sich zu den äußeren Bahnen hin eine deutliche Krümmung aus.

Bisher wurde als Kriterium zur Einhaltung der adiabatischen Energiekonversion stets die Bedingung  $|\nabla B/B| \ll 1$  innerhalb einer Zyklotronschrittlänge herangezogen, wobei sich  $\nabla B = \nabla_{\perp} B + \nabla_{\parallel} B$  in eine Komponente senkrecht bzw. parallel zur Magnetfeldlinie zerlegen lässt. Geht man davon aus, dass lediglich der senkrechte Anteil zu einer möglichen Verletzung der Adiabasiebedingung führt, so kann man anhand einer einfachen Rechnung [Kat03b] zeigen, dass das Integral

$$\delta = \int \frac{|\nabla_{\perp} B(l)|}{B(l)} l_{\text{cyc}} \, dl \approx C(v_{\parallel}) \cdot \int \frac{|\nabla_{\perp} B(l)|}{B^2(l)} \, dl \quad (6.5)$$

$$= C(v_{\parallel}) \cdot \int \frac{dl}{|R(l)| \cdot |B(l)|} \quad (6.6)$$

ebenfalls ein Maß zur Einschätzung der Adiabasieverletzung bietet. Darin bezeichnet  $l$  die Strecke entlang der Flugbahn des Teilchens,  $v_{\parallel}$  den Betrag der Longitudinalgeschwindigkeit,

<sup>1</sup>Dies kann man sich dadurch erklären, dass die Magnetfeldlinien sowohl im Zentrum der Spektrometermagnete als auch in der Analysierebene nahezu parallel zueinander verlaufen, im Zwischenbereich jedoch aufgrund der Änderung der Magnetfeldstärke um mehrere Größenordnungen stark auffächern.

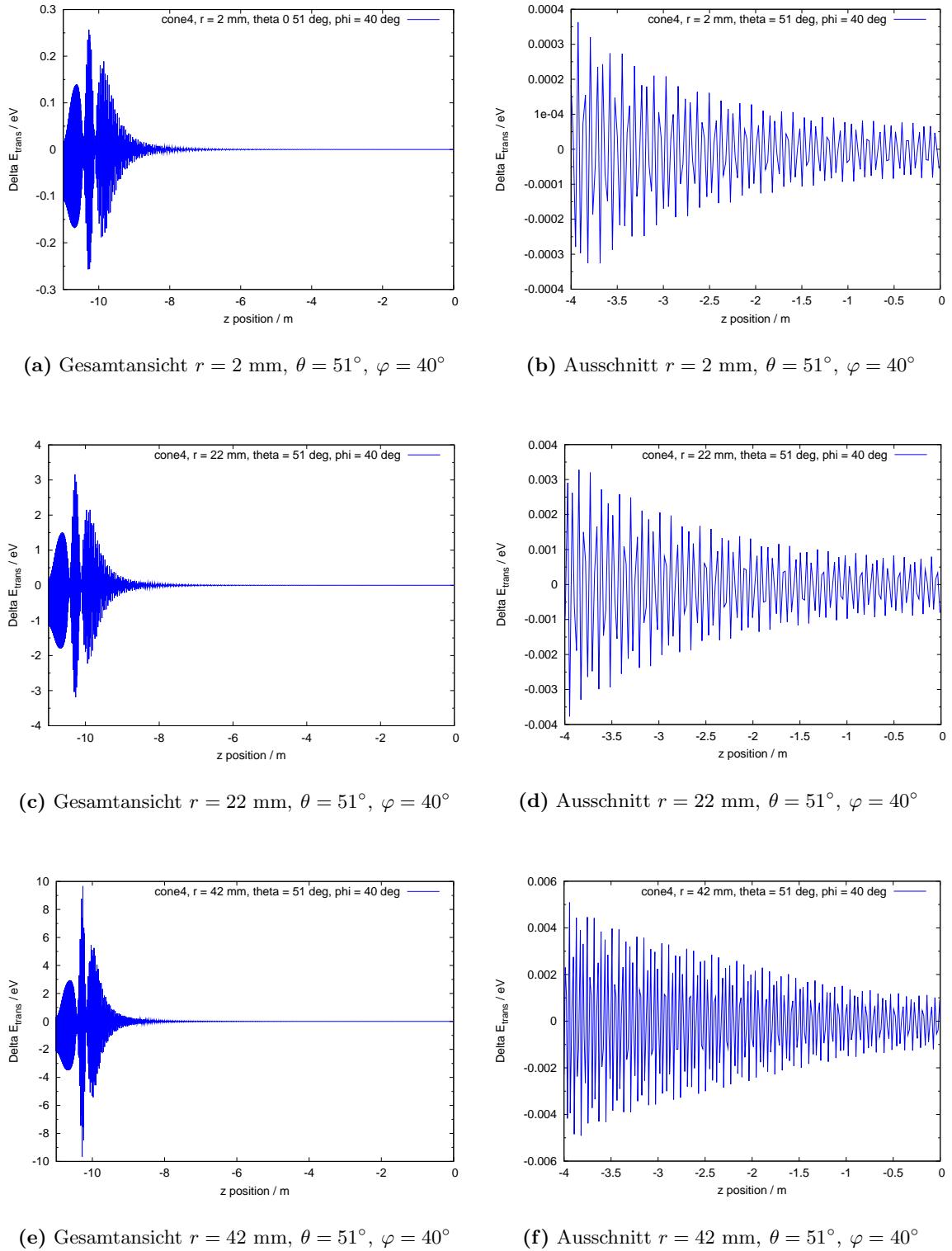
$l_{\text{cyc}}$  die Zyklotronschrittlänge und  $R(l)$  den Krümmungsradius der Magnetfeldlinie an der Stelle  $l$ .  $C(v_{\parallel}) = 2\pi v_{\parallel} m/q$  ist auf dem kleinen betrachteten Bahnabschnitt annähernd konstant. Im letzten Schritt der Rechnung wurde die Beziehung  $|\nabla_{\perp}B/B| = |-\mathbf{R}/R^2| = 1/|R|$  zwischen relativer Magnetfeldänderung und Krümmungsradius ausgenutzt [Jac02].

Gleichung (6.6) liefert somit eine Erklärung für die stärkere Adiabasieverletzung bei hohen Startradien: die Bahnen der weiter außen laufenden Elektronen weisen einen kleineren Krümmungsradius  $R$  und damit bei vergleichbarer Magnetfeldstärke eine höhere Adiabasieabweichung auf.

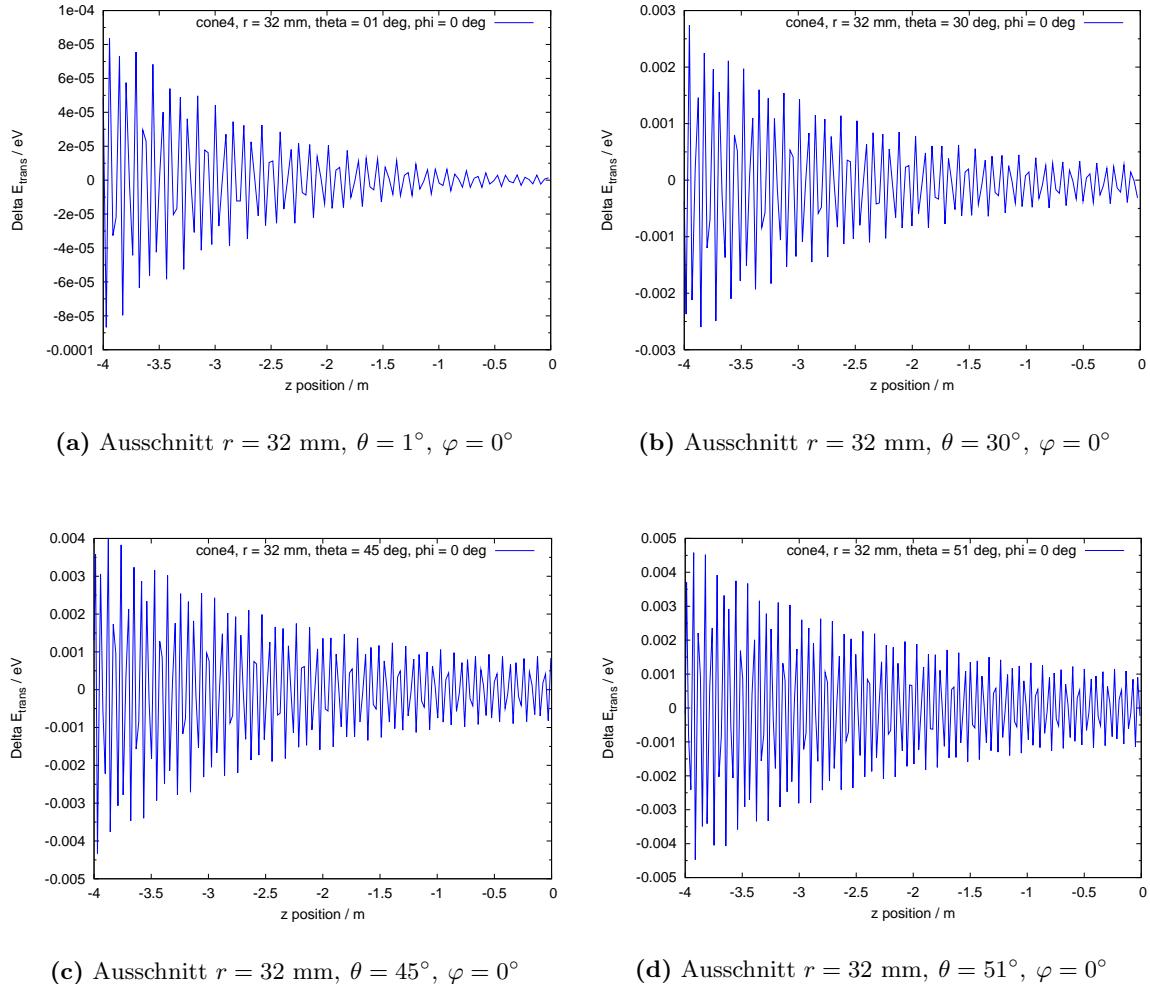
Neben der Startradiusabhängigkeit wurde auch der Einfluss des Startwinkels  $\theta_{\text{start}}$  auf die Adiabasieeigenschaften geprüft. Es ergibt sich ein ähnliches Bild wie im zuvor beschriebenen Fall der Variation von  $r_{\text{start}}$ : mit zunehmendem Startwinkel treten sowohl höhere Maximalwerte von  $\Delta E_{\perp}$  als auch höhere Werte in der Analysierebene auf. Letzteres kann aus der Darstellung des Adiabasieverletzungsparameters in Abbildung 6.11 abgelesen werden.

Diese Startwinkelabhängigkeit wird im Wesentlichen von zwei konkurrierenden Effekten beeinflusst. Ist  $\theta_{\text{start}}$  groß, so steht dem Elektron verglichen mit dem Fall eines kleinen Startwinkels eine höhere Transversal- und eine dementsprechend niedrigere Longitudinalkomponente der Energie zur Verfügung. Zum einen bedeutet dies nach Gl. (6.4), dass die Zyklotronschrittlänge sich verkleinert, wodurch sich eine geringfügig verminderte Adiabasieverletzung bei hohen Winkeln ergeben sollte. Dieser Effekt ist, wie bereits bei der Diskussion der Energieabhängigkeit erwähnt, direkt proportional zur Geschwindigkeit  $v_{\parallel}$ . Gleichzeitig nimmt aber bei hohem Startwinkel die Transversalgeschwindigkeit  $v_{\perp}$  zu. Diese geht über die Impulskomponente  $p_{\perp}$  quadratisch in den Adiabasieparameter  $\Delta E_{\perp}$  aus Gl. (6.3) ein. Hohe Transversalenergien werden auf dem Weg zur Analysierebene durch die magnetische adiabatische Kollimation i.A. stärker reduziert als ohnehin schon geringe Transversalenergien. Dieser dominierende Effekt der zunehmenden Energiekomponente  $E_{\perp}$  sorgt für eine Erhöhung der Adiabasieverletzung mit größerem Startwinkel.

Des Weiteren ist zu beachten, dass die eigentliche adiabatische Invariante  $\mu$  durch eine Reihenentwicklung gegeben ist, in der die bisher betrachtete Größe  $\mu_0 = mv_{\perp}^2/2B$  nur den ersten Term darstellt. Eine ausführliche Diskussion der Reihe ist in [Thü02] zu finden. Der Ansatz  $\mu = \mu_0$  für die adiabatische Invariante gilt für den nicht relativistischen Fall sowie für konstantes Magnetfeld und verschwindendes elektrisches Feld. Bei kleinen elektrischen Feldern ist  $\mu \approx \mu_0$  eine gute Näherung; für stärkere elektrische Felder müssen jedoch weitere Terme berücksichtigt werden. Im Korrekturterm erster Ordnung tritt bereits die Transversalenergie  $E_{\perp}$  explizit auf. Unter diesem zusätzlichen Gesichtspunkt wird der hier besprochene erhöhte Adiabasieabweichungsparameter im Fall großer Startwinkel besser verständlich.



**Abbildung 6.10: Adiabasieverhalten in Abhängigkeit des Startradius.** Die Diagramme zeigen die Abweichung vom adiabatischen Verhalten entlang der Trajektorie in Energieeinheiten. Von kleinen Startradien ( $r_{\text{start}} = 2 \text{ mm}$ , Teilbilder (a) – (b)) zu großen Startradien ( $r_{\text{start}} = 42 \text{ mm}$ , Teilbilder (e) – (f)) nehmen sowohl der Wert der maximalen Abweichung als auch der Wert von  $\Delta E_{\perp}$  in der Analysierebene zu. Die Diagramme wurden für eine Überschussenergie von  $\epsilon = 1 \text{ eV}$  erstellt.



**Abbildung 6.11: Adiabasieverhalten in Abhängigkeit des Startwinkels.** Aufgetragen ist auch hier der Parameter  $\Delta E_{\perp}$  entlang der Trajektorie. Die Überschussenergie beträgt stets  $\epsilon = 1$  eV. Von  $\theta_{\text{start}} = 1^\circ$  nach  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$  nimmt der Wert von  $\Delta E_{\perp}$  in der Analysierebene zu. Die Startwinkelabhangigkeit fällt jedoch im Bereich großer Werte von  $\theta_{\text{start}}$  wesentlich geringer aus.

## 6.4 Übergang von 22 m zu 24 m Spektrometerlänge

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, dass sich die Transmissionseigenschaften – insbesondere für die weit außen laufenden Elektronen – durch eine Veränderung der Konusgeometrie positiv beeinflussen lassen. Das Adiabasieverhalten des Spektrometers bleibt dabei unkritisches; allerdings verschlechtert sich die elektrische Feldhomogenität. Außerdem ist die Spulenkonfiguration bisher nicht verändert worden, und die Homogenität des Magnetfeldes ist somit weiterhin noch nicht gut genug. In diesem Unterkapitel soll als zusätzliche Maßnahme die Verlängerung des gesamten Spektrometeraufbaus um insgesamt zwei Meter getestet werden. Wenn dabei die optimierte Konusform (**cone4**) beibehalten wird, ist zu erwarten, dass sich die Homogenität sowohl des elektrostatischen Potentials als auch des Magnetfeldes bei gleichbleibend guten Transmissionseigenschaften signifikant verbessert. Die Auswirkungen auf die Adiabasie müssen nach der Konfigurationsänderung ebenfalls erneut geprüft werden.

Bevor der Übergang zu 24 m Spektrometerlänge beschrieben wird, soll zunächst diskutiert werden, inwiefern eine Erfüllung der Designkriterien auch bei einer gleich bleibenden Länge von 22 m möglich wäre.

- Der Durchgriff des Retardierungspotentials lässt sich durch Wiedereinfügen der im bisherigen **cone4**-Design unberücksichtigten Zusatzelektrode beeinflussen. Die Transmissionseigenschaften müssten in diesem Fall auf eine eventuelle Verschlechterung hin kontrolliert werden.
- Eine Veränderung der Magnetfeldhomogenität kann prinzipiell durch eine Umkonfiguration der supraleitenden Spulen oder der Luftspule erreicht werden:
  - **Supraleitende Spulen:** Die beiden Hauptspektrometersolenoide sind ursprünglich für einen Betrieb bei  $B_{\text{solenoid}} = 4.5$  T optimiert worden, so dass der Flussschlauch durch ein Ventil des Durchmessers  $\varnothing = 200$  mm zwischen Magnet und Transportelement geführt werden kann. Im Nachhinein wurde jedoch die vorgesehene Feldstärke der Solenoide auf  $B_{\text{solenoid}} = 3.5$  T reduziert, wobei das Ventil durch ein größeres mit  $\varnothing = 250$  mm ersetzt wurde. Bei diesem handelt es sich um das größte zur Zeit auf dem Markt erhältliche UHV-Ganzmetallventil. Um das Magnetfeld  $B_A$  in der Analysierebene homogener gestalten und gleichzeitig an einem frühen Bahnpunkt des Elektrons einen höheren Transformationsgrad von  $E_{\perp}$  nach  $E_{\parallel}$  erreichen zu können, müsste man das magnetische Moment der Hauptspektrometersolenoide reduzieren<sup>2</sup>. Da bei einer weiteren Verringerung von  $B_{\text{solenoid}}$  der magnetische Flussschlauch nicht mehr durch das Ventil passt, kann das magnetische Moment der Solenoide aus technischen Gründen nicht merklich reduziert werden.
  - **Luftspule:** Das Design der langen Luftspule lässt mehr Spielraum für Veränderungen. Hier wäre eine Segmentierung entlang der  $z$ -Achse in drei oder mehr Einzelpulnen mit alternierender Richtung des Stromflusses denkbar, etwa nach dem Muster

$$-|I_1|, \quad +|I_2|, \quad -|I_1|.$$

Durch dieses „Gegenfeldspulen“-Design (Vorschlag von F. Glück) lässt sich eine hohe Magnetfeldhomogenität realisieren, jedoch entstehen lokale Magnetfeldminima entlang der Feldlinien, welche lokale magnetische Fallen darstellen. Da bisher keine experimentelle Erfahrung mit solchen Feldkonfigurationen in einem MAC-E-Filter besteht, sollte diese Möglichkeit der magnetischen Gegenfelder lediglich als eine Option genutzt werden; ein eventueller Zusammenhang mit einer Erhöhung der Untergrundrate bleibt zu untersuchen.

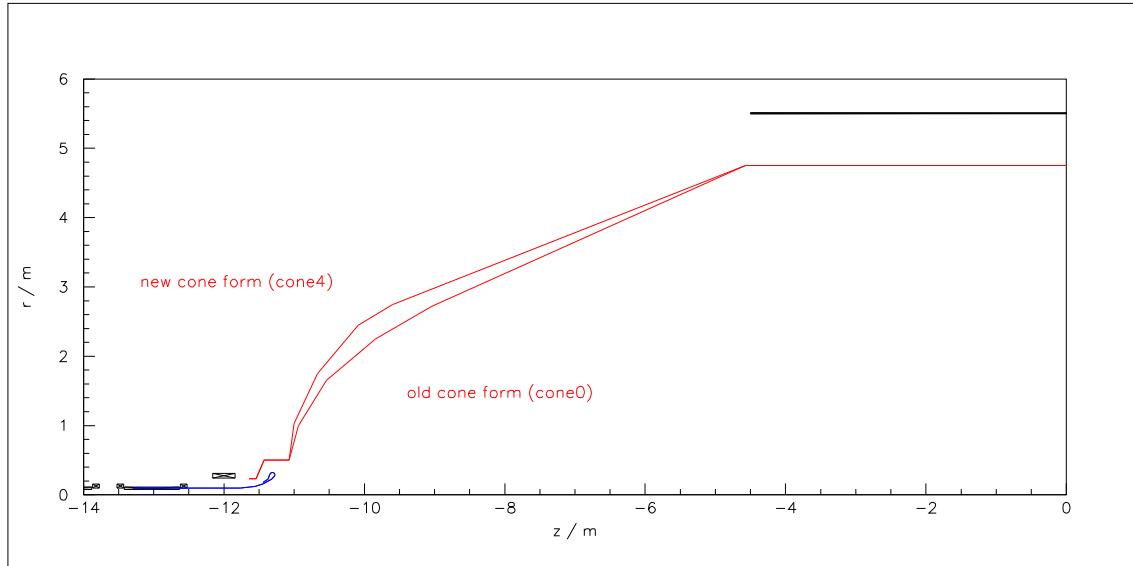
Angesichts dieser Überlegungen bleibt die Verlängerung des gesamten Hauptspektrometers als ein „natürlicher Ausweg“, um die Erfüllung der Designkriterien zu gewährleisten. Da eine solche Verlängerung zwangsläufig mit einer Erhöhung der Kosten für das Spektrometer verbunden ist, muss ein Kompromiss gefunden werden, welcher im gegebenen finanziellen Rahmen realisierbar ist. Im Folgenden wird daher eine Verlängerung um zwei Meter geprüft.

---

<sup>2</sup>Das magnetische Moment einer stromdurchflossenen Spule gibt die gesamte von einem magnetischen Dipol erzeugte „Feldmenge“ an. Es wird berechnet durch Integration der magnetischen Flussdichte über das gesamte Volumen.

#### 6.4.1 Einfluss der Designveränderungen auf die Feldhomogenität

Abbildung 6.12 zeigt die Magnet- und Elektrodenkonfiguration für das verlängerte Spektrometer. Zum Vergleich ist die ursprüngliche Konusform `cone0` zusammen mit der in Abschnitt 6.3.1 diskutierten erweiterten Form `cone4` dargestellt.



**Abbildung 6.12: Zwei mögliche Konusformen für das 24 m lange Hauptspektrometer.** Eingezeichnet sind die ursprüngliche Form `cone0` und die erweiterte Variante `cone4`. Im Vergleich zum 22 m langen Spektrometer werden die Magnete um zwei Meter auseinandergerückt. Als zusätzliche Maßnahme wurde die Luftspule im Zentralteil um zwei Meter verlängert. Die z-Positionen der Elektrodensegmente werden in beiden Spektrometerhälften relativ zur Analysierebene um je einen Meter verschoben; lediglich der zentrale Zylinderteil bleibt unverändert.

#### Magnetkonfiguration

Da die Feldkonfiguration des Hauptspektrometers spiegelsymmetrisch zur Analysierebene ist, genügt es, zur Verlängerung des Spektrometers um zwei Meter die z-Positionen der Magnete in beiden Spektrometerhälften um je einen Meter zu verschieben. Der Abstand der Zentren von Eingangs- und Ausgangssolenoid beträgt somit nun 24 m anstelle von 22 m in der ursprünglichen Konfiguration.

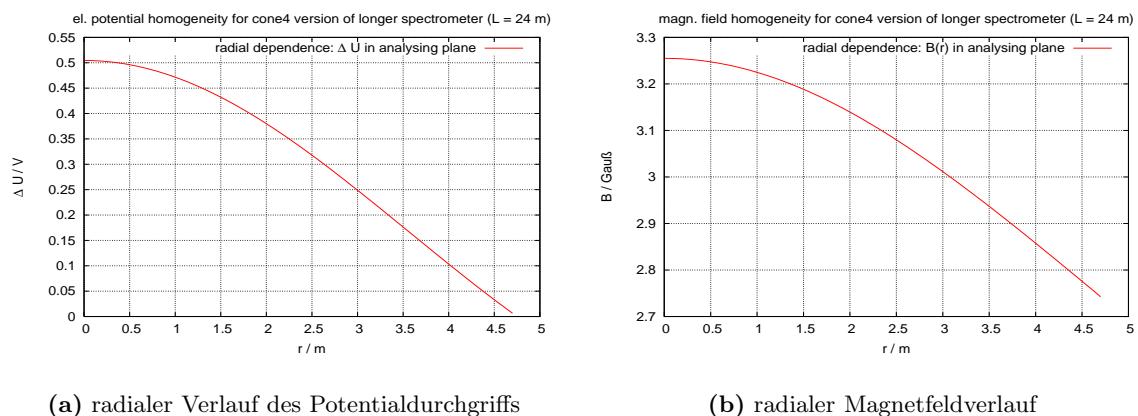
Gegenüber dem bisherigen Design wird auch die Länge der zentralen Luftspule symmetrisch zur Analysierebene um zwei Meter erhöht. Bedingt durch das Auseinanderrücken der das Führungsfeld erzeugenden Solenoiden ist es erforderlich, mit der Länge auch die Anzahl der Ampèrewindungen der Luftspule zu vergrößern. Dies dient dazu, den Durchmesser des magnetischen Flussschlauches in der Analysierebene, trotz des verringerten Beitrags der beiden Solenoiden in der Spektrometermitte, kleiner als den Tankdurchmesser zu halten. Der Beitrag der Luftspule zur Magnetfeldstärke in der Analysierebene relativ zu dem der beiden supraleitenden Solenoiden ist dadurch wesentlich höher, als dies bei der Magnetkonfiguration des 22-m-Spektrometers der Fall war (vgl. Tabelle 6.4).

Dies stellt einen enormen Vorteil gegenüber dem kürzeren Spektrometer dar, da sich somit ein größerer Spielraum zur Einstellung der Magnetfeldstärke – und insbesondere eine größere

**Tabelle 6.4: Konfigurationsdaten der zentralen Luftspule und ihr Beitrag zur Magnetfeldstärke in der Analysierebene, jeweils für 22 m bzw. 24 m Spektrometerlänge.**

	22 m Länge	24 m Länge
Innenradius der Spule	5.5 m	5.5 m
Gesamtlänge der Spule	7 m	9 m
Gesamtstrom	300 A	1000 A
Magnetfeldstärke in der Analysierebene (gesamt)	2.35 Gauß	2.74 Gauß bei $r = 4.7$ m
Beitrag der Luftspule in der Analysierebene	0.37 Gauß	3.26 Gauß bei $r = 0$ m
rel. Feldinhomogenität in der Analysierebene	$\Delta B/B = 28\%$	$\Delta B/B = 16\%$

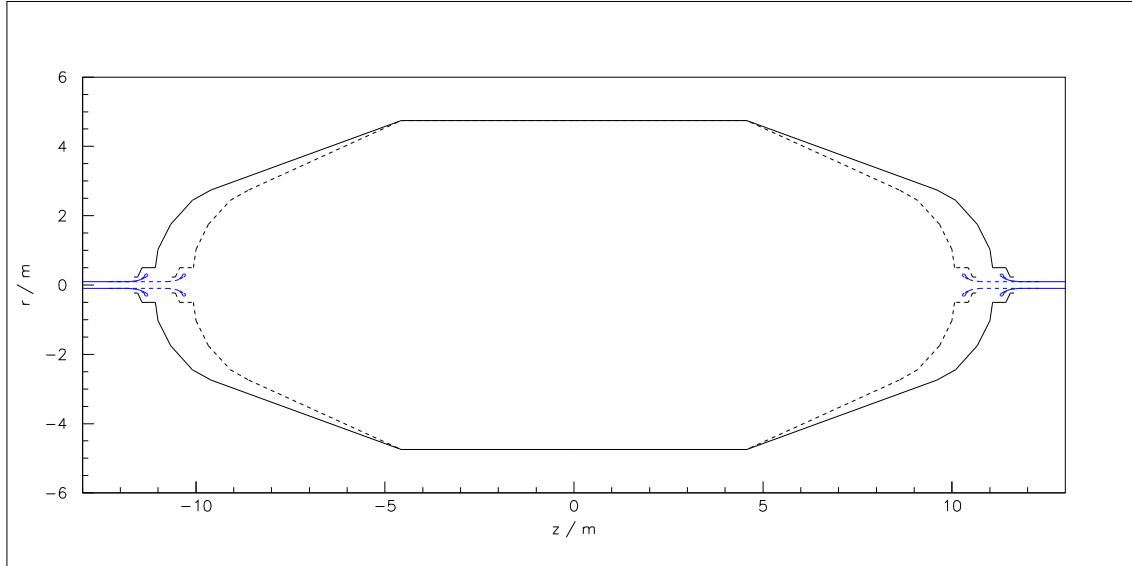
Feldhomogenität – in der Analysierebene ergibt. So beträgt die relative Magnetfeldänderung entlang der Analysierebene statt 28 % beim 22-m-Design nur noch 16 % beim 24 m langen Spektrometer (siehe Abb. 6.13 (b)), was der Designanforderung  $\Delta B/B \leq 20\%$  aus Gl. (4.11) entspricht.



**Abbildung 6.13: Homogenität des elektrischen Potentials (a) und des Magnetfeldes (b) in der Analysierebene für das 24-m-Spektrometer (cone4-Konfiguration).** In Bild (a) ist die Differenz  $\Delta U(r) = U_{\text{analys}}(r) - U_{\text{vessel}}$  gegen  $r$  aufgetragen, während (b) die Radialabhängigkeit von  $B_{\text{analys}}$  wiedergibt. Es werden ein Potentialdurchgriff von  $\Delta U = 0.5$  V und eine Magnetfeldhomogenität von  $\Delta B/B = 16\%$  in der Analysierebene erreicht.

### Elektrodenkonfiguration

In Abb. 6.14 sind die Elektrodenkonfigurationen der unterschiedlich langen Spektrometerentwürfe für die `cone4`-Variante gegenübergestellt. Man erkennt, dass die Länge des zy-



**Abbildung 6.14: Vergleich der Variante cone4 für 22 m und 24 m Spektrometerlänge.** Die gestrichelte Linie stellt die Kontur des 22 m langen Spektrometers mit der Konusform `cone4` dar, die durchgezogene Linie zeigt dieselbe Konfiguration für das 24 m lange Spektrometer. Außer dem zentralen Zylinderteil wurden alle Elektrodensegmente versetzt.

lindrischen Teils unverändert blieb, jedoch die Positionen aller übrigen Elektrodensegmente auseinandergezogen wurden<sup>3</sup>. Dadurch ergibt sich eine veränderte Steigung der schrägen Tankwand im konischen Teil. Durch die Verlängerung reduziert sich der Potentialdurchgriff auf  $\Delta U_{\text{analys}} = 0.5 \text{ V}$  (24 m, `cone4`), was gegenüber dem Wert von  $\Delta U_{\text{analys}} = 0.95 \text{ V}$  (22 m, `cone4`) eine starke Verbesserung und gleichzeitig die Einhaltung des Homogenitätskriteriums aus Gl. (4.10) bedeutet (Abb. 6.13 (a)). Es soll an dieser Stelle betont werden, dass dieser Durchgriffswert, welcher mit dem der ursprünglichen Konfiguration in Abschn. 5.1.1 vergleichbar ist, beim 24-m-Spektrometer bereits ohne feldformende Zusatzelektrode erreicht wird.

In Abbildung 6.15 sind elektrische Äquipotentiallinien und Magnetfeldlinien für die `cone4`-Version des verlängerten Spektrometers zu sehen.

Zu der im Zentralteil des Spektrometers existierenden Falle für Teilchen mit positiver Ladung (siehe Abb. 6.15 (b)) ist zu sagen, dass ihre Bedeutung aufgrund der lediglich geringen im Experiment vorhandenen Anzahl positiv geladener Teilchen als klein einzuschätzen ist. Das Auftreten einer merklichen Zahl von Positronen ist nicht zu erwarten. Protonen sind somit die leichtesten positiv geladenen Teilchen, welche im Spektrometer auftreten und über längere Zeit in einer Falle eingefangen werden können. Ein Proton, welches in der Spektrometermitte ganz ohne kinetische Energie startet, nimmt durch die radiale elektrostatische Kraft

<sup>3</sup>In einer weiteren Studie wurde auch die Möglichkeit getestet, die Tankverlängerung durch eine Streckung des zylindrischen Mittelteils um zwei Meter zu bewerkstelligen. Diese Variante führte zu ähnlich guten Resultaten bezüglich Transmission und Feldhomogenität, wird jedoch aus technischen Gründen (u.a. mechanische Stabilität) nicht in Betracht gezogen.

Zyklotronenergie auf und kann – je nach Feldkonfiguration – unter Umständen in der Falle gespeichert werden. Durch eine kurzzeitige Erhöhung des Potentialdurchgriffs, etwa mit Hilfe einer Zusatzelektrode, könnte eine solche Teilchenfalle bei Bedarf geleert werden.

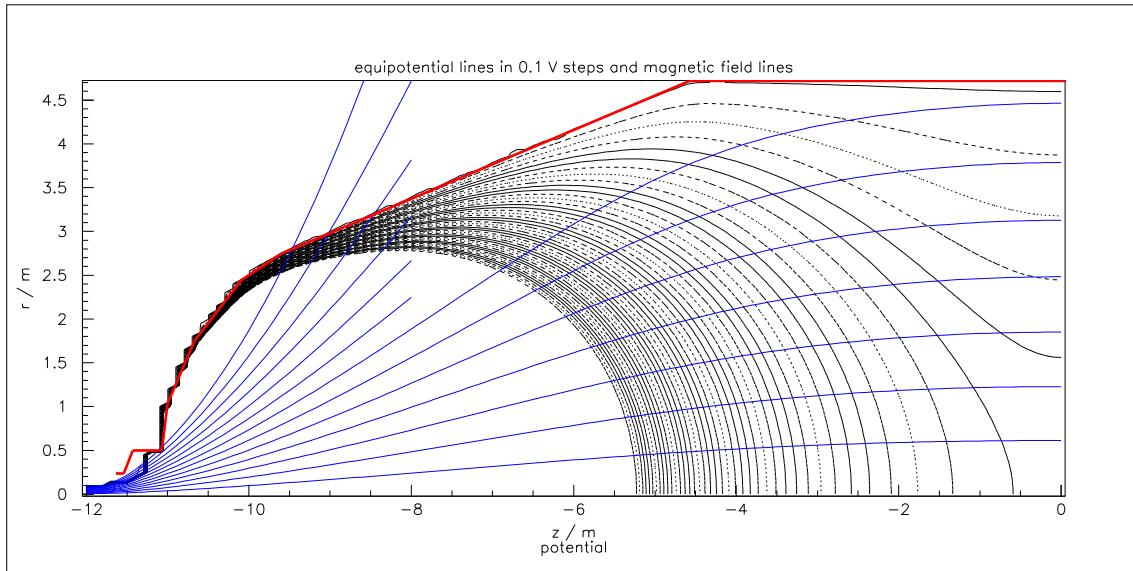
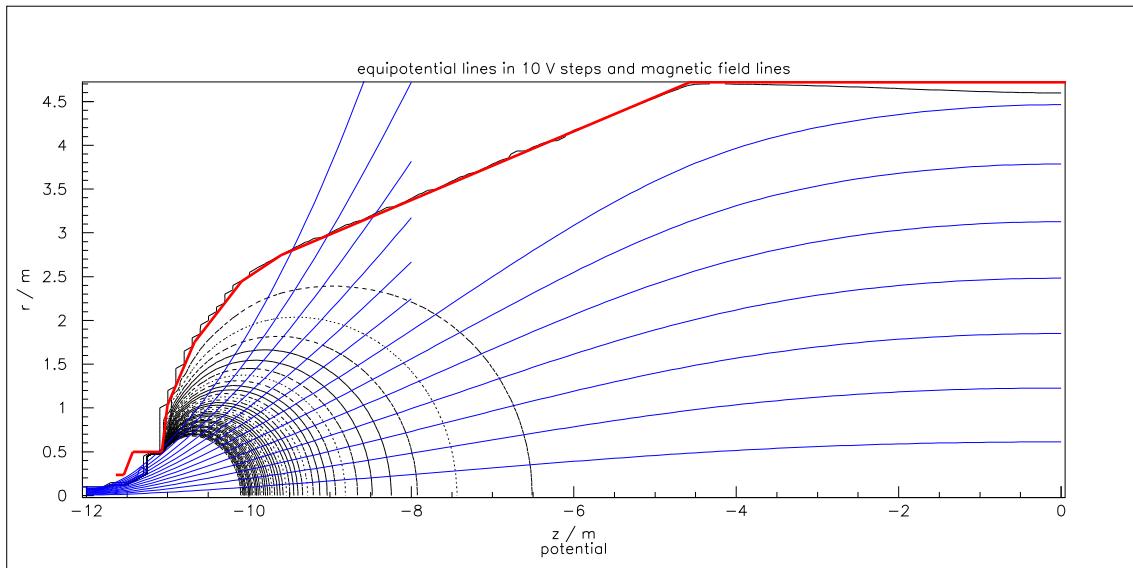
#### 6.4.2 Überprüfung der Transmissionseigenschaften

Auch für das verlängerte Spektrometer wurden Transmissionstests durchgeführt. Abb. 6.16 zeigt den Longitudinalenergieverlauf für simulierte Elektronenflugbahnen mit Startradien zwischen  $r = 2$  mm und 42 mm, hier zunächst für die Standard-Konusform `cone0`. Man erkennt, dass die Transmissionsbedingung für Elektronenbahnen im Innenbereich des Spektrometers gut erfüllt ist, während sich für die Kombination  $r_{\text{start}} = 42$  mm,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$  eine zu frühe Retardierung mit  $\delta E_{\parallel} \approx 13$  meV ergibt. Verglichen mit dem Verlauf für ein Elektron mit gleichen Startparametern bei der `cone0`-Variante des 22-m-Spektrometers (Abb. 6.6) hat sich die Amplitude  $\delta E_{\parallel}$  etwa halbiert.

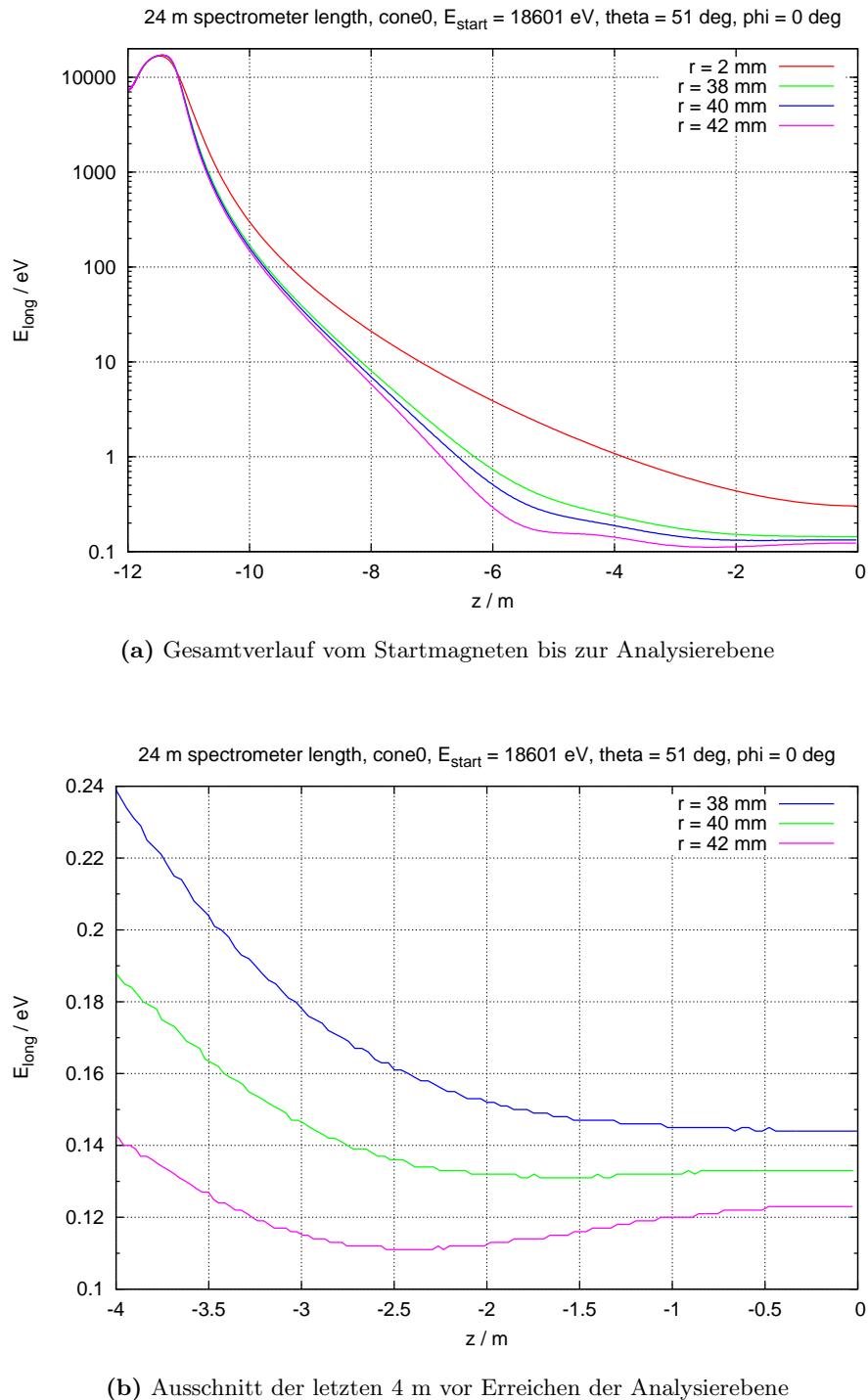
Deutlich abgeschwächt wird die zu frühe Retardierung beim Übergang von `cone0` zu `cone4`. Abbildung 6.17 zeigt die gleichen Diagramme wie Abb. 6.16, jedoch für die verbreiterte Konusform. Auch hier ist der Verlauf der Longitudinalenergie für die Innenbahnen unproblematisch ( $r_{\text{start}} = 2$  mm, 20 mm). Für  $r_{\text{start}} = 42$  mm findet man nur noch eine sehr kleine Abweichung  $\delta E_{\parallel} = 2$  meV vom idealen Verlauf.

#### Bemerkung zur Adiabasie

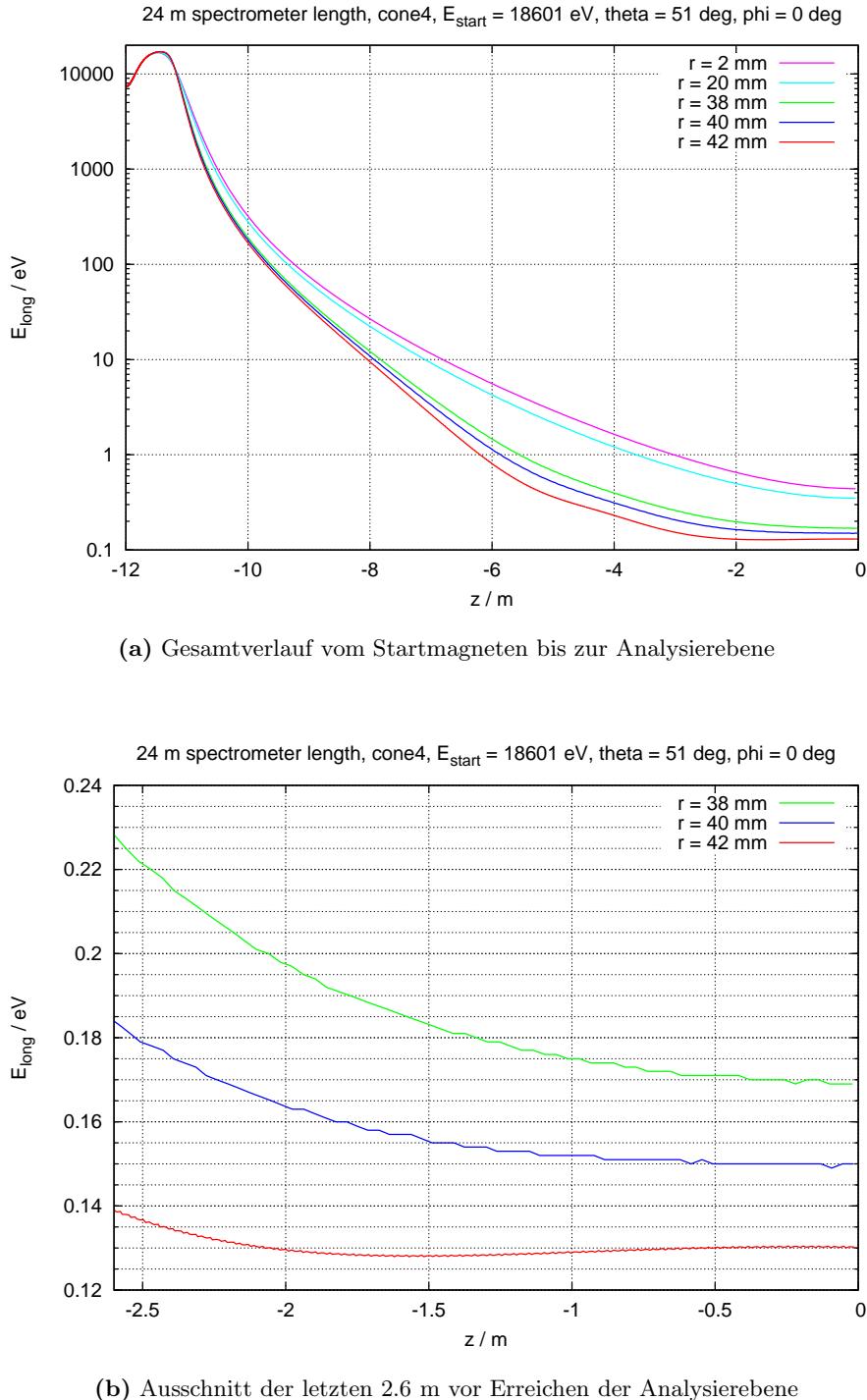
Die umfassenden Studien zur Adiabasieerhaltung wurden auch für das 24-m-Spektrometer wiederholt. Da sich keine signifikanten Änderungen gegenüber der ausführlichen Diskussion der Adiabasie beim 22-m-Spektrometer in Abschnitt 6.3.2 ergaben, sollen die Ergebnisse hier nicht mehr gesondert vorgestellt werden.

(a)  $\delta U = 0.1$  V(b)  $\delta U = 10$  V

**Abbildung 6.15:** Elektrische Äquipotentiallinien (schwarz) und Magnetfeldlinien (blau) für die cone4-Variante des 24-m-Spektrometers (ohne Zusatzelektrode). In rot ist die Kontur der Tankelektrode eingezeichnet. Es werden exemplarisch je 50 Äquipotentiallinien in den Abständen  $\delta U = 0.1$  V (a) und 1 V (b) gezeigt. In (a) ist im Zentralteil des Spektrometers eine Falle für *positiv* geladene Teilchen erkennbar: Dort verlaufen Äquipotential- und Magnetfeldlinien nicht parallel zueinander und schneiden sich symmetrisch zur Analysierebene zweimal. Diese Falle lässt sich prinzipiell beim MAC-E-Filter nicht vermeiden. Sie ist jedoch nicht relevant, solange es keine nennenswerte Anzahl positiv geladener Teilchen gibt, welche gespeichert werden könnten (vgl. Anmerkung auf S. 88). Aus (b) hingegen kann man ablesen, dass auch in den runden „Endkappengebieten“ Teilchenfallen bestehen können.



**Abbildung 6.16: Longitudinalenergieverlauf für die `cone0`-Variante bei 24 m Spektrometerlänge (ohne Startenergiekorrektur).** Alle Elektronenbahnen wurden mit gleichen Startparametern  $\epsilon = 1 \text{ eV}$ ,  $\theta = 51^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ , jedoch unterschiedlichen Startradien simuliert. In (a) ist der Verlauf von  $E_{\parallel}$  für  $r = 2, 38, 40$  und 42 mm gezeigt, in (b) wird für die Außenelektronen ein Ausschnittsgraph der letzten 4 m vor der Analysierebene dargestellt. Dort erkennt man eine zu frühe Retardierung mit besonders deutlicher Ausprägung für  $r = 42 \text{ mm}$ , mit der Amplitude  $\delta E_{\parallel} \approx 13 \text{ meV}$ .



**Abbildung 6.17: Longitudinalenergieverlauf für die cone4-Variante bei 24 m Spektrometerlänge (ohne Startenergiekorrektur).** (a) Angefangen bei kleinen und mittleren bis hin zu großen Startradien ist das Transmissionsverhalten der 24 m langen cone4-Spektrometervariante gut. (b) Im Extremfall  $r_{\text{start}} = 42$  mm,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$  ergibt sich noch eine geringfügige zu frühe Retardierung mit  $\delta E_{\parallel} = 2$  meV.

### 6.4.3 Abschließende Designveränderungen

Als Ergebnis der bisherigen Untersuchungen zum 24 m langen Hauptspektrometer mit `cone4`-Form lässt sich festhalten, dass diese Konfiguration auch ohne die in der ursprünglichen Version eingeplante Zusatzelektrode gut funktioniert. Insbesondere werden – anders als beim 22-m-Entwurf – die Feldhomogenitäts- und Transmissionsanforderungen erfüllt. Dennoch ist es wünschenswert, die Option der zusätzlichen Hochspannungselektrode weiterhin offen zu halten (siehe etwa Bemerkung zu Teilchenfallen auf S. 88). Daher wurden abschließend weitere Tests eines 24 m langen Spektrometers unter Hinzunahme der Zusatzelektrode durchgeführt, wobei jedoch noch zweckmäßige Änderungen am elektrostatischen Design vorgenommen wurden.

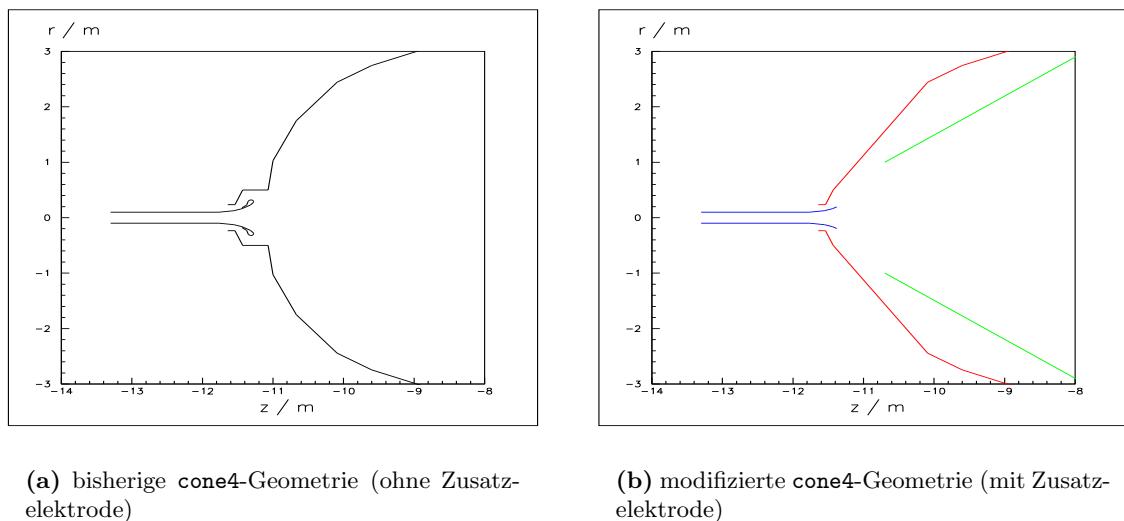


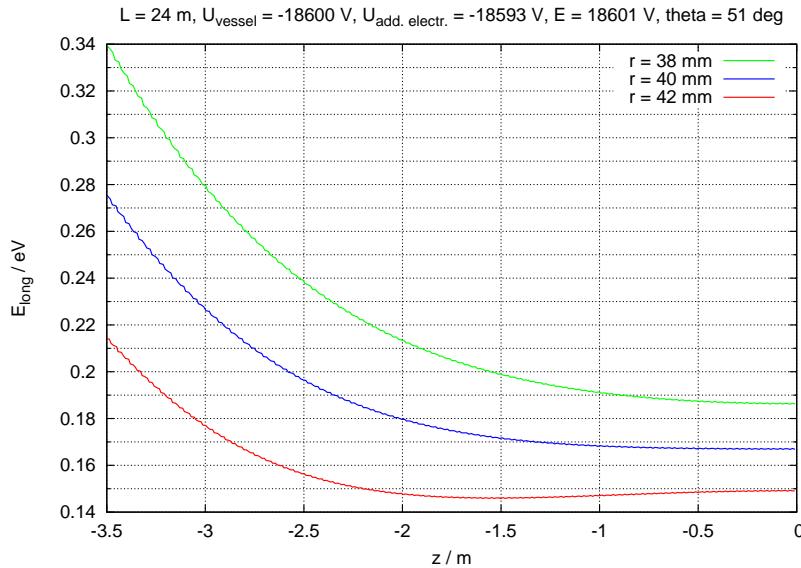
Abbildung 6.18: Veränderte Elektrodengeometrie im Spektrometereingangsbereich.

In Abb. 6.18 sind diese Modifikationen, welche nur den Eingangs- und Ausgangsbereich des Spektrometers betreffen, dargestellt:

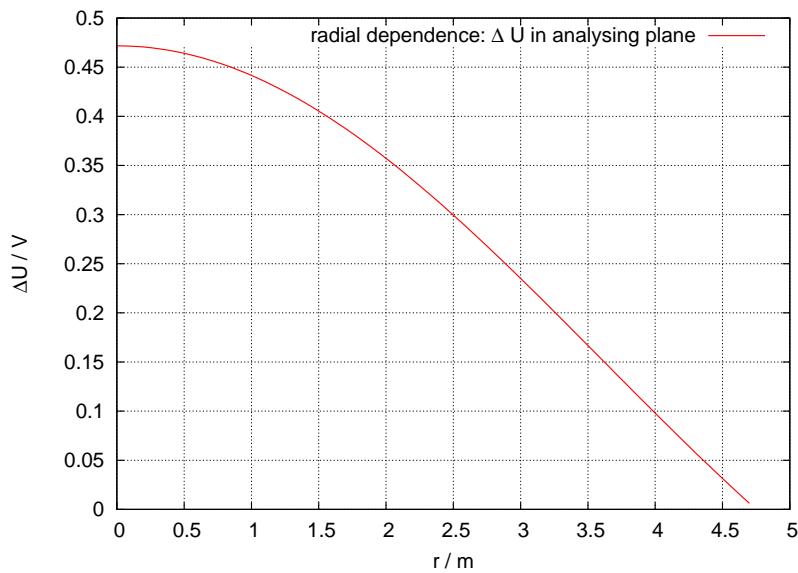
- Der runde Teil des Konus wurde durch einen geraden Elektrodenverlauf mit nur noch zwei „Knickpunkten“ ersetzt, was die Tankform deutlich einfacher macht.
- Der Öffnungs durchmesser der Erdelektrode wurde verkleinert und ihre Form leicht vereinfacht, um sie durch einen Flansch mit Durchmesser  $\varnothing = 500$  mm montieren zu können.
- Die spitze Kante der Tankelektrode nahe der Mündung der Erdelektrode wurde entfernt. Durch die so erreichte Vermeidung eines Bereichs extrem hoher elektrischer Feldstärke bei sehr kleinen Krümmungsradien reduziert sich die Gefahr der Feldemission.

Die Untersuchungen dieses Designs ergeben weiterhin gute Transmissionseigenschaften (Abb. 6.19) bei einer noch leicht verbesserten Homogenität des Retardierungspotentials in der Analysierebene (Abb. 6.20). Bei der Adiabasieerhaltung zeigten sich auch hier keine Probleme; der Adiabasieverletzungsparameter  $\Delta E_{\perp}$  bleibt für Elektronen mit Überschussenergien von  $\epsilon = 1$  eV in der Analysierebene stets in der Größenordnung 1 meV oder kleiner.

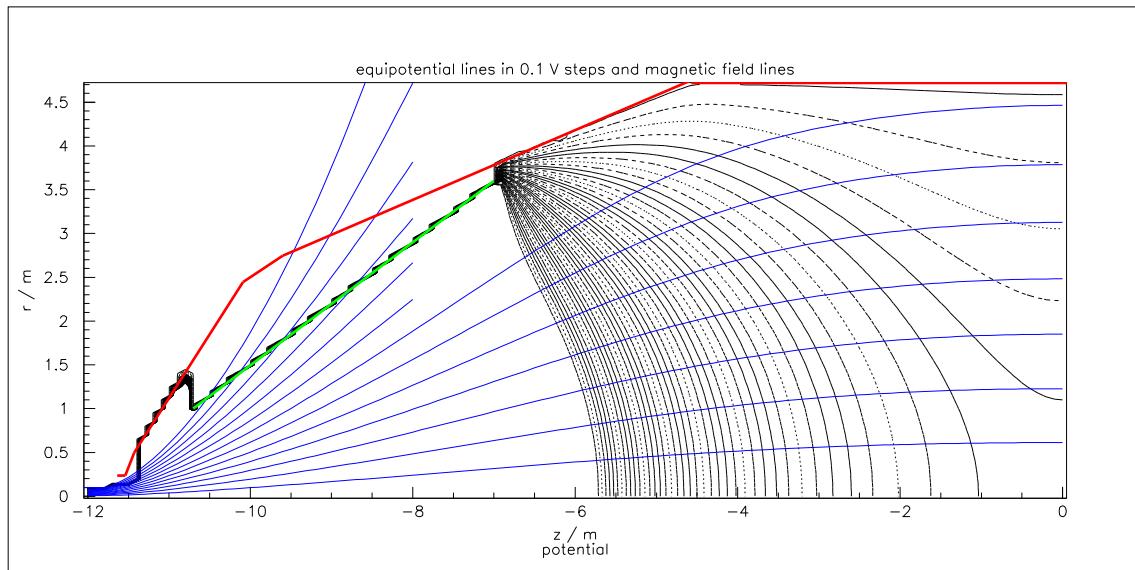
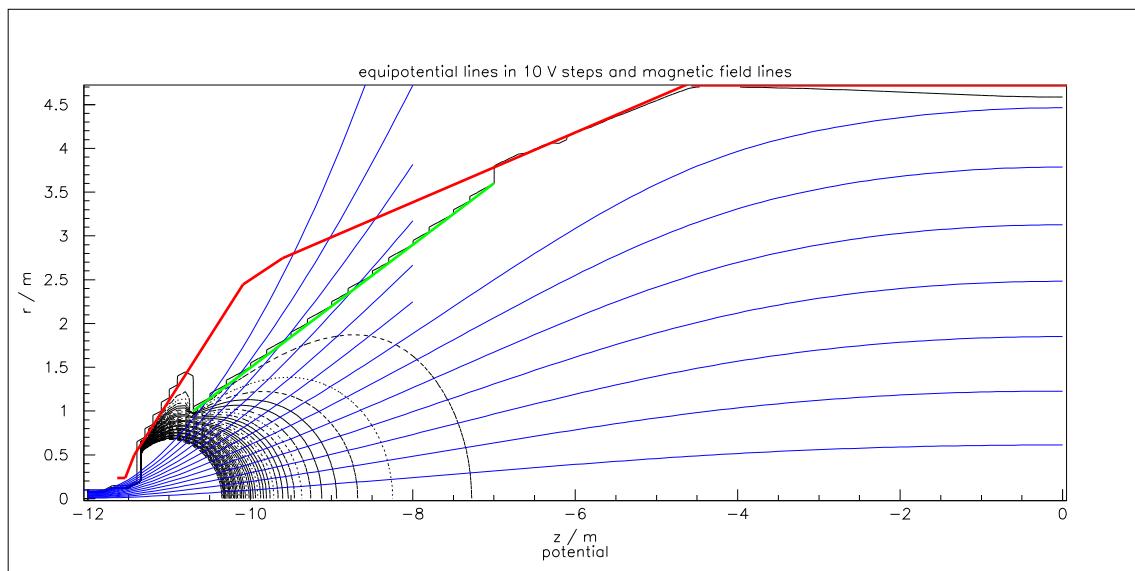
Der Verlauf der Äquipotential- und Magnetfeldlinien dieser Spektrometerkonfiguration ist in Abb. 6.21 wiedergegeben. Die Abbildung ermöglicht einen direkten Vergleich mit dem „runderen“ Design *ohne* zusätzliche feldformende Elektrode in Abb. 6.15.



**Abbildung 6.19: Longitudinalenergieverlauf für achsenferne Elektronen mit hohen Startwinkeln im 24-m-Spektrometer mit Zusatzelektrode (ohne Startenergiekorrektur).** Bei den Startparametern  $r_{\text{start}} = 42 \text{ mm}$ ,  $\theta_{\text{start}} = 51^\circ$ ,  $\epsilon = 1 \text{ eV}$  ergibt sich eine Abweichung vom idealen  $E_{\parallel}$ -Verlauf von  $\delta E_{\parallel} \approx 3 \text{ eV}$ . Für die Zusatzelektrode wurde bei dieser Simulation eine Potentialbelegung von  $U_{\text{add. electr.}} = U_{\text{vessel}} + 7 \text{ V}$  gewählt.



**Abbildung 6.20: Homogenität des Retardierungspotentials für das 24-m-Spektrometer mit Zusatzelektrode.** Es wird ein Potentialdurchgriff  $\Delta U < 0.5 \text{ V}$  bei einer Potentialbelegung von  $U_{\text{vessel}} = -18600 \text{ V}$ ,  $U_{\text{add. electr.}} = U_{\text{vessel}} + 7 \text{ V}$  erreicht. — An der Konfiguration des Magnetfeldes wurden keine Veränderungen vorgenommen, so dass die Homogenität weiterhin der in Abb. 6.13 (b) gezeigten entspricht.

(a)  $\delta U = 0.1 \text{ V}$ (b)  $\delta U = 10 \text{ V}$ 

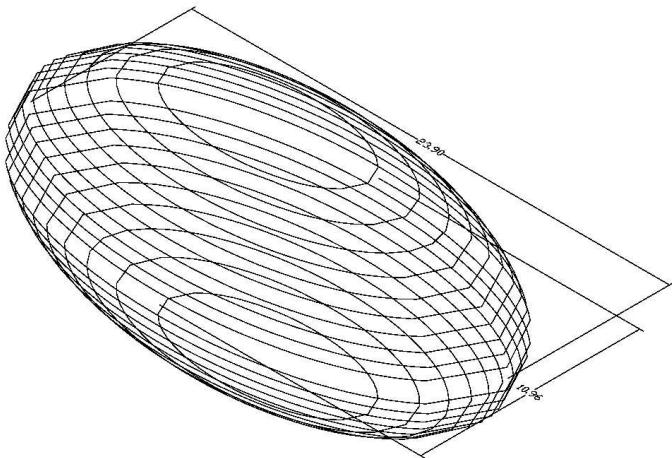
**Abbildung 6.21: Elektrische Äquipotentiallinien (schwarz) und Magnetfeldlinien (blau) für das 24-m-Spektrometer (mit Zusatzelektrode).** In rot ist die gegenüber der Konfiguration in Abb. 6.15 vereinfachte Kontur der Tankelektrode eingezeichnet. Die trichterförmige Zusatzelektrode ist grün dargestellt. Es werden exemplarisch jeweils 50 Äquipotentiallinien in den Abständen  $\delta U = 0.1 \text{ V}$  (a) und  $1 \text{ V}$  (b) gezeigt. Die Einstellung der Potentiale lautet hier:  $U_{\text{vessel}} = -18600 \text{ V}$ ,  $U_{\text{add. electr.}} = -18593 \text{ V}$ . — Durch die Zusatzelektrode wird der Potentialverlauf im Endkappenbereich derart modifiziert, dass die Speicherbedingungen für Elektronen aufgehoben und somit die in Abb. 6.15 (b) erkennbaren Teilchenfallen eliminiert werden. Position und Ausrichtung der Zusatzelektrode sind so gewählt, dass sie parallel zu den äußersten noch im Spektrometer verlaufenden Magnetfeldlinien liegt.

#### 6.4.4 Addendum: Maßnahmen zur Kompensation des Erdmagnetfeldes am Ort des Hauptspektrometers

Auch wenn im Rahmen dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen werden wird, soll hier doch der Vollständigkeit halber ein weiterer Aspekt des elektromagnetischen Designs des Hauptspektrometers kurz angesprochen werden.

Das Erdmagnetfeld hat in Deutschland eine Stärke von ca. 0.18 Gauss (Komponente parallel zur Erdoberfläche) bzw. ca. 0.45 Gauß (Komponente senkrecht zur Erdoberfläche) [LVer, Win04]. Es kann daher zu einer merklichen Beeinflussung der Magnetfeldstärke in der Analyseebene des Hauptspektrometers durch das geomagnetische Feld kommen.

Ein möglichst gleichförmiges Magnetfeld innerhalb einer Kugel oder allgemeiner eines Ellipsoids lässt sich durch eine homogene Magnetisierung an der Oberfläche erreichen (siehe z.B. [Jac02]). Die konstante Magnetisierung entspricht einer bestimmten Stromverteilung, welche näherungsweise durch eine Anzahl von Spulen (oder Stromschleifen) entlang der Oberfläche des Ellipsoids realisiert werden kann [Cla38, Eve66]. Abbildung 6.22 zeigt einen Vorschlag, wie ein solches elliptisches Spulensystem für das KATRIN Hauptspektrometer aussehen könnte [Osi04a]. Die Stromschleifen verlaufen außerhalb des Spektrometertanks parallel zueinander



**Abbildung 6.22: Mögliche Konfiguration zur Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes (Vorschlag von A. Osipowicz).** Dieser Entwurf zeigt 20 äquidistante, ebene Stromschleifen entlang der Oberfläche eines Ellipsoids mit Halbachsen der Länge  $a \approx 12$  m,  $b = c \approx 5.5$  m.

in gleichen Abständen; die Form des Ellipsoids wird durch Polygonelemente approximiert. Es sind detaillierte Studien zum Entwurf und zur Realisierbarkeit eines solchen Kompensationsystems erforderlich.

## Kapitel 7

# Simulationen zum Design der Drahtelektrode

In diesem Kapitel soll eine weitere geplante Komponente des elektromagnetischen Designs des KATRIN Experiments beschrieben werden, welche in die bisherigen Betrachtungen noch nicht einbezogen wurde: eine nahezu masselose Innenelektrode, die das gesamte Spektrometervolumen in geringem Abstand von der Tankhülle auskleidet. Sie soll aus einer Vielzahl von dünnen Drähten bestehen, an denen ein gegenüber dem Tankpotential negativeres Potential  $U_{\text{wire}} = U_{\text{vessel}} - \Delta U$  anliegt. Sowohl für das Vor- als auch für das Hauptspektrometer sollen derartige Elektrodensysteme implementiert werden. Während die Designstudien zur Vorspektrometer-Drahtelektrode bereits abgeschlossen sind [Fla04], steht der Entwurf einer geeigneten Konfiguration für das Hauptspektrometer noch aus. Im Folgenden sollen zunächst die Hauptgründe, welche für den Einbau solcher Innenelektroden sprechen, erläutert werden.

### 7.1 Motivation für den Einsatz einer quasi-masselosen Innenelektrode

Der Einbau einer zusätzlichen Drahtelektrode bietet eine Reihe von Vorzügen. Für einen möglichst effizienten Einsatz sind zwei Betriebsmodi vorgesehen. Dazu wird die Elektrodenkonfiguration in zwei gegenüberliegende Segmente (z.B. einen oberen und einen unteren Teil) aufgeteilt, welche entweder an gleichem Potential (Abschirm-Modus) oder unterschiedlichem Potential (Dipol-Modus) liegen. Als mögliche Anwendungen sollen hier vier Punkte aufgeführt werden (vgl. [Kat03a]):

- 1) **Elektrische Abschirmung des sensitiven Spektrometervolumens gegen in der Tankwand entstehende Untergrundelektronen.** In Abb. 7.1 ist der Fall gezeigt, dass ein aus der Höhenstrahlung stammendes Myon die massive Spektrometerwand durchdringt und dort ein – in den meisten Fällen relativ niederenergetisches – Elektron auslöst. Ohne geeignete Gegenmaßnahmen kann dieses Elektron trotz magnetischer Führung<sup>1</sup> u.U. in das Spektrometervolumen eindringen und somit zur Untergrundrate

<sup>1</sup>Das Prinzip des MAC-E-Filters bietet aufgrund des magnetischen Führungsfeldes eine *magnetische Abschirmung* des inneren Spektrometervolumens (d.h. des auf den Detektor abgebildeten Flusschlauches) gegenüber Elektronen, welche aus den Elektrodenoberflächen der Spektrometerhülle austreten. Unter bestimmten Bedingungen [Glü04a], etwa im Fall eines nicht vollkommen axialsymmetrischen Magnetfeldes, können solche Elektronen jedoch von Außen in den Flusschlauch gelangen.

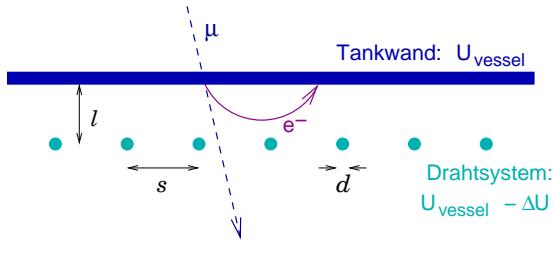


Abbildung 7.1: Prinzip der Untergrundreduktion durch eine masselose Schirmelektrode.  $l$  ist der Abstand des Drahtsystems von der Tankwand,  $s$  der Abstand zwischen je zwei Drähten und  $d$  der Drahtdurchmesser.  $\Delta U > 0$  ist der Potentialunterschied zwischen Voll- und Drahtelektrode.

beitragen. Mittels einer gegenüber der Tankwand auf negativerem Potential liegenden Innenelektrode kann das Elektron jedoch am Eintritt in den inneren Teil des Spektrometers gehindert werden. Hierzu wird die Elektrode während der gesamten Messzeit im Abschirm-Modus betrieben. Dieses Konzept ist allerdings nur dann wirkungsvoll, wenn die Innenelektrode nahezu masselos ist, da sie ansonsten selbst zu einer Quelle von Untergrundelektronen werden kann. „Masselos“ meint hier, dass der Drahtdurchmesser  $d$  sehr klein sein soll gegenüber dem Drahtabstand  $s$ , so dass sich eine möglichst geringe geometrische Abdeckung ergibt, welche durch den Parameter  $f_g = d/s$  beschrieben werden kann.

Studien zur Effizienz dieses Verfahrens wurden am Mainzer Spektrometer durchgeführt [Mül02, Fla04].

- 2) **Entfernen gespeicherter Teilchen (Dipol-Betriebsart).** In kurzen Pausen zwischen Messintervallen kann die Elektrode auch zur Erzeugung eines elektrischen Dipolfeldes  $\mathbf{E}$  eingesetzt werden, mit dessen Hilfe lokal gespeicherte Teilchen aus dem Fallenvolumen entfernt werden können. Das Prinzip beruht auf der sogenannten  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift, welche stets bei der Bewegung geladener Teilchen in nicht parallelen elektrischen und magnetischen Feldern auftritt. Die Driftgeschwindigkeit

$$v_{\text{drift}} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

ist dabei senkrecht zur Richtung der beiden Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Sie bewirkt eine asymmetrische Verformung der Trajektorie des gespeicherten Teilchens. Ist diese ausgeprägt genug, so kann das Teilchen schließlich aus dem sensitiven Spektrometervolumen entfernt werden (vgl. [Thü02]). Die Wirksamkeit dieser Methode wurde ebenfalls am Mainzer Experiment geprüft [Mül02, Fla04].

- 3) **Entkopplung des Retardierungspotentials vom elektronischen Rauschen an der Spektrometerhülle.** Durch die angeschlossenen Instrumente und Vakuumpumpen kann sich ein erhebliches elektronisches Rauschen an der Tankelektrode ergeben, welches sich negativ auf die Stabilität des Retardierungspotentials auswirkt. Wird die Filterspannung zu einem großen Teil mittels der inneren Elektrode erzeugt, so kann der Einfluss des Rauschens an der Tankelektrode unterdrückt werden. Als Voraussetzung ist hierfür jedoch eine extreme Stabilität der Spannung an der Innenelektrode erforderlich. Der Abschirmfaktor (*screening factor*)  $S$ , welcher bei diesem Verfahren eine zentrale Rolle spielt, wird im folgenden Abschnitt 7.2 erläutert.
- 4) **Feldformende Wirkung zur Abschirmung von Penningfallen.** In den Ecken des Spektrometertanks können Elektronen in Teilchenfallen nach Art einer Penningfalle gespeichert sein. Eine geeignet geformte Innenelektrode kann zur Verschließung oder Isolation dieser Fallengebiete beitragen.

Prinzipiell treffen alle in der Liste genannten Anwendungszwecke der Drahtelektrode sowohl für das Vor- als auch für das Hauptspektrometer zu, sie sind aber von unterschiedlicher Bedeutung für das Experiment. Die Hauptmotivation für den Einsatz einer Drahtelektrode beim Vorspektrometer besteht darin, dass es als „verkleinerte Version“ des Hauptspektrometers ideale Möglichkeiten zum Test neuer Konzepte bietet, welche später beim Betrieb des großen MAC-E-Filters Anwendung finden sollen.

## 7.2 Analytischer Abschirmungsfaktor

### 7.2.1 Abschirmung durch eine einzelne Lage von Drähten

Wie bereits erwähnt, hat die Drahtelektrode vom Spektrometerinneren aus gesehen gegenüber der weiter außen liegenden massiven Tankelektrode eine abschirmende Wirkung. In ausreichendem Abstand von beiden Elektroden stellt sich ein annähernd konstantes effektives Potential  $U_{\text{eff}}$  ein:

$$U_{\text{eff}} = U_{\text{wire}} + \delta U, \quad (7.1)$$

wobei der *Abschirmfaktor*  $S$  durch

$$\delta U = \frac{U_{\text{vessel}} - U_{\text{wire}}}{S} \quad (7.2)$$

definiert wird. Darin ist  $U_{\text{vessel}}$  das an der Tankelektrode und  $U_{\text{wire}}$  das an der Drahtelektrode anliegende Potential.

Nach Gl. (7.1) und (7.2) ergibt sich für die Schwankung des Analysierpotentials  $U_{\text{analys}}$ :

$$\Delta U_{\text{analys}} \equiv \Delta U_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{1}{S}\right) \cdot \Delta U_{\text{wire}} + \frac{1}{S} \cdot \Delta U_{\text{vessel}}. \quad (7.3)$$

Im Fall eines genügend großen Abschirmfaktors  $S$  stellt der zweite Summand keinen bedeutenden Beitrag mehr dar, während der Einfluss der Schwankung des Drahtelektrodenpotentials,  $\Delta U_{\text{wire}}$ , in voller Stärke erhalten bleibt. Daran erkennt man, dass eine Stabilisierung des Analysierpotentials mittels dieser Methode nur gelingen kann, wenn  $\Delta U_{\text{wire}}$  klein genug bleibt.

Es stellt sich nun die Frage, wodurch der Faktor  $S$  bestimmt ist und welche Kriterien zu seiner Optimierung angewandt werden können.

Für den Fall eines planparallelen Systems aus zwei als unendlich groß angenommenen Voll- und Drahtelektroden, ähnlich dem in Abb. 7.1 gezeigten Ausschnitt, lässt sich der Abschirmfaktor analytisch berechnen [Read, Glü03]. Das Koordinatensystem sei so festgelegt, dass die Elektroden in der  $x$ - $z$ -Ebene liegen, wobei die Drähte in  $z$ -Richtung unendlich lang ausgedehnt und entlang der  $x$ -Achse in konstanten Abständen  $s$  angeordnet seien. Die

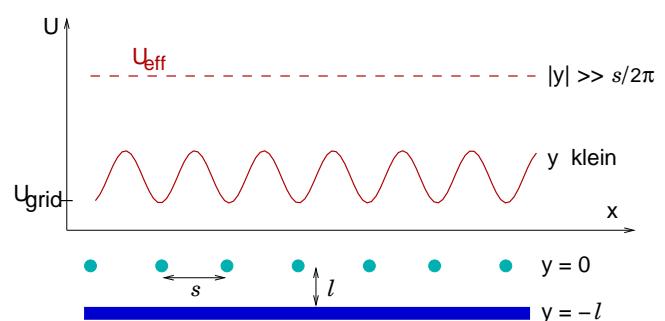


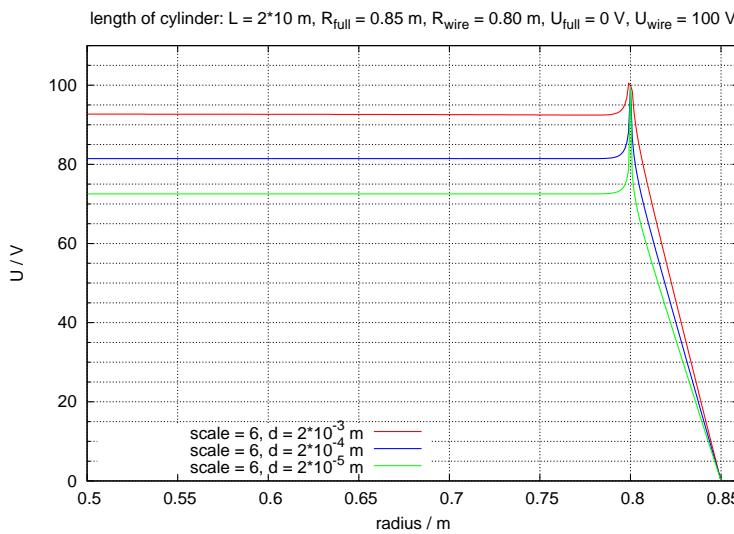
Abbildung 7.2: Potentialverlauf nahe und fern der planen Drahtelektrode.

Drahtelektrode befindet sich an der Position  $y = 0$  und die massive Platte relativ dazu bei  $y = -l$ . Der Drahtdurchmesser soll mit  $d$  bezeichnet werden. Es ist anschaulich klar, dass sich nahe der Drahtelektrode ein in  $x$ -Richtung periodisch variierendes elektrostatisches Potential ergibt, wobei die Periode gerade durch  $s$  gegeben ist (Abb. 7.2). Mit wachsender Entfernung  $y$  von den Elektroden wird diese Fluktuation jedoch durch einen exponentiellen Faktor  $\exp(-2\pi|y|/s)$  immer stärker unterdrückt, so dass sich für Abstände  $|y| \gg s/2\pi$  das in Gl. (7.1) genannte, nahezu homogene elektrostatische Potential ergibt, welches nur noch von  $y$  abhängt. Es gilt dann für den Abschirmfaktor:

$$S = 1 + \frac{2\pi l}{s \ln \frac{s}{\pi d}}. \quad (7.4)$$

Es hat sich gezeigt, dass diese analytische Formel in guter Übereinstimmung mit numerischen Kalkulationen für eine unendlich lange zylindrische Vollelektrode mit Radius  $R$  steht, welche eine ebenfalls zylindrische und unendlich lange Drahtelektrode mit Radius  $R - l$  umgibt, falls  $R \gg l$  gilt [Wei04, Glü03, Kat03a]. Da sich der reale Spektrometeraufbau jedoch lediglich aus einem endlichen zylindrischen Teil sowie zwei konischen Endkappen zusammensetzt, sind Abweichungen von der analytischen Formel zu erwarten.

Um diesen Sachverhalt näher zu untersuchen, wurde mit Hilfe der Ladungsdichtemethode (`e1cd3.c` → Abschn. 7.3) eine Testberechnung für einen 20 m langen Zylinder bestehend aus einer Vollelektrode mit Radius  $R = 0.85$  m und einer Drahtelektrode mit Radius  $R - l = 0.8$  m durchgeführt. Abbildung 7.3 zeigt den radialen Verlauf des Potentials in der Zylindermitte für verschiedene Drahtdurchmesser  $d$ . Im Zwischenraum der Elektroden zwischen  $r = R$  und  $r = R - l$  steigt es zunächst bis auf den Wert von  $U_{\text{wire}}$  an und stellt sich dann rasch auf den bis zu  $r = 0$  m annähernd konstant bleibenden Wert des effektiven Potentials  $U_{\text{eff}}$  ein. Anhand der Abbildung erkennt man, dass der Einfluss des Hüllpotentials für den größten Drahtdurchmesser ( $d = 2$  mm) bei ansonsten gleichen Parametern  $s$  und  $l$  am stärksten unterdrückt wird.



**Abbildung 7.3: Radialer Potentialverlauf eines langen Zylinders** aus einer Vollelektrode mit Radius  $R = 0.85$  m ( $U_{\text{vessel}} = 0$  V) und einer Drahtelektrode mit Radius  $R - l = 0.8$  m ( $U_{\text{wire}} = 100$  V). Die Berechnung wurde mit `e1cd3.c` für  $s = 2$  cm und drei verschiedene Drahtdurchmesser  $d$  durchgeführt. Bereits in einem sehr kleinen Abstand von der Drahtelektrode stellt sich das annähernd konstante Potential  $U_{\text{eff}}$  ein.

Aus  $U_{\text{eff}}$  kann mit Hilfe der Relation

$$S_{\text{numer}} = \frac{U_{\text{wire}} - U_{\text{vessel}}}{U_{\text{wire}} - U_{\text{equiv}}} \quad (7.5)$$

ein sogenannter numerischer Abschirmungsfaktor  $S_{\text{numer}}$  abgeleitet werden<sup>2</sup>. Ein Vergleich dieses numerischen und des analytischen Abschirmfaktors aus Gl. (7.4) ist in Tabelle 7.1 aufgeführt.

**Tabelle 7.1: Analytische und numerische Abschirmung im Fall eines langen Zylinders.** Aus dem berechneten effektiven Potential (Abb. 7.3) wurde gemäß Gl. (7.5) der numerische Abschirmungsfaktor ermittelt und mit dem für planparallele Elektroden analytisch herleitbaren Wert nach Gl. (7.4) verglichen. Es ergeben sich relative Abweichungen zwischen  $S_{\text{numer}}$  und  $S_{\text{analyt}}$  im Bereich von einigen Prozent, welche hauptsächlich auf den geometrischen Unterschied zwischen planparallelen und Zylinderelektroden zurückzuführen sind.

$d / \mu\text{m}$	2000	200	20
$U_{\text{eff}} / \text{V}$	92.744	81.463	72.526
$S_{\text{numer}}$	13.782	5.395	3.640
$S_{\text{analyt}}$	14.566	5.539	3.726
rel. Abweichung in $S$	5.4 %	2.6 %	2.3 %

### Optimierung von $S$ anhand der Parameter $s$ , $d$ und $l$

Um  $S$  zu maximieren, sollten nach Gleichung (7.4)  $d$  und  $l$  möglichst groß,  $s$  hingegen klein sein. Es gibt jedoch noch andere Kriterien, welche diese drei Parameter der Drahtelektrode einschränken. Da Feldemission von Elektronen aus den Drähten vermieden werden soll, ist eine möglichst geringe elektrische Feldstärke an der Drahtoberfläche erforderlich. Diese kann abgeschätzt werden [Glü03] durch

$$E_{\text{surf, wire}} = \frac{U_{\text{vessel}} - U_{\text{wire}}}{l} \frac{s}{\pi d}. \quad (7.6)$$

Zur Minimierung von  $E_{\text{surf, wire}}$  werden also gerade die gleichen Bedingungen an  $s$ ,  $d$  und  $l$  gestellt, die sich zum Erreichen eines möglichst großen Abschirmfaktors als notwendig erwiesen haben. Zusätzlich ist allerdings noch die bereits erwähnte Forderung nach einer geringen geometrischen Abdeckung durch die Drähte zu beachten, welche  $d \ll s$  impliziert. Da diese z.T. widersprüchlichen Bedingungen nicht alle gleichzeitig erfüllt werden können, ist es erforderlich, einen geeigneten Kompromiss zu suchen. Durch einen großen Abstand  $l$  oder durch Berücksichtigung einer zweiten Lage von Drähten lässt sich ein größerer Spielraum bei der Wahl der Parameter  $d$  und  $s$  erreichen.

### 7.2.2 Abschirmung durch eine Doppel Lage von Drähten

Abbildung 7.4 zeigt den Querschnitt eines aus zwei Drahtlagen zusammengesetzten Innenelektrodensystems für den Fall einer zylindrischen Elektrodengeometrie. Die beiden Lagen werden durch die Parametersätze  $l_1, s_1$  und  $d_1$  bzw.  $l_2, s_2$  und  $d_2$  beschrieben. Es sei  $\Delta U_1$  die Potentialdifferenz zwischen der außen liegenden Vollelektrode und der ersten Drahtlage und  $\Delta U_2$  die Potentialdifferenz der zweiten Drahtlage relativ zur ersten. Ein solches Doppellegensystem bietet gegenüber der Konfiguration mit nur einer Drahtschicht verschiedene Vorteile, welche im Folgenden erläutert werden sollen.

<sup>2</sup>Als effektives Potential wurde der berechnete Potentialwert im Zentrum des Zylinders bei  $(z = 0, r = 0)$  verwendet.

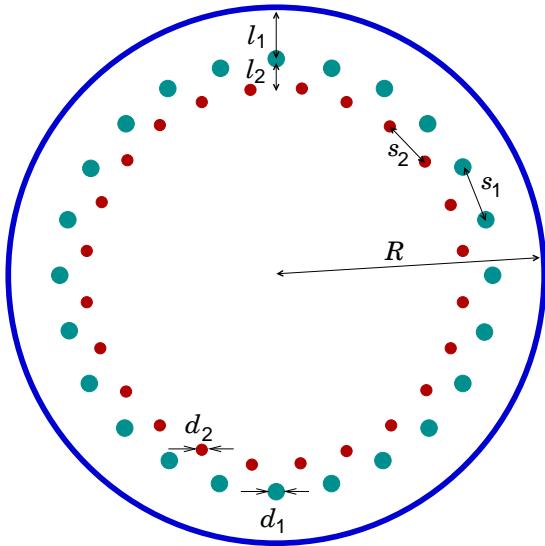


Abbildung 7.4: Aufbau einer zylindrischen Innenelektrode aus zwei konzentrischen Schichten mit Drähten von unterschiedlichem Durchmesser. Der Radius der massiven Zylinderelektrode ist  $R$ , der der ersten Drahtschicht  $R - l_1$  und der der inneren Drahtschicht  $R - (l_1 + l_2)$ . Die Drähte der inneren Lage sind gegenüber den weiter außen liegenden in azimutaler Richtung versetzt angebracht.

- **Geringe geometrische Abdeckung**

Ist – wie in Abb. 7.4 angedeutet – der Drahtdurchmesser in der inneren Lage wesentlich kleiner als in der Außenschicht, so kann die zweite Lage aufgrund ihrer geringeren geometrischen Abdeckung  $f_{g,2} = d_2/s_2$  als Abschirmung des Spektrometers von Elektronen dienen, welche aus der Oberfläche der dickeren Drähte austreten. Voraussetzung hierfür ist, dass die zweite Schicht auf negativerem Potential gegenüber der ersten Schicht liegt. Dieser Vorteil kommt besonders dann zum Tragen, wenn die zur Aufhängung der Innenelektrode benötigten massiven Haltestrukturen lediglich an der äußeren Drahtlage angreifen. Die dünnen Drähte der inneren Lage müssten dann so befestigt werden, dass sie gleichzeitig eine Abschirmung gegenüber der Aufhängung bewirken.

- **Hoher Abschirmfaktor**

Ein weiterer Vorzug besteht darin, dass sich mit zwei Drahtlagen sehr hohe Abschirmfaktoren  $S$  gegenüber der Vollelektrode leichter erreichen lassen. Nach Gl. (7.1) und (7.2) ergibt sich durch die Wirkung der äußeren Drahtelektrode das Effektivpotential

$$U_{\text{eff},1} = U_{\text{wire},1} + \frac{U_{\text{vessel}} - U_{\text{wire},1}}{S_1}, \quad (7.7)$$

wobei der Abschirmfaktor  $S_1$  von den Parametern  $l_1$ ,  $s_1$  und  $d_1$  abhängt<sup>3</sup>. Um nun das resultierende Potential im Inneren des Zylinders zu erhalten, muss noch die Abschirmwirkung der zweiten Drahtschicht berücksichtigt werden, welche auf das Potential  $U_{\text{eff},1}$  wirkt [San03]:

$$U_{\text{eff},2} = U_{\text{wire},2} + \frac{U_{\text{eff},1} - U_{\text{wire},2}}{S_2}. \quad (7.8)$$

Der Abschirmfaktor  $S_2$  wird durch  $l_2$ ,  $s_2$  und  $d_2$  bestimmt. Hier wird vorausgesetzt, dass der Abstand zwischen den beiden Drahtlagen groß genug ist, so dass an der Position der zweiten Schicht anstelle der Potentiale  $U_{\text{vessel}}$  und  $U_{\text{wire},1}$  nur noch das konstante Effektivpotential  $U_{\text{eff},1}$  wirkt.

<sup>3</sup>Es ist zu beachten, dass die analytische Formel (7.4) für  $S$  streng genommen nur für den Fall planparalleler Elektroden gilt.

Durch Einsetzen von Gl. (7.7) in (7.8) findet man:

$$U_{\text{eff},2} = U_{\text{wire},2} + \frac{1}{S_2} \left( U_{\text{wire},1} + \frac{U_{\text{vessel}} - U_{\text{wire},1}}{S_1} - U_{\text{wire},2} \right). \quad (7.9)$$

An dieser Gleichung erkennt man, dass durch die kombinierte Wirkung *beider* Abschirmfaktoren  $S_1$  und  $S_2$  der Einfluss des Tankpotentials  $U_{\text{vessel}}$  auf das resultierende Potential  $U_{\text{eff},2}$  im Inneren des Zylinders nur noch sehr gering ist. Der Spezialfall  $U_{\text{wire},1} = U_{\text{wire},2} \equiv U_{\text{wire}}$  (d.h.  $\Delta U_2 = 0$ ) führt zu einer besonders einfachen Form des Gesamtabschirmungsfaktors  $S$ :

$$U_{\text{eff},2} = U_{\text{wire}} + \frac{U_{\text{vessel}} - U_{\text{wire}}}{S}, \quad \text{mit } S = S_1 \cdot S_2. \quad (7.10)$$

### 7.3 Werkzeuge zur Simulation der Drahtelektrode

Durch das Hinzufügen einer Innenelektrode, bestehend aus einer großen Anzahl dünner Drähte, steigen die Anforderungen an die zur Berechnung des elektrostatischen Feldes verwendeten Computerprogramme. Eine grundlegende Schwierigkeit besteht darin, bei der Diskretisierung der Elektrodenoberflächen die großen Dimensionen der Tankelektrode mit den kleinskaligen Details der Drahtelektrode zu vereinen, ohne dabei das Modell so weit aufzublähen, dass es sich nicht mehr in akzeptablen Rechenzeiten bzw. mit dem vorhandenen Speicherplatz simulieren lässt.

Um zusätzlich zu den massiven Elektroden auch die Drähte in die Potentialberechnung einbeziehen zu können, wurden von Dr. F. Glück neue Routinen entwickelt, welche in `elcd3.c` enthalten sind. Im Flussdiagramm auf S. 35 kann daher `elcd2.c` durch das umfassendere `elcd3.c` ersetzt werden. Nach wie vor wird das Spektrometer in zwei spiegelsymmetrische Hälften mit der Analysierebene ( $z = 0$ ) als Spiegelebene unterteilt und außerdem die Axialsymmetrie bezüglich der Längsachse ( $z$ -Achse) berücksichtigt. Aus `elcd2.c` wird das Diskretisierungsverfahren für die massiven Elektroden mittels konischer Teilstücke übernommen, die über ihre Projektion in der  $z$ - $r$ -Ebene definiert sind. Die Drähte werden durch Linienelemente approximiert. Diese Näherung ist gerechtfertigt, falls der Drahtdurchmesser klein ist verglichen mit den übrigen Längenskalen, welche bei der Simulation eine Rolle spielen (etwa Drahtlänge, Drahtabstand, Elektrodenabstände etc.). Dabei wird stets nur ein einziger Draht mittels seiner Endpunkte ( $z_A, r_B$ ) und ( $z_B, r_B$ ) spezifiziert, die übrigen werden durch eine diskrete  $n$ -fache Rotationssymmetrie automatisch ergänzt, wobei  $n$  die Gesamtzahl der Drähte in dem betrachteten Segment ist. Wie schon bei den Vollelektroden wird auch hier zunächst die Ladungsdichte der einzelnen Elektrodenbestandteile aus ihrer Potentialbelegung berechnet. Durch die Ausnutzung der Rotationssymmetrie ist lediglich die Berechnung der Linienladungsdichte entlang *eines* Drahtes erforderlich, was die Simulation gerade bei großen Drahtzahlen im Bereich von einigen Hundert bis Tausend stark vereinfacht.

Der Benutzer definiert im Hauptprogramm als globale Variablen die  $z$ -Position `zmirror` der Spiegelebene und die Zahl `indexwire`, welche die Werte 0 oder 1 haben kann und dadurch angibt, ob in der Geometrie nur Vollelektroden oder auch Drähte vorkommen. Durch den Aufruf der Funktion `elcd3` wird die Berechnung gestartet. Folgende Parameter werden für diesen Aufruf benötigt:

<code>scale</code>	Positive ganze Zahl, mit der die Anzahl der Subelemente pro Segment skaliert wird. Mit wachsendem <code>scale</code> erhöhen sich sowohl die Genauigkeit als auch die Dauer der Berechnung.
<code>power</code>	Wie in <code>elcd2.c</code> , bestimmt die Verteilung der Subelemente pro Segment.
<code>z0min, z0max</code>	Minimale und maximale $z$ -Position der Quellpunkte.
<code>delz0</code>	Abstand zwischen je zwei Quellpunkten.
<code>inputfullelectrode</code>	Bezeichnung der Textdatei, welche die Vollelektroden-Geometrie enthält.
<code>inputwireelectrode</code>	Bezeichnung der Textdatei, welche die Drahtelektroden-Geometrie enthält.

Für die Geometrie-Eingabedateien ist ein spezielles Format erforderlich. Als erste Zahl muss jeweils die Anzahl der konischen Vollektrodensegmente bzw. analog dazu die Anzahl der Draht-Linienelemente in der  $z-r$ -Ebene angegeben werden. Im Fall der massiven Elektroden wird für jedes Segment eine Zeile mit sechs Parametern erwartet (Tab. 7.2). Für die Drahtelektroden sind insgesamt neun Parameter pro Segment erforderlich (Tab. 7.3).

**Tabelle 7.2: Eingabeparameter für die Vollelektrodenkonfiguration.**

$z_A$ [m]	kleinste $z$ -Position,
$r_A$ [m]	kleinste $r$ -Position,
$z_B$ [m]	größte $z$ -Position,
$r_B$ [m]	größte $r$ -Position,
$U$ [V]	Potential des konischen Segments,
num	ganze Zahl, welche mit <code>scale</code> multipliziert die Anzahl der Subelemente dieses Segments ergibt.

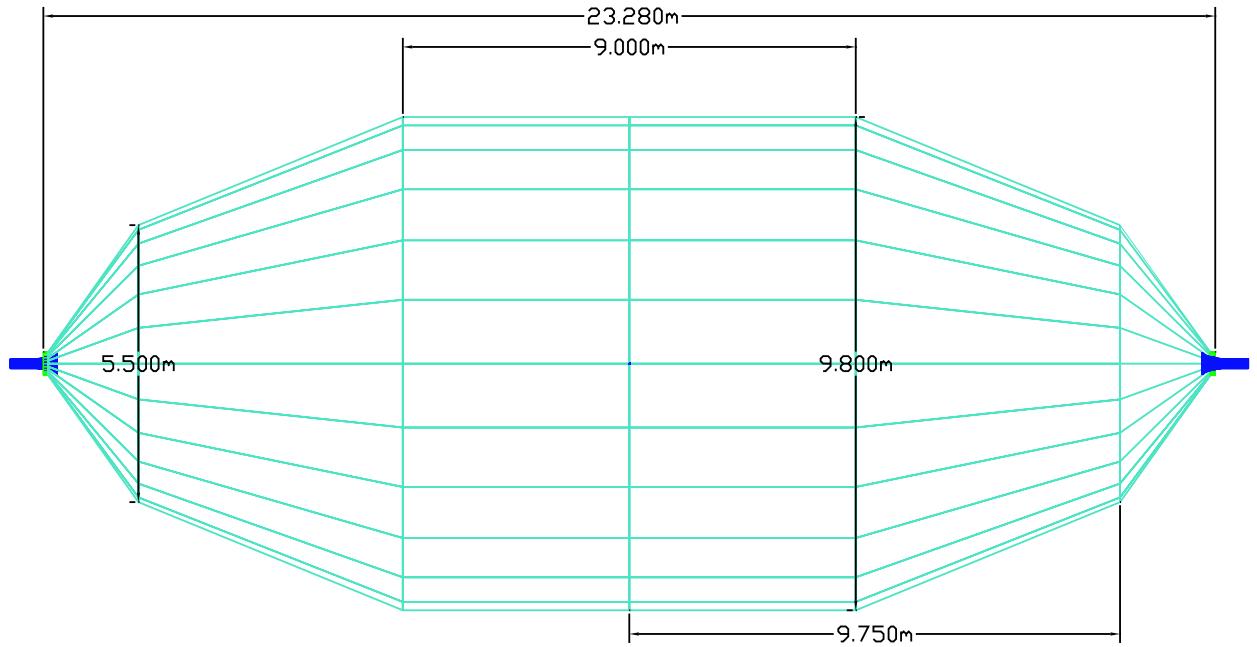
**Tabelle 7.3: Eingabeparameter für die Drahtelektrodenkonfiguration.**

$z_A$ [m]	kleinste $z$ -Position,	$\text{phi1}$ [°]	azimutale Position des ersten Drahtes,
$r_A$ [m]	kleinste $r$ -Position,	$\text{Numwire}$	Gesamtzahl der Drähte dieses Segments,
$z_B$ [m]	größte $z$ -Position,	$U$ [V]	Potential des Drahtes,
$r_B$ [m]	größte $r$ -Position,	num	ganze Zahl, welche mit <code>scale</code> multipliziert die Anzahl der Subelemente ergibt.
$d$ [m]	Drahtdurchmesser,		

Die Schritte, welche in der Funktion `elcd3` abgearbeitet werden, sind prinzipiell die gleichen wie bei der bisherigen Berechnung mit Vollelektroden:

- 1) Einlesen der Voll- und Drahtelektrodengeometrie sowie Diskretisierung der Elektroden mittels kleiner Subelemente;
- 2) Kalkulation der Ladungsdichten: Die Geometrieparameter, Potential- und Ladungsdichtewerte der Subelemente werden in die Datei `element.dat` geschrieben;
- 3) Berechnung der Quellpunktpositionen sowie Kalkulation der Quellkoeffizienten  $\phi_n$  in diesen Punkten: Es erfolgt eine Ausgabe der Ergebnisse in die Datei `elsource.dat`.

Bei der Bahnverfolgung geladener Teilchen fern der Elektroden (z.B. innerhalb des Flusschlauches) kann weiterhin die Routine `elfield` aus `field.c` genutzt werden, um das elektrische Potential aus den Quellkonstanten zu berechnen.



**Abbildung 7.5: Hüllenform des 24-m-Spektrometers unter Berücksichtigung der Innenelektrode.** Dargestellt sind die Kontur der Tankelektrode (hellblau) und ein Teil der Erdelektroden (dunkelblau). Die Distanz zwischen den Zentren der beiden Hauptspektrometermagnete beträgt 24 m, die Gesamtlänge der Hüllenelektrode jedoch nur 23.28 m. Der Tankinnendurchmesser im zylindrischen Teil wurde von 9.5 m auf 9.8 m erweitert, um Platz für die Innenelektrode zu lassen, welche als mehrschichtige Drahtelektrode ausgelegt werden soll.

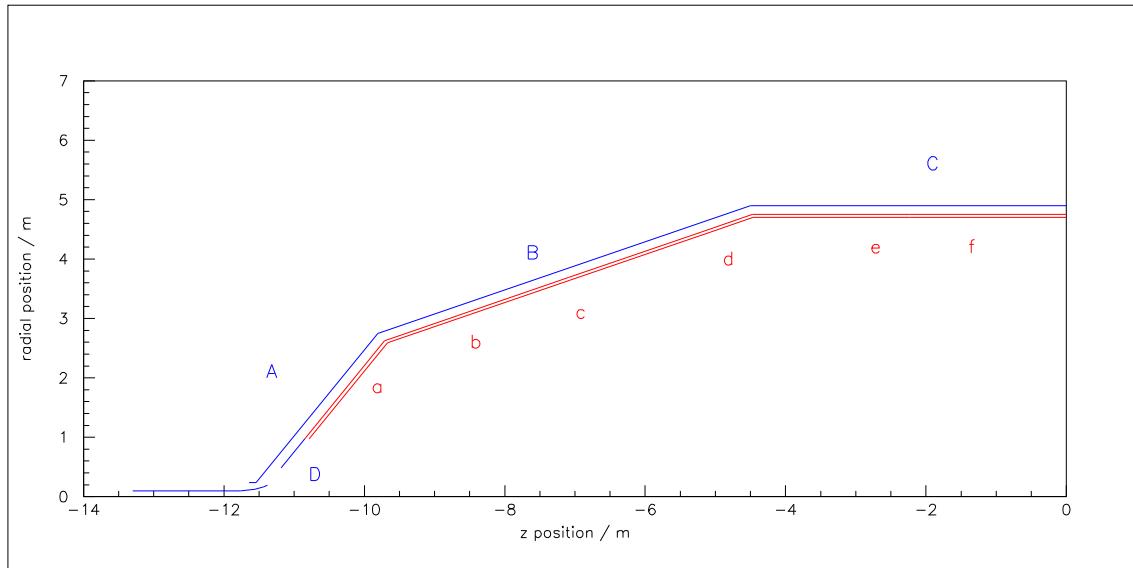
## 7.4 Konzeption einer Drahtelektrodengeometrie für das Hauptspektrometer

In diesem Abschnitt soll ein erster Entwurf für die Innenelektrode des KATRIN Hauptspektrometers vorgestellt werden. Es handelt sich dabei um ein stark vereinfachtes Modell, bei dem wichtige Details wie z.B. die Haltestrukturen der Drahtelektroden noch nicht berücksichtigt wurden. Solche detaillierten Simulationsrechnungen sind sehr aufwendig und konnten im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht umfassend behandelt werden.

Im gesamten Aufbau des KATRIN Experiments soll ein magnetischer Fluss von  $\Phi = 191 \text{ T cm}^2$  transportiert werden. Daher ist bei der Festlegung der Position der innersten Elektrodenenschicht im Hauptspektrometer zu beachten, dass in der Analysierebene bei einer Magnetfeldstärke von  $\approx 3$  Gauß stets ein nutzbarer Flussschlauch mit Radius  $r_\Phi = 4.5 \text{ m}$  zur Verfügung stehen muss. In der bisherigen Geometrie beträgt der Innenradius des Spektrometertanks im zylindrischen Teil 4.75 m. Um genügend Platz für die (voraussichtlich aus mehreren Drahtschichten bestehende) Innenelektrode zu lassen, ist es notwendig, den Tankinnenradius auf 4.9 m zu erhöhen (siehe Abbildung 7.5), insbesondere im Hinblick darauf, dass zwischen dem genutzten Flussschlauch und der innersten Elektrodenenschicht ein gewisser Abstand erhalten bleiben sollte (vgl. Anmerkung zur magnetischen Abschirmung auf S. 97).

Abbildung 7.6 zeigt den Schnitt einer Elektrodenkonfiguration des Hauptspektrometers, welche aus der Tankhülle, der Erdelektrode und zwei Lagen von – in diesem Entwurf – überall parallel und in gleichem Abstand verlaufenden Drahtelektroden besteht. Das Segment im innersten Teil des Konus (Teil D) befindet sich in einem Bereich eines sehr hohen elektrischen Feldstärkegradienten. Es soll aus massivem Elektrodenmaterial bestehen, da so die Gefahr

der Feldemission gegenüber der Verwendung von dünnen Drähten minimiert wird. Sämtliche rot dargestellten Drahtelektroden sind in Längsrichtung unterteilt, so dass die Segmente mit unterschiedlichem Potential belegt werden können. Tabelle 7.4 fasst die wichtigsten Daten dieser Konfiguration zusammen<sup>4</sup>.



**Abbildung 7.6: Entwurf eines Doppelagen-Drahtelektrodensystems für das Hauptspektrometer.** Die Konturen der beiden Drahtlagen sind rot eingezeichnet, alle massiven Elektroden blau. Zu letzteren gehören sowohl die Erd- und Tankelektrode als auch die Segmente der Innenelektrode, welche sich im Bereich besonders hoher elektrischer Feldgradienten befinden. — Die erste Drahtlage hat in diesem Entwurf einen konstanten Abstand von  $l_1 = 15$  cm von der Außenhülle, für die zweite Lage beträgt der Abstand  $l_1 + l_2 = 20$  cm.

Tabelle 7.4: Konfigurationsparameter der Doppelagen-Drahtelektrode.

	$l$ / cm	$d$ / mm	$s$ / cm	$\Delta U$ / V	$S_{\text{analyt}}$	$\Delta U$ / V (Dipol)	$E_{\text{surf}}^{\max}$ / MV m
Lage 1	15	0.5	2.5	100	$\approx 14.6$	1000	$\approx 0.11$
Lage 2	5	0.15	$\approx 2.5$	100	$\approx 4.2$	0	$\approx 0.11$

In diesem Designvorschlag ist im Dipol-Modus ein Betrieb beider Drahtlagen an gleichem Potential vorgesehen (d.h.  $\Delta U_2 = 0$  V), und zwar soll dieses Potential der Drahtelektroden etwa 1 kV negativer sein als das der Tankwand. Im Abschirm-Modus hingegen sollen  $\Delta U_1$  und  $\Delta U_2$  je 100 V betragen.

Der Drahtdurchmesser  $d_1 = 0.5$  mm ist so gewählt, dass die elektrische Feldstärke an der Drahtoberfläche der ersten Elektrode auch bei Anliegen der vollen Potentialdifferenz gegenüber der Hülle im Dipol-Betrieb mit  $E_{\text{surf, wire}, 1} \approx 1.1 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 0.11 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$  klein genug bleibt, um Feldemission von Elektronen zu vermeiden<sup>5</sup>. Unter der Annahme, dass Gl. (7.6) bei Ersetzen von  $U_{\text{vessel}}$  durch  $U_{\text{wire}, 1}$  näherungsweise für die Feldstärke an der Drahtober-

<sup>4</sup>Es ist zu beachten, dass der Drahtabstand in der zweiten Lage aufgrund des geringeren Radius nicht exakt  $s = 2.5$  cm misst. Die Drahtanzahl soll in beiden Schichten identisch sein, damit die Drähte genau versetzt gegeneinander platziert werden können. Dadurch ist  $s_2$  geringfügig kleiner als  $s_1$ , und zwar genau um  $R_1/R_2$ .

5 Die am Mainzer Experiment empirisch gefundene Grenze liegt in etwa bei  $E_{\text{surf, wire}} = 0.4 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$  [Katt03a]. Dieser Wert lässt sich im Allgemeinen durch Verwendung spezieller Drahtmaterialien hoher Qualität und Oberflächengüte deutlich steigern. Für diesen ersten Designvorschlag der Hauptspektrometer-Drahtelektrode soll jedoch der Wert von  $E_{\text{surf, wire}} = 0.4 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$  als Anhaltspunkt genommen werden.

fläche der zweiten Lage gültig ist, ergibt sich im Abschirm-Modus mit  $\Delta U_2 = 100$  V ebenfalls ein Wert von  $E_{\text{surf, wire,2}} \approx 0.11 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$ . Auch im Dipol-Betrieb sind bei den in Tabelle 7.4 angegebenen Parametern für die zweite Lage keine Probleme zu erwarten; die Oberflächenfeldstärke sollte aber noch durch Simulationsrechnungen geprüft werden.

Der geometrische Abdeckungsfaktor  $f_g = d/s$  ist im Fall der zweiten Drahtlage mit  $f_{g,2} = 0.6\%$  entsprechend den Anforderungen kleiner als für die erste Lage ( $f_{g,1} = 2\%$ ).

Es erweist sich als nichttriviale Aufgabe, eine geeignete Potentialbelegung der einzelnen Drahtelektrodensegmente zu finden. Grundsätzlich sind die Angaben über  $\Delta U$  in Tab. 7.4 als grobe Richtwerte anzusehen; der Tank liegt im Abschirm-Modus an  $U_{\text{vessel}} = -18.4$  kV, die erste Drahtlage etwa an  $U_{\text{wire,1}} = -18.5$  kV und die zweite Lage an  $U_{\text{wire,2}} = -18.6$  kV. Das effektive Potential, welches sich im Spektrometerinneren einstellt, wird aufgrund des endlichen Abschirmungsfaktors etwas positiver sein als  $U_{\text{wire,2}}$ . Problematisch ist jedoch, dass  $U_{\text{eff}}$  entlang der Oberfläche der zweiten Drahtelektrode nicht konstant ist, so wie es für eine massive Elektrode der Fall ist, für die das Hauptspektrometerdesign optimiert wurde (vgl. Kapitel 6, einführende Bemerkung auf S. 71). Dies sieht man leicht dadurch ein, dass bei gleicher Drahtanzahl der Abstand der einzelnen Drähte im konischen Teil zu den Enden hin immer geringer wird, so dass sich der Abschirmfaktor entlang eines Segmentes erhöht. Dies wiederum führt im Bereich kleinerer Drahtabstände zu einem negativeren effektiven Potential. Eine Kompensation dieses unerwünschten Effekts ist prinzipiell auf mehreren Wegen möglich: zum einen durch eine geeignete Wahl unterschiedlicher Potentiale für die einzelnen Segmente der Drahtelektrode, zum anderen durch eine Variation der Parameter  $l$  und  $s$ , wobei auch Drahtsegmente zugelassen werden, welche nicht parallel zur Tankwand verlaufen. Im Folgenden sollen zwei Vorschläge basierend auf diesen beiden unterschiedlichen Methoden diskutiert werden.

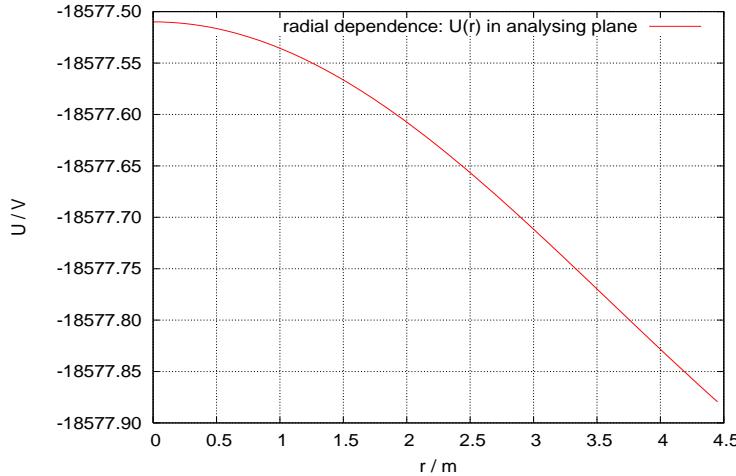
### a) Unterschiedliche Potentialbelegung bei gleich bleibendem $l$ und $s$

Eine mögliche Potentialbelegung der verschiedenen in Abb. 7.6 gekennzeichneten Segmente ist in Tabelle 7.5 angegeben. Diese Werte wurden im Hinblick auf den Longitudinalenergieverlauf der Elektronen innerhalb des Flussschlauches optimiert unter der gleichzeitigen Bedingung, dass die Potentialinhomogenität in der Analysierebene nicht zu groß wird. Die Einstellungen ergeben eine radiale Veränderung des Analysierpotentials um weniger als 0.4 V entlang der Analysierebene (siehe Abb. 7.7).

**Tabelle 7.5: Daten der verschiedenen Elektrodensegmente nach Abb. 7.6.**

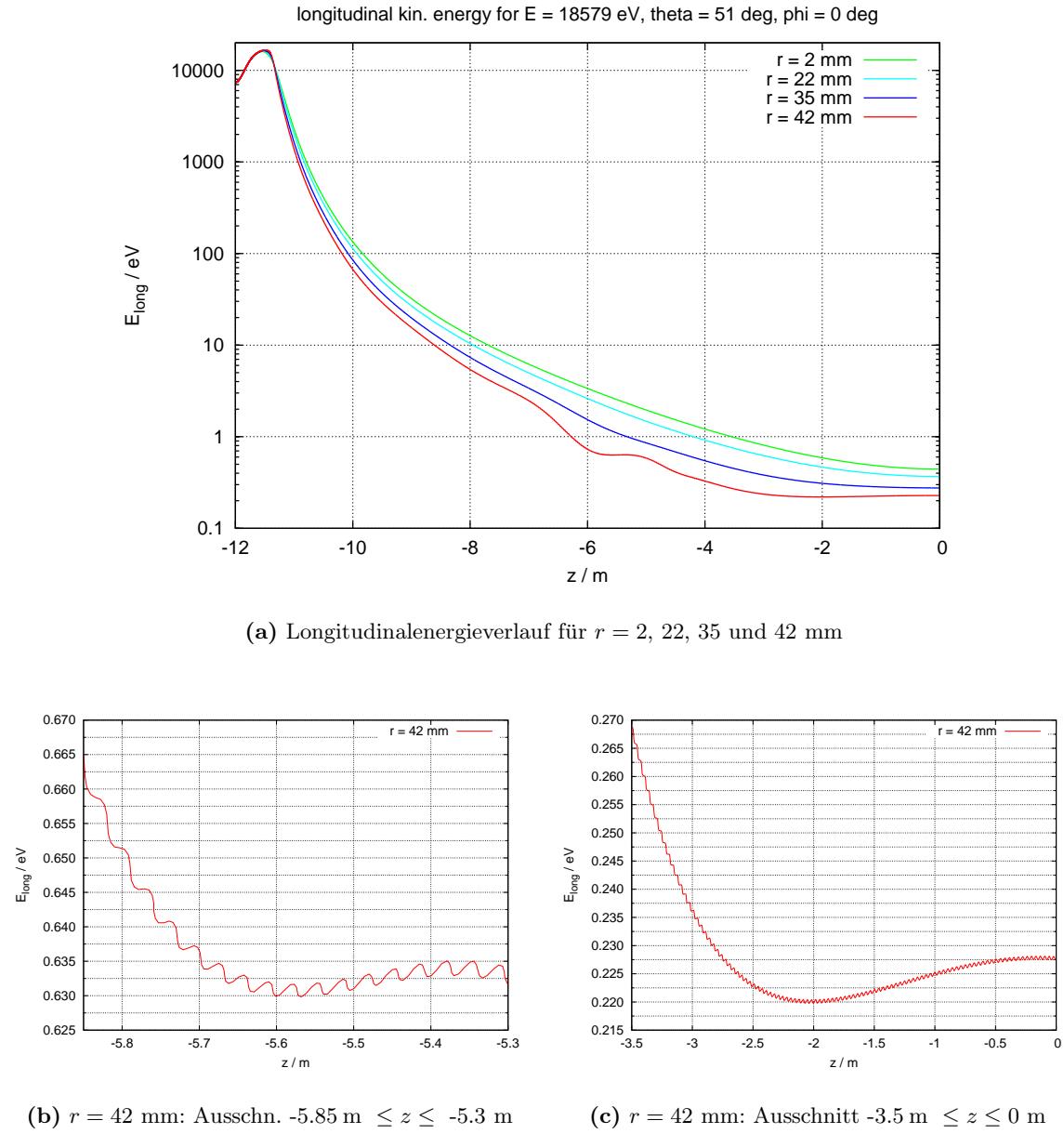
Segment	Art	Potential / kV äußere Lage (1)	Potential / kV innere Lage (2)	# Drähte (1 & 2 gleich)
A, B, C, D	massiv	-18.400	—	—
a	Draht	-18.470	-18.570	1194
b	Draht	-18.490	-18.590	1194
c	Draht	-18.497	-18.597	1194
d, e, f	Draht	-18.500	-18.600	1194

Abbildung 7.8 zeigt, wie sich der Verlauf der Longitudinalenergie durch das Einfügen der beiden Drahtelektrodenschichten verändert. Die Elektronenbahnen im Zentrum des Flussschlauches werden nicht sichtbar beeinflusst, bei den außen verlaufenden Elektronen ( $r_{\text{start}} = 42$  mm) ergeben sich jedoch an zwei Stellen Probleme bei der Transmission. In dem Bereich



**Abbildung 7.7: Homogenität des Retardierungspotentials in der Analysierebene** für einen ersten Entwurf des Hauptspektrometers mit zwei parallelen Drahtelektroden. Die verwendete Geometrie der Elektroden ist in Abb. 7.6 dargestellt, die Potentialbelegung wird in Tab. 7.5 angegeben. Es wird eine radiale Potentialveränderung der Größe  $\lesssim 0.4$  V entlang der Analysierebene erreicht.

wenige Meter vor der Analysierebene tritt das bekannte Problem der zu frühen Retardierung auf, wobei die Abweichung vom idealen Longitudinalenergieverlauf  $\delta E_{\parallel} \approx 8$  meV beträgt. Hinzu kommt ein weiteres lokales Minimum der Longitudinalenergie an der Position  $z \approx -5.6$  m, was etwa dem Bereich am Übergang vom schrägen Konusteil zum horizontalen Zylinderteil der Elektrode entspricht. Um die Differenz zwischen dem Abfall und anschließenden leichten Wiederanstieg von  $E_{\parallel}$  möglichst auszugleichen, wurden verschiedene Potentialbelegungen getestet. Es konnte eine Einstellung gefunden werden, bei der immer noch eine kleine Differenz  $\delta E_{\parallel} \approx 5$  meV übrig bleibt. Es existiert hier also eine kleine, aber unerhebliche Penningfalle.



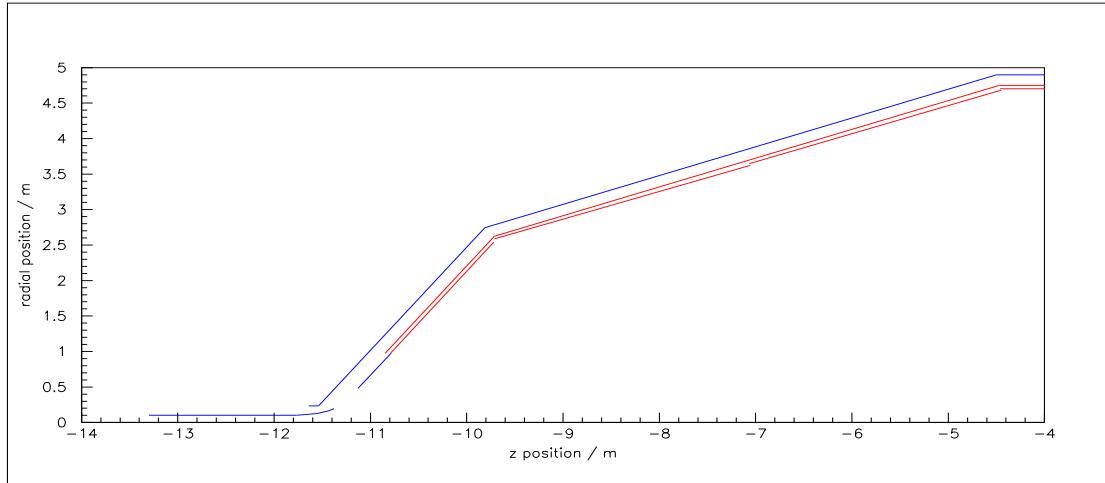
**Abbildung 7.8: Longitudinalenergieverlauf für einen ersten Drahtelektrodenentwurf mit zwei Lagen (ohne Startenergiekorrektur).** (a) Gesamtansicht der Bahn vom Startpunkt im Eingangsmagneten bis zur Analysierebene. Es gibt für Elektronen mit hohem Startwinkel und großem Startradius zwei kritische Stellen, welche in separaten Ausschnittsgrafiken dargestellt werden: (b) der Bereich am Übergang zwischen Zylinder- und Konusteil bei  $z \approx -5.6$  m mit einer Amplitude von  $\delta E_{\parallel} \approx 5$  meV und (c) die Region einige Meter vor Erreichen der Analysierebene (d.h. der Bereich, in dem typischerweise zu frühe Retardierung auftritt) mit  $\delta E_{\parallel} \approx 8$  meV.

### b) Gleiche Potentialbelegung bei variierendem $l$ und $s$

Abbildung 7.9 gibt die Geometrie eines Alternativentwurfs wieder, bei dem in Lage 2

- 1) die Drahtzahl (bzw. der Abstand  $s_2$ ) von Segment zu Segment verändert wird, sowie
- 2) der Abstand  $l_2$  zur ersten Drahtlage innerhalb eines Segments variiert.

Die erste Lage verläuft weiterhin überall parallel und in gleichem Abstand zur Tankwand; auch die Anzahl der Drähte ist in jedem Segment gleich.



**Abbildung 7.9: Design einer doppelagigen Drahtelektrode mit variierendem  $l$  und  $s$ .** Im Zylinderteil sind die Abstände zwischen den Lagen und die Drahtzahlen weiterhin konstant (hier ist die Konfiguration nur im Bereich  $-14 \text{ m} \leq z \leq -4 \text{ m}$  gezeigt).

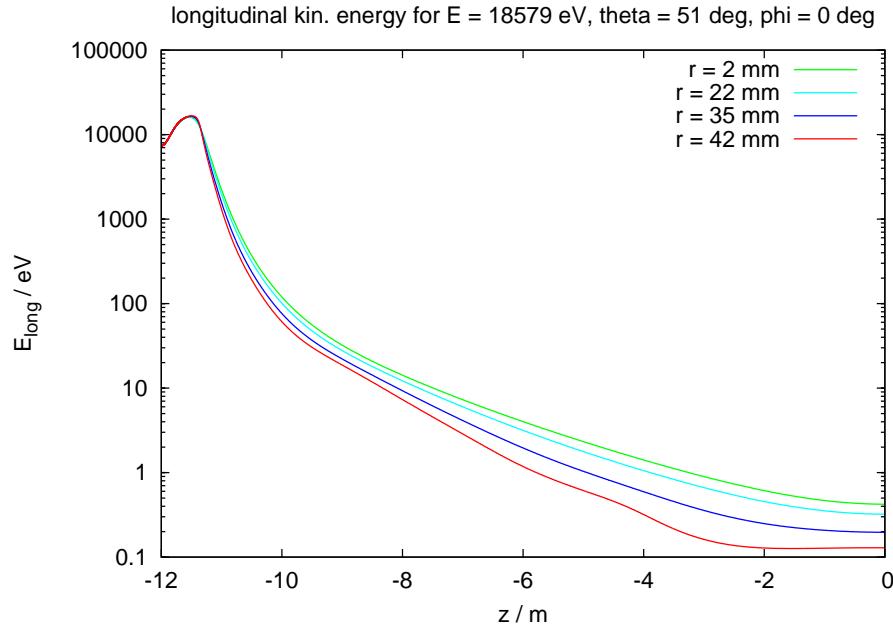
Das Ziel ist es, einen möglichst konstanten Abschirmfaktor entlang der inneren Drahtschicht zu erreichen. Durch das veränderliche  $l_2$  und  $s_2$  können alle Elektrodensegmente innerhalb einer Lage mit demselben Potential  $U_1$  bzw.  $U_2$  belegt werden, was die Anzahl der benötigten Kanäle der Hochspannungsversorgung am Experiment reduziert. Außerdem ist verglichen mit dem ersten Entwurf eine deutlich kleinere Gesamtzahl von Drähten erforderlich. Potentialbelegung und Drahtteilung dieses Alternativdesigns können Tabelle 7.6 entnommen werden.

**Tabelle 7.6: Daten der verschiedenen Elektrodensegmente nach Abb. 7.9.** Die Segmente sind analog zu dem in Abb. 7.6 gezeigten Entwurf benannt; die Teile c und d aus dem ersten Entwurf bilden hier gemeinsam das Segment c'. Die Anzahl der Drähte verteilt sich auf die in der rechten Spalte angegebene Zahl von Paneelen, deren Einteilung der in Abb. 7.11 gezeigten entspricht. In dieser Konfiguration entfallen z.B. im zylindrischen Teil 60 Drähte auf jedes der 20 Paneele pro Ringsegment.

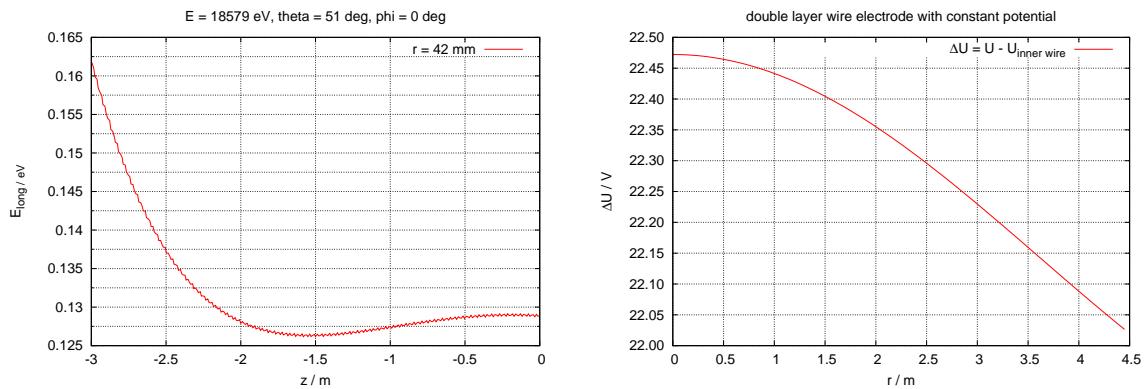
Segment	Art	Potential / kV außen (1)	Potential / kV innen (2)	# Drähte außen (1)	# Drähte innen (2)	# Paneele
A', B', C'	massiv	-18.400	—	—	—	—
D'	massiv	-18.450	—	—	—	4
a'	Draht	-18.500	-18.600	1200	228	12
b'	Draht	-18.500	-18.600	1200	656	16
c'	Draht	-18.500	-18.600	1200	920	20
e', f'	Draht	-18.500	-18.600	1200	1200	20

Abbildung 7.10 gibt einen Überblick über die Ergebnisse des veränderten Drahtelektroden- designs. Die Transmissionseigenschaften dieses Entwurfs sind besser als die des vorherigen.

Die Penningfalle etwa 5.6 m vor der Analysierebene ist nicht mehr vorhanden, und auch das Problem der zu frühen Retardierung ist mit einer Abweichung von  $\delta E_{\parallel} \approx 3$  meV kaum nennenswert. Die Potentialhomogenität in der Analysierebene ist ebenfalls gut.



(a) Longitudinalenergieverlauf für  $r = 2, 22, 35$  und  $42$  mm



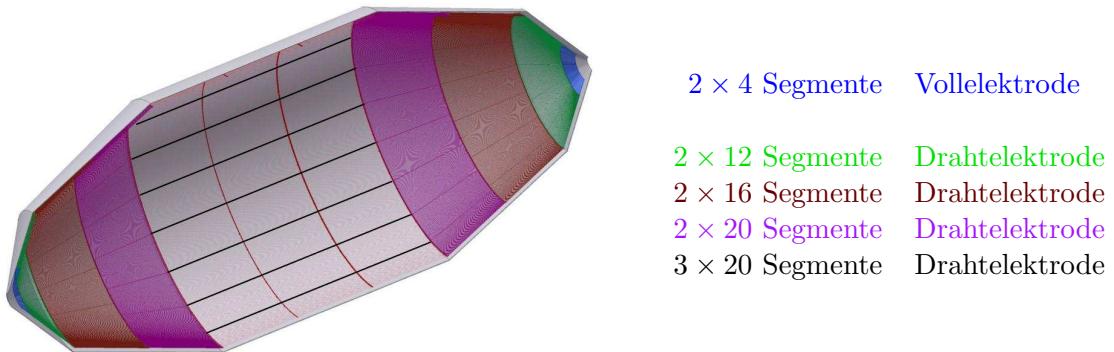
(b)  $r = 42$  mm: Ausschnitt  $-3 \text{ m} \leq z \leq 0 \text{ m}$

(c) Homogenität des Retardierungspotentials

**Abbildung 7.10: Longitudinalenergieverlauf und Potentialhomogenität für den Drahtelektrodenentwurf mit variierendem  $l$  und  $s$ .** (a) Gesamtansicht der Longitudinalenergie vom Startpunkt im Eingangsmagneten bis zur Analysierebene. Die Region um  $z \approx -5.6$  m stellt nun kein Problem mehr dar. (b) Ausschnittvergrößerung des Bereichs einige Meter vor Erreichen der Analysierebene: auch hier ist das Transmissionsproblem mit  $\delta E_{\parallel} \approx 3$  meV beinahe verschwunden. (c) Erreichter Potentialdurchgriff in der Analysierebene, hier definiert als  $U(r) - U_{\text{wire},2}$  (mit  $U_{\text{wire},2} = -18600$  V).

Da die Drahtelektrode extern (d.h. außerhalb des Tanks) gebaut und später durch einen  $\varnothing = 1.7$  m durchmessenden Pumpport in das Spektrometer eingebracht werden soll, ist

eine geeignete Segmentierung der Elektrode erforderlich. Die Module in Form von gebogenen Paneelen mit etwa 2 – 3 m Länge und maximal ca. 1.5 m Breite sollten leicht ( $m \lesssim 30 \text{ kg}$ ), d.h. von zwei Personen zu tragen und zu montieren sein. Ein Vorschlag für die Aufteilung ist in Abbildung 7.11 zu sehen. Diese Segmentierung sieht insgesamt 156 Module der Drahtelektrode vor, sowie 8 zusätzliche Paneele aus massivem Elektrodenmaterial.



**Abbildung 7.11: Mögliche Segmentierung der Innenelektrode des Hauptspektrometers (CAD-Zeichnung von H. W. Orthjohann).** Die Paneele sollten nicht breiter als 1.5 m sein, da der Zugang zum Spektrometerinneren über einen Flansch mit dem Durchmesser  $\varnothing = 1.7 \text{ m}$  erfolgt. Ihre Länge kann zwischen 2 und 3 m betragen.

## Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Das geplante Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment, KATRIN, wird eine hochpräzise Vermessung der Endpunktregion des Tritium- $\beta$ -Spektrums mit dem Ziel einer Bestimmung der Masse des Elektronantineutrinos im Sub-eV-Bereich durchführen. Hierzu wird ein großes Elektronenspektrometer basierend auf dem Prinzip eines elektrostatischen Filters mit magnetischer adiabatischer Kollimation (MAC-E-Filter) benötigt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden ausführliche und detaillierte Studien zum elektromagnetischen Design dieses Hauptspektrometers für das KATRIN Experiment angefertigt. Zielsetzung dieser Arbeit war es, am Ende einen Designvorschlag für ein funktionierendes Spektrometer vorlegen zu können. Die Designkriterien umfassen bestimmte Vorgaben an die Transmissions- und Adiabasieeigenschaften des Spektrometers sowie an die Homogenität des elektrischen Potentials und des Magnetfeldes.

Mit Hilfe von Computersimulationen wurden verschiedene Konfigurationen des elektrostatischen Retardierungspotentials und des Magnetfeldes geprüft. Hierzu sind geeignete Programme zur Feldberechnung anhand einer gegebenen Elektroden- und Magnetgeometrie und zur Bahnverfolgung geladener Teilchen in der Umgebung dieser Felder erforderlich. Für die Simulationsrechnungen wurde zunächst das allgemeine kommerzielle Programm Simion 3D verwendet, was sich jedoch aufgrund einer Anhäufung numerischer Fehler für einige Anwendungen (z.B. bei Bahnverfolgungsrechnungen im großen Hauptspektrometer) als nicht zuverlässig genug erwies. Statt dessen wurden im weiteren Verlauf dieser Arbeit speziell entwickelte und gut an die Aufgabenstellung angepasste Programme getestet und verwendet. Diese wurden von Dr. Ferenc Glück (Uni Mainz/Forschungszentrum Karlsruhe) in der Programmiersprache C geschrieben. Insbesondere die Bahnverfolgungsroutine berücksichtigt explizit das spezielle Problem der Bewegung geladener Teilchen auf Zyklotronbahnen entlang von Magnetfeldlinien und erreicht so eine besonders hohe numerische Genauigkeit.

Bei den Untersuchungen des bisherigen Referenzdesigns des Hauptspektrometers zeigten sich Probleme bei der Transmission von Elektronen, welche in der Simulation im Zentrum des Spektrometer-Eingangsmagneten bei hohen Radien und gleichzeitig großem Winkel relativ zu den Magnetfeldlinien gestartet wurden. Die Longitudinalenergie dieser Elektronen, welche durch den elektrostatischen Filter analysiert wird, erreichte ihr Minimum nicht in der Analysierebene, sondern bereits einige Meter vorher. Da eine solche zu frühe Retardierung zu einer unkontrollierten Verschmierung der ansonsten analytisch bekannten Transmissionsfunktion des MAC-E-Filters führt, mussten Maßnahmen ergriffen werden, um sie zu eliminieren. Der Verlauf der Longitudinalenergie lässt sich zum Beispiel durch eine Veränderung der Tankform und damit durch eine Modifikation des elektrostatischen Retardierungsfeldes

beeinflussen. Mittels einer Erweiterung des konischen Tankbereiches wird erreicht, dass am Anfang der Teilchenbahn eine etwas weniger starke Retardierung stattfindet, so dass sich die Transmissionseigenschaften deutlich verbessern.

Bei einer begrenzten Ortsauflösung des aus vielen Pixeln aufgebauten Detektors werden strenge Homogenitätsvorgaben an die Felder gestellt, da radialabhängige Variationen von Retardierungspotential und Magnetfeld in der Analysierebene eine unerwünschte Verschiebung bzw. Verbreiterung der Transmissionsfunktion von Pixel zu Pixel verursachen. Da die zur späteren Datenauswertung notwendige präzise Vermessung dieser Inhomogenitäten eine lange und kostenintensive Kalibrierungsphase des Experiments erfordern würde, ist es wichtig, eine möglichst hohe Gleichförmigkeit der Felder zu erlangen. In dem oben beschriebenen Designvorschlag mit erweitertem Konus konnten sowohl das Retardierungspotential als auch das Magnetfeld die vorgegebenen Grenzwerte von  $\Delta U_{\text{analys}} \leq 0.5 \text{ V}$  bzw.  $\Delta B_{\text{analys}}/B_{\text{analys}} \leq 20\%$  nicht erfüllen.

Zur Verbesserung der Feldhomogenität sind verschiedene Wege denkbar, u.a. die Einführung einer zusätzlichen trichterförmigen Hochspannungselektrode zur Reduzierung des Potentialdurchgriffs  $\Delta U_{\text{analys}}$ , eine Modifikation der Spektrometermagnete oder ein spezielles Design der den Tank umfassenden zentralen Luftspule. Aus unterschiedlichen Gründen erwies sich eine andere Methode als besonders geeignet, die Homogenität des Potentials und des Magnetfeldes auf natürliche Weise zu gewährleisten, nämlich eine Verlängerung des gesamten Spektrometeraufbaus. Da ein gegenüber dem Referenzdesign mit  $L = 22 \text{ m}$  verlängertes Hauptspektrometer nicht nur aufgrund des längeren Vakuumtanks einen signifikanten Mehraufwand an Kosten bedeutet, wurde lediglich der Übergang von  $L = 22 \text{ m}$  zu  $L = 24 \text{ m}$  betrachtet. Es konnte gezeigt werden, dass mit diesem Design tatsächlich alle drei Hauptkriterien (Transmission, adiabatische Energieumwandlung und Feldhomogenität) erfüllt werden können.

Einen wichtigen Aspekt beim Design eines MAC-E-Filters stellt auch die Vermeidung von Teilchenfallen dar. Geladene Teilchen können mittels verschiedener Mechanismen (z.B. magnetischer Spiegeleffekt, elektrostatische oder kombinierte elektromagnetische Falle) u.U. über längere Zeit gespeichert werden. Solche gefangenen Teilchen können über Prozesse wie Restgasionisation zur Erhöhung des Untergrundsignals beitragen. Eine prinzipiell beim MAC-E-Filter nicht vermeidbare größere Falle für positiv geladene Teilchen existiert in der Mitte des Spektrometers. Sie ist von geringer Relevanz, solange sich keine nennenswerte Anzahl positiv geladener Teilchen im Spektrometer befindet, welche die Speicherbedingungen erfüllen können. Des Weiteren gibt es kritische Stellen im Bereich der konischen Endkappen des Spektrometers, wo auch Elektronen gespeichert werden können. Diese Falle lässt sich durch den Einbau der oben schon erwähnten Zusatzelektrode vermeiden, da durch die Potentialveränderung die Speicherbedingungen aufgehoben werden. Es ist wichtig, ideale Fallenbedingungen beim Entwurf des Spektrometerdesigns von vornherein durch eine geschickt gewählte Geometrie zu vermeiden. Die Geometrie der Tankelektrode des Hauptspektrometers ist dem Verlauf der inneren Elektrode des Vorspektrometers sehr ähnlich, welche von B. Flatt durch spezielle Computersimulationen im Hinblick auf Teilchenfallen untersucht wurde [Fla04]. Eine solche Untersuchung der Fallen im Hauptspektrometer konnte im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht durchgeführt werden, wäre aber als Ergänzung zu den bisherigen Berechnungen wünschenswert.

Gerade bei einem hochsensitiven Experiment, bei dem der Untergrundbeitrag möglichst klein gehalten werden muss, kann es erforderlich sein, zusätzlich auch aktive Maßnahmen zur Untergrundreduzierung zu treffen. Hierzu zählt zum Beispiel eine quasi-masselose Drahtelektrode, die den Spektrometertank von innen auskleidet und als negative Schirmelektrode gegen

Elektronen dienen kann, welche aus den Tankwänden emittiert werden und als Untergrundelektronen auf den Detektor geführt werden könnten. Eine weitere Anwendungsmöglichkeit einer solchen Innenelektrode besteht darin, dass durch Anlegen eines starken elektrischen Dipolfeldes mit Hilfe der  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift Teilchen aus Fallen entfernt werden können. Solche „Leerungspulse“ können nur in Messpausen angelegt werden, während die Abschirmfunktion im laufenden Betrieb wirksam ist. Gleichzeitig bietet diese Elektrode den Vorteil, dass das Retardierungspotential  $U_{\text{analys}}$  von möglichen Schwankungen des Tankpotentials  $U_{\text{vessel}}$ , verursacht durch elektronisches Rauschen (etwa durch Vakuumpumpen und ähnliche angegeschlossene Geräte), entkoppelt und somit leichter stabilisiert werden kann.

Ein solcher Drahtelektrodenaufbau wurde bereits am Mainzer Spektrometer erprobt; ein weiteres System wird in Kürze in das KATRIN Vorspektrometer eingebaut und dann getestet werden. Ein kritischer Punkt ist, dass die Drahtelektrode zum einen möglichst masselos sein soll, um nicht selbst zu einer Quelle von Sekundärelektronen zu werden. Der geometrische Abdeckungsfaktor  $f_g = d/s$  soll daher klein sein ( $d$  ist der Drahtdurchmesser,  $s$  der Abstand zwischen je zwei Drähten). Zum anderen darf der Drahtdurchmesser nicht zu klein sein, damit keine Feldemission durch die hohen elektrischen Feldstärken an der Drahtoberfläche ausgelöst wird.

Der Faktor, welcher die Unterdrückung des Tankpotential-Einflusses auf das im Inneren des Spektrometers wirksame Retardierungspotential beschreibt, wird Abschirmfaktor  $S$  genannt. Er hängt von den Parametern  $d$ ,  $s$  und  $l$  ab, wobei  $l$  den Abstand zwischen Tank- und Drahtelektrode bezeichnet. Damit eine wirksame Entkopplung zwischen  $U_{\text{analys}}$  und  $U_{\text{vessel}}$  stattfinden kann, muss  $S$  möglichst groß sein. Es ist daher eine Optimierung der Drahtelektrodenparameter  $d$ ,  $s$  und  $l$  hinsichtlich der drei wesentlichen Kriterien Feldemission, geometrische Abdeckung und Abschirmfaktor durchzuführen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zwei vorläufige Designvorschläge für ein Drahtelektroden-System des Hauptspektrometers vorgestellt, welche eine Doppel Lage von Drähten vorsehen. Hierbei besteht die innere Lage aus dünneren Drähten als die weiter außen liegende, so dass dort eine geringere geometrische Abdeckung erreicht werden kann. Ein anderer Vorzug des Doppelagensystems ist die Erhöhung des Gesamtabschirmfaktors gegenüber einer einzelnen Drahtschicht.

Da die Drahtelektrode ein äußerst komplexes System bildet, konnten in dieser Arbeit noch keine umfassenden Simulationen durchgeführt, sondern lediglich grobe Entwürfe erarbeitet werden. Bei Untersuchungen zu einem Designvorschlag mit parallel zur Tankwand verlaufenden Drahtelektroden konnte bestätigt werden, dass die endgültige Tankform (Abb. 7.5) die Vorgaben erfüllt. Es ist noch viel Detailarbeit notwendig, um etwa die massiven Haltestrukturen der Drahtelektrode mit in die Simulation einzubeziehen oder mögliche Penningfallen durch einen Potentialabfall zwischen den Drähten einer Lage zu studieren. Für jeden neuen Entwurf muss zusätzlich wieder die Erfüllung der üblichen Designkriterien für das Hauptspektrometer (Transmission, Adiabasie und Feldhomogenität) nachgeprüft werden. Dies sind nur einige der Punkte, welche im Anschluss an diese Arbeit noch geklärt werden müssen. Schließlich sollen auch mögliche Realisierungskonzepte erstellt und verschiedene Entwürfe auf ihre technische Umsetzbarkeit geprüft werden. Die Entwicklung der Drahtelektrode wird parallel zur Bauphase des Hauptspektrometertanks erfolgen, so dass die Module der Innenelektrode nach der Fertigstellung des Vakuumtanks installiert werden können.



## Anhang A

# Ergänzende Betrachtungen zu adiabatischen Invarianten

Zur Vertiefung der Bemerkungen in Abschnitt 2.2.1 sind einige Ausführungen über die adiabatischen Invarianten der Bewegung geladener relativistischer Teilchen in statischen elektromagnetischen Feldern angebracht. Eine ausführliche Diskussion findet sich in [Jac02] (Kapitel 12.5).

Der Begriff der „adiabatischen Invarianz“ geht auf die Himmelsmechanik und frühe Formulierungen der Quantenmechanik zurück. Zur Definition adiabatisch invarianter Größen betrachtet man die Wirkungsintegrale

$$J_i = \oint p_i \, dq_i, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $q_i$  und  $p_i$  die generalisierten, zueinander kanonisch konjugierten Koordinaten und Impulse des mechanischen Systems sind. Hierbei sind nur periodische Koordinaten  $q_i$  berücksichtigt, und integriert wird jeweils über eine volle Periode. Die Wirkungsintegrale sind für feste Eigenschaften des Systems konstant. Lässt man nun Änderungen dieser Eigenschaften zu, welche relativ zur Umlaufperiode langsam vonstatten gehen, so bleibt die Konstanz der Wirkungsintegrale nach wie vor gültig. Das bedeutet, die Bewegung des Systems unter geänderten Bedingungen verläuft so, dass die Werte der Wirkungsintegrale die selben bleiben wie unter den ursprünglichen Bedingungen. Solche Änderungen heißen *adiabatisch*.

Als speziellen Fall eines solchen Wirkungsintegrals wollen wir die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem homogenen statischen Magnetfeld  $\vec{B}$  betrachten. Die benötigte Periodizität kommt durch die Zyklotronbewegung des Teilchens um die magnetischen Feldlinien herum zustande. Genauer gesagt, ist die Komponente der Bewegung senkrecht zu den Feldlinien periodisch. Man erhält das folgende Wirkungsintegral:

$$J = \oint \vec{P}_\perp \, d\vec{\ell}. \quad (\text{A.2})$$

Darin ist

$\vec{P}_\perp$  die Transversalkomponente des kanonischen Impulses  $\vec{P} = \gamma m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}$ , und  
 $d\vec{\ell}$  ein Linienelement entlang der Kreisbahn mit der gleichen Richtung wie  $\vec{v}_\perp$ .

Durch Einsetzen des kanonischen Impulses ergibt sich:

$$J = \oint \gamma m \vec{v}_\perp \cdot d\vec{\ell} + \frac{e}{c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}. \quad (\text{A.3})$$

Dieser Ausdruck kann unter Ausnutzung folgender Punkte umgeformt werden:

- 1) Zwischen dem Zyklotronradius  $r_c$ , dem Betrag  $v_\perp$  der senkrechten Geschwindigkeitskomponente und der Umlauffrequenz  $\omega_c = eB/(\gamma mc)$  besteht die Beziehung  $r_c = \frac{v_\perp}{\omega_c}$ .
- 2) Das Linienelement  $d\vec{\ell}$  ist parallel gerichtet zu  $\vec{v}_\perp$ .
- 3) Auf den zweiten Summanden ist der Satz von Stokes anwendbar:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n}}_{\vec{B}} dF.$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{n}$  einen Einheitsvektor mit entgegengesetzte gleicher Richtung wie  $\vec{B}$  und  $dF$  ein Element der Integrationsfläche  $S$ .

Nach einigen einfachen Rechenschritten ist  $J$  dann durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$J = 2\pi \gamma m \omega_c r_c^2 + \frac{e}{c} \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dF. \quad (\text{A.4})$$

Eine letzte Umformung führt schließlich auf das Ergebnis

$$J = \pi \gamma m \omega_c r_c^2 = \frac{e}{c} (B \pi r_c^2). \quad (\text{A.5})$$

Die Aussage „ $J$  ist eine adiabatische Invariante“ ist in diesem Fall also gleichbedeutend mit der Tatsache, dass der von der Zyklotronbewegung des Teilchens eingeschlossene magnetische Fluss  $B\pi r_c^2$  entlang der gesamten Flugbahn erhalten bleibt. Anschaulich gesprochen heißt dies: In Bereichen mit höherer (bzw. verringriger) Magnetfeldstärke  $B$  wird der Radius  $r_c$  der Spiralbewegung gerade soviel kleiner (bzw. größer), dass das Produkt aus  $B$  und der von der Zyklotronbahn umrandeten Fläche stets den selben Wert hat.

Als Fazit der Betrachtungen dieses Abschnitts kann festgehalten werden, dass die gezeigte adiabatische Invarianz des magnetischen Flusses sich durch verschiedene nützliche Relationen diverser Größen ausdrücken lässt. In [Jac02] werden drei adiabatische Invarianten explizit benannt, welche auf Gleichung (A.5) zurückzuführen sind:

- a)  $B r_c^2 = \text{const.}$  Formulierung über den Radius der Bahn des geladenen Teilchens,
- b)  $\frac{p_\perp^2}{B} = \text{const.}$  Formulierung über den Transversalimpuls,
- c)  $\gamma \mu = \text{const.}$  Formulierung über das magnetische Bahnmoment der durch das kreisende geladene Teilchen gebildeten Stromschleife.

## Anhang B

# Runge-Kutta-Verfahren

Das in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Bahnverfolgungsprogramm `tracking.c` benutzt zur Lösung der Bewegungsgleichungen des Teilchens einen Runge-Kutta-Algorithmus, welcher in `rungekutta.c` zur Verfügung gestellt wird. Die Bewegungsgleichungen bilden ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, welches allgemein die folgende Form hat:

$$\frac{dy_i}{dt} = \dot{y}_i(t) = f(i, y_1, y_2, \dots, y_n, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.1})$$

Die  $n$  Anfangsbedingungen

$$y_i(t_0) = y_{i0} \quad (\text{B.2})$$

seien gegeben. In vielen physikalischen Anwendungen entspricht  $t$  der Zeit, so auch hier. Allgemein kann  $t$  natürlich ein beliebiger Parameter sein. Im Fall der relativistischen Bewegung eines geladenen Teilchens in elektro- und magnetostatischen Feldern gibt es insgesamt  $n = 6$  zu lösende Differentialgleichungen (siehe Gl. (3.11)):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_L.$$

Seien  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die kartesischen Ortskoordinaten,  $v_i$  die Geschwindigkeitskomponenten,  $p_i$  die Impulskomponenten und  $F_i$  die Komponenten der Lorentzkraft. Für die sechs Variablen  $y_i$  aus (B.1) gilt:

$$y_i = x_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.3})$$

$$y_i = p_{i-3} \quad \text{für } i = 4, 5, 6. \quad (\text{B.4})$$

Gleichzeitig erhält man für die Ableitungsfunktion  $f$  die folgende Aufstellung:

$$f(i, y_1, \dots, y_6, t) = v_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.5})$$

$$f(i, y_1, \dots, y_6, t) = F_{i-3} \quad \text{für } i = 4, 5, 6. \quad (\text{B.6})$$

Üblicherweise sind als Anfangsbedingungen die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors gegeben. Die restlichen drei Anfangsbedingungen für  $i = 4, 5, 6$  erhält man dann mit Hilfe der relativistischen Beziehung

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}.$$

Die umgekehrte Relation

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}/\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2/c^2}$$

wird ebenfalls benötigt, und zwar zur Berechnung der Ableitungsfunktion  $f$  für  $i = 1, 2, 3$ .

Das Runge-Kutta-Verfahren gibt ausgehend von den Anfangsbedingungen eine Lösung des Gleichungssystems an der Stelle  $t_0 + h$  an, wobei  $h$  die Schrittweite bezeichnet:

$$y_i(t_0 + h) = y_{i0} + h \sum_{j=1}^m A_j k_{ij}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.7})$$

Diese Gleichung beschreibt die allgemeine Form eines sogenannten expliziten  $m$ -stufigen Runge-Kutta-Verfahrens. Rekursiv lassen sich damit die Lösungen des Anfangswertproblems für eine große Anzahl von Schritten berechnen. Generell wird der Wert der Schrittweite  $h$  vom Benutzer vorgegeben; in unserem Fall wird  $h$  automatisch innerhalb der Bahnverfolgungsroutine bestimmt (siehe S. 45).

Die Matrix  $k_{ij}$  kann wie folgt berechnet werden:

Im Fall  $j = 1$  gilt

$$k_{i1} = f(i, y_{10}, \dots, y_{n0}, t_0) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{B.8})$$

Für  $j > 1$  ergibt sich jedoch

$$k_{ij} = f(i, y_{1j}, \dots, y_{nj}, t_j) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\text{B.9})$$

$$\text{mit } t_j = t_0 + a_j h \quad (\text{B.10})$$

$$\text{und } y_{i'j} = y_{i'0} + h \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl} k_{i'l} \quad (i' = 1, \dots, n). \quad (\text{B.11})$$

Die Koeffizienten, d. h. die reellen Zahlen  $A_j$ ,  $a_j$  und  $b_{jl}$  ( $j = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, j-1$ ), sind für verschiedene Ordnungen  $m$  des Verfahrens in der Literatur tabelliert (z. B. [Eng96]).

Das vierstufige Verfahren ( $m = 4$ ), welches neben der achtstufigen Variante ( $m = 8$ ) in `rungekutta.c` implementiert ist, wird häufig als *klassisches Runge-Kutta-Verfahren* bezeichnet. Dieses schon 1901 von Kutta eingeführte Verfahren [Kut01] soll hier kurz erläutert werden. Die Formel (B.7) für die rekursive Lösung lautet explizit:

$$y_i(t_0 + h) = y_{i0} + h \left( \frac{1}{6} k_{i1} + \frac{1}{3} k_{i2} + \frac{1}{3} k_{i3} + \frac{1}{6} k_{i4} \right) \quad (\text{B.12})$$

$$\text{mit } (i = 1, \dots, n) : \quad k_{i1} = f(i, y_{10}, \dots, y_{n0}, t_0),$$

$$k_{i2} = f(i, y_{10} + h \frac{k_{11}}{2}, \dots, y_{n0} + h \frac{k_{n1}}{2}, t_0 + \frac{h}{2}),$$

$$k_{i3} = f(i, y_{10} + h \frac{k_{12}}{2}, \dots, y_{n0} + h \frac{k_{n2}}{2}, t_0 + \frac{h}{2}),$$

$$k_{i4} = f(i, y_{10} + h k_{13}, \dots, y_{n0} + h k_{n3}, t_0 + h).$$

Das Konzept der Runge-Kutta-Verfahren beruht also darauf, die Informationen mehrerer Schritte zu kombinieren, um dadurch genauere Ergebnisse zu erzielen. Der Nachteil ist, dass man dazu in jedem Rekursionsschritt mehrere Auswertungen der Funktion  $f$  durchführen muss (im vierstufigen Verfahren sind dies vier Auswertungen, in höherstufigen Verfahren entsprechend mehr). Vergleicht man jedoch das Verhältnis von Rechenaufwand und Genauigkeit mit dem für andere Methoden wie dem Euler-Cauchy-Verfahren oder dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren, so stellt man fest, dass diese im allgemeinen nicht die Effizienz der mehrstufigen Runge-Kutta-Verfahren erreichen ([Eng96, Eng87]).

## Fehlerschätzung für Runge-Kutta-Verfahren

Hat man eine Methode zur näherungsweisen numerischen Lösung eines Differentialgleichungssystems gefunden, so ist es im allgemeinen auch erforderlich, eine Abschätzung der Genauigkeit dieses Verfahrens angeben zu können. Häufig ist eine gewünschte Präzision der Kalkulation vorgegeben und es stellt sich die Frage, ob und wenn ja mit welcher Schrittweite  $h$  diese geforderte Genauigkeit erreicht werden kann.

Es ist üblich, zwei verschiedene Arten von Fehlern zu betrachten: den lokalen bzw. Diskretisierungsfehler und den globalen Fehler. Die beiden Begriffe werden in [Pre01] folgendermaßen definiert:

- Der *lokale Fehler* bildet ein Maß für die lokalen Auswirkungen der Diskretisierung; er gibt die Diskrepanz zwischen numerischer und exakter Lösung *nach einem Rechenschritt* an. Die Abschätzung des lokalen Fehlers ist meistens mit Hilfe einer Taylorentwicklung möglich.
- Der *globale Fehler* berücksichtigt zusätzlich noch die Akkumulation sämtlicher Einzelschrittfehler im Verlauf einer langen iterativen Berechnung. Er beschreibt somit die Auswirkungen der Diskretisierung *im gesamten Berechnungsintervall*. Dieser Effekt kommt dadurch zustande, dass in einer Kette aus vielen Schritten ja bereits jeder neue Anfangswert mit einem gewissen Fehler behaftet ist, zu welchem noch der Diskretisierungsfehler im entsprechenden Schritt hinzukommt.

Grundsätzlich kann man nicht davon ausgehen, dass sich der globale Fehler durch einfache Summation der lokalen Fehler ergibt. Allgemein gilt, dass Näherungsverfahren höherer Ordnung gerade bei kleinen Schrittweiten den Vorteil geringer Fehler aufweisen. Für das vierstufige Runge-Kutta-Verfahren erhält man ein lokaler Fehler von der Größenordnung  $\mathcal{O}(h^5)$ , der globale Fehler ist  $\mathcal{O}(h^4)$ . Das achtstufige Runge-Kutta-Verfahren hat einen noch kleineren globalen Fehler von  $\mathcal{O}(h^6)$ .

Schließlich sei darauf hingewiesen, dass bei der bisherigen Betrachtung noch keine Rundungsfehler berücksichtigt wurden. Ist die Schrittweite  $h$  zu klein gewählt, kann es zu einer Vergrößerung der Rundungsfehler kommen. Hieran erkennt man, dass bei der Implementation numerischer Verfahren die Wahl der Schrittweite eine wichtige Rolle spielt.



## Anhang C

# Formel zur Startenergiekorrektur

Bei der Definition der Startenergie zu Beginn einer Simulationsrechnung ist zu beachten, dass je nach Startwinkel ein unterschiedlich großer Anteil von der Startenergie  $E_{\text{start}}$  des Elektrons auf die Longitudinalenergie entfällt. Möchte man einen festen Wert von  $E_{\parallel}$  vorgeben, der im Verlauf der Trajektorie nicht unterschritten werden soll, so muss dies bei der Definition von  $E_{\text{start}}$  berücksichtigt werden. Die für die Korrektur der anzugebenden Startenergie verwendete Formel lautet:

$$E_{\text{start}}^{\text{corr}}(\theta_{\text{start}}, r) = (\epsilon_{\parallel} + e [U_0 - \Delta U_{\text{analys}}(r)] - e [0 + \delta U_{\text{start}}(r)]) \cdot \left( \frac{1}{1 - \sin^2 \theta_{\text{start}} \frac{B_{\text{analys}}(r)}{B_{\text{start}}(r)}} \right). \quad (\text{C.1})$$

Dabei ist

$\epsilon_{\parallel}$  der Überschuss an long. kinet. Energie gegenüber der Filterschwelle,

$U_0$  die am Tank anliegende Retardierungsspannung,

$\Delta U_{\text{analys}}$  die Abweichung des Potentials am Durchstoßpunkt des Teilchens in der Analysierebene vom Tankpotential  $U_0$ ,

$\delta U_{\text{start}}$  die Abweichung des Potentials am Startpunkt des Teilchens vom Sollwert 0 V an dieser Stelle,

$B_{\text{start}}$ , die Magnetfeldstärke im Startpunkt bzw.

$B_{\text{analys}}$  im Durchstoßpunkt des Teilchens in der Analysierebene,

$\theta_{\text{start}}$  der Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{B}$  und  $\vec{v}$  im Startpunkt.

Neben der Korrektur bezüglich des Startwinkels  $\theta_{\text{start}}$  treten noch weitere Terme auf, welche den Inhomogenitäten des elektrostatischen Feldes Rechnung tragen. Das Elektron wird üblicherweise innerhalb der Erdelektrode im Zentrum des Eingangsmagneten gestartet, wo ein Potential von 0 V herrschen sollte. Man findet jedoch in den Simulationen ein leicht von null verschiedenes (negatives) Potential. Dies muss ebenso berücksichtigt werden wie die Tatsache, dass das Elektron beim Erreichen der Analysierebene nicht exakt das Tank-elektrodenpotential  $U_0$  sieht, sondern einen um den radialen Potentialdurchgriff  $\Delta U_{\text{analys}}(r)$  positiveren Wert.

Um die Startenergiekorrektur vornehmen zu können, ist zunächst eine Testsimulation notwendig, um die in Gl. (C.1) einzusetzenden Werte  $\delta U_{\text{start}}$ ,  $\Delta U_{\text{analys}}$ ,  $B_{\text{start}}$  und  $B_{\text{analys}}$  zu

ermitteln. Beim zweiten Durchlauf wird das Elektron dann mit der korrigierten Energie gestartet. Wird dieses Korrekturverfahren nicht angewandt, erkennt man in der Darstellung von  $E_{\parallel}$  gegen  $x$  im Allgemeinen einen deutlichen Abfall unter die vorgegebene Überschussenergie. In dieser Arbeit sind die Diagramme, bei denen die Startenergiekorrektur vorgenommen wurde, zur besseren Unterscheidung stets als solche gekennzeichnet worden.

## Anhang D

# Konfigurationsparameter des elektromagnetischen Designs

## D.1 Elektrodenkonfiguration des 22-m-Spektrometers

Im Folgenden wird der Inhalt des *geometry file* `cadexscaleplus.gem` wiedergegeben, welches zur Erstellung einer elektrischen Feldkarte des Hauptspektrometers für Simion verwendet wurde.

```

;1st horizontal part of endcap/flange
10330.000000,500.000000,
10405.000000,490.000000,
;rounded part of endcap/flange
10430.000000,473.000000,
10470.000000,430.000000,
10500.000000,380.000000,
10530.000000,305.000000,
10540.000000,238.500000,
10540.250000,235.000000,
;2nd horizontal part of endcap/flange
10640.000000,235.000000,
10640.000000,166.200000,

;close polyline by going back to starting point with
;slightly modified interpolation points:
10644.000000,166.200000,
10644.000000,239.000000,
10540.250000,239.000000,
10544.000000,238.500000,
10534.000000,305.000000,
10504.000000,380.000000,
10475.000000,431.000000,
10435.000000,474.000000,
10407.000000,494.000000,
10330.000000,504.000000,
10073.000000,504.000000,
9944.000000,1002.000000,
9544.000000,1650.000000,
9255.000000,1950.000000,
8846.000000,2251.000000,
8046.000000,2722.000000,
7696.000000,2932.000000,
6136.000000,3842.000000,
4572.000000,4754.000000,
0.000000,4754.000000,
0.000000,4750.000000}
}

;create additional high-voltage electrode
electrode(2)
{
fill
{
within{polyline(
10300.000000,475.000000,
10045.000000,475.000000,
9975.000000,515.000000,
9249.000000,1240.000000,
8000.000000,2600.000000,
7793.900000,2718.400000,
7820.000000,2670.000000,
7970.000000,2470.000000,
8310.000000,2070.000000,
8460.000000,1900.000000,
8790.000000,1540.000000,
9020.000000,1300.000000,
9320.000000,1000.000000,
9460.000000,870.000000,
9600.000000,740.000000,
9785.000000,585.000000,
9860.000000,530.000000,
9925.000000,495.000000,
9993.800000,475.000000,
10030.000000,465.000000,
10300.000000,465.000000,
10300.000000,475.000000)}
}

;create ground potential electrode
;(marked dark blue in CAD drawing xl15.dwg)
electrode(3)
{
fill
{
within{polyline(
10440.000000,180.000000, ;34
10397.000000,201.000000, ;33
10373.000000,228.000000, ;32
10354.000000,265.000000, ;31
10349.000000,297.000000, ;30
10342.800000,307.800000, ;29
10337.900000,312.900000, ;28
10330.000000,318.500000, ;27
10315.500000,323.000000, ;26
10305.700000,323.700000, ;25
10298.800000,322.300000, ;24
10287.200000,316.200000, ;23
10283.500000,313.000000, ;22
10277.000000,305.000000, ;21
}
}
}

```



## D.2 Magnetkonfiguration

Die untenstehende Aufstellung zeigt den Inhalt der Parameterdatei, welche zur Berechnung des Magnetfeldes für die Hauptspektrometersimulationen verwendet wurde. Die Daten jedes der 21 Magnete sind zeilenweise in in der Reihenfolge

x/cm	R/cm	D/cm	L/cm	n	SD	I/A	alpha/deg	offset/cm
------	------	------	------	---	----	-----	-----------	-----------

angeordnet. Die Position  $x = 0$  bezeichnet die Spektrometermitte und markiert somit gleichzeitig das Zentrum der Luftpule. Die beiden Hauptspektrometersolenoiden sind bei  $x = \pm 1100$  cm symmetrisch zur Analysierebene platziert.

```

21
-1860 24.000000 7.000000 32.000000 50.000000 1.000000 2240000.000000 0.000000 0.080000
-1430 24.000000 7.000000 32.000000 50.000000 1.000000 2240000.000000 0.000000 0.080000
-1327.5 8.000000 3.290000 78.480000 50.000000 1.000000 3098390.400000 0.000000 0.082600
-1282.39 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 0.000000 0.082600
-1372.61 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 0.000000 0.082600
-1202.5 8.000000 3.290000 78.480000 50.000000 1.000000 3098390.400000 0.000000 0.082600
-1157.39 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 0.000000 0.082600
-1247.61 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 0.000000 0.082600
-1100 24.000000 7.000000 32.000000 50.000000 1.000000 1726035.15 0.000000 0.080000
0 550.000000 1.000000 700.000000 100.000000 1.000000000 300.0000 0.0000000 0.0000000
1100 24.000000 7.000000 32.000000 50.000000 1.000000 1726035.15 0.000000 0.080000
1202.5 8.000000 3.290000 78.480000 50.000000 1.000000 3098390.400000 0.000000 0.082700
1247.61 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 0.000000 0.082700
1157.39 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 0.000000 0.082700
1327.03 8.000000 3.290000 78.480000 50.000000 1.000000 3098390.400000 10.000000 10.977100
1371.45 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 10.000000 18.810400
1282.6 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 10.000000 3.143900
1452.03 8.000000 3.290000 78.480000 50.000000 1.000000 3098390.400000 -10.000000 10.977100
1496.45 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 -10.000000 3.143900
1407.6 10.000000 5.650000 9.660000 10.000000 1.000000 654948.800000 -10.000000 18.810400
1571.57 34.000000 7.500000 32.000000 20.000000 1.000000 1968000.000000 0.000000 0.518500
-1150. 1150. 0.5
-0. 510. 0.5
-0. 0. 1.0
0.0

```

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Einfluss der Neutrinoruhemasse auf das $\beta$ -Spektrum (nach Fermi) . . . . .	3
1.2	Evidenz für Zwei-Flavour-Oszillationen (Superkamiokande-Experiment) . . . . .	7
1.3	Ergebnisse bisheriger Neutrinooszillationsexperimente . . . . .	10
1.4	Neutrino-Masseneigenwerte als Funktion des kleinsten Wertes . . . . .	11
2.1	Energiespektrum des Tritium- $\beta$ -Zerfalls . . . . .	17
2.2	Prinzip des MAC-E-Filters . . . . .	19
2.3	Skizze zur Erläuterung der Zyklotronschrittlänge . . . . .	21
2.4	Transmissionsfunktion . . . . .	24
2.5	Übersicht des Gesamtaufbaus des KATRIN Experiments . . . . .	24
2.6	Tritiumquelle und Transportsektion . . . . .	25
2.7	Das Vorspektrometer . . . . .	26
2.8	Segmentierte PIN-Diode . . . . .	27
3.1	Schema der Relaxation in Simion 3D . . . . .	32
3.2	Flussdiagramm der Feld- und Bahnberechnungsroutinen . . . . .	35
3.3	Skizze zur Veranschaulichung der Spulen-Eingabeparameter . . . . .	36
3.4	Zentraler Konvergenzradius bei der Magnetfeldberechnung . . . . .	38
3.5	Wahl eines geeigneten Quellpunktes für einen gegebenen Feldpunkt . . . . .	39
3.6	Zentraler Konvergenzradius bei der Berechnung des elektrischen Feldes . . . . .	43
4.1	Auswirkungen von Feldinhomogenitäten auf die Transmissionsfunktion . . . . .	49
4.2	Schemazeichnung des Pixeldetektors . . . . .	50
4.3	Typischer radialer Verlauf von $\Delta U(r)$ , $B(r)$ in der Analysierebene . . . . .	51
4.4	Pixeldetektor mit Winkelsegmenten . . . . .	52
5.1	Bisheriges Standarddesign des 22-m-Spektrometers . . . . .	56
5.2	Magnetkonfiguration vom Vorspektrometer bis zum Detektor . . . . .	57
5.3	Äquipotentiallinien im Hauptspektrometer . . . . .	58

5.4	Radialer Verlauf der Magnetfeldstärke in der Analysierebene . . . . .	59
5.5	Koordinatensystem in Simion . . . . .	59
5.6	Longitudinalenergie entlang der Trajektorie eines Elektrons . . . . .	60
5.7	Verlauf der Longitudinalenergie für verschiedene Startradien . . . . .	62
5.8	Mögliche unerwünschte Veränderung der Transmissionsfunktion . . . . .	62
5.9	Untersuchung numerischer Fehler bei achsenfernen Elektronen . . . . .	63
5.10	Magnet- und Elektrodenkonfiguration mit eingezeichneten Trajektorien . . .	64
5.11	Untersuchung zur Transmission achsennaher Elektronen . . . . .	66
5.12	Untersuchung zur Transmission achsenferner Elektronen . . . . .	66
5.13	Untersuchung zur numerischen Genauigkeit der neuen Bahnverfolgungsroutine	67
5.14	Einfluss von <code>ntimestep</code> auf die numerische Genauigkeit . . . . .	69
5.15	Einfluss numerischer Fehler auf die Berechnung der Longitudinalenergie . .	70
6.1	Vergleich verschiedener Potentialbelegungen der Zusatzelektrode . . . . .	72
6.2	Skizze verschiedener Positionen der Zusatzelektrode . . . . .	73
6.3	Vergleich verschiedener Geometrien der Zusatzelektrode . . . . .	73
6.4	Modifizierte Konusformen beim 22-m-Spektrometer . . . . .	74
6.5	Longitudinalenergieverlauf für verschiedene Konen ( $r_{\text{start}} = 38$ bzw. 40 mm) .	76
6.6	Longitudinalenergieverlauf für verschiedene Konen ( $r_{\text{start}} = 42$ mm) . . . . .	76
6.7	Feldhomogenität beim 22-m-Spektrometer . . . . .	77
6.8	Relative Adiabasieabweichung für verschiedene Konusformen . . . . .	78
6.9	Relative Adiabasieabweichung in Abhängigkeit der Startenergie. . . . .	80
6.10	Adiabasieverhalten für verschiedene Startradien . . . . .	83
6.11	Adiabasieverhalten in Abhängigkeit des Startwinkels . . . . .	84
6.12	Mögliche Konusformen für das 24 m lange Spektrometer . . . . .	86
6.13	Feldhomogenität beim 24-m-Spektrometer . . . . .	87
6.14	<code>cone4</code> für 22 m und 24 m Spektrometerlänge . . . . .	88
6.15	Äquipotential- und Magnetfeldlinien für das 24-m-Spektrometer ohne Zusatzelektrode . . . . .	90
6.16	Longitudinalenergieverlauf für die <code>cone0</code> -Variante bei 24 m Spektrometerlänge	91
6.17	Longitudinalenergieverlauf für die <code>cone4</code> -Variante bei 24 m Spektrometerlänge	92
6.18	Veränderte Elektrodengeometrie im Spektrometereingangsbereich . . . . .	93
6.19	Longitudinalenergieverlauf für das 24-m-Spektrometer mit Zusatzelektrode .	94
6.20	Homogenität des Retardierungspotentials für das 24-m-Spektrometer mit Zusatzelektrode . . . . .	94
6.21	Äquipotential- und Magnetfeldlinien für das 24-m-Spektrometer mit Zusatzelektrode . . . . .	95

---

6.22 Methode zur Erzeugung eines möglichst homogenen Magnetfeldes . . . . .	96
7.1 Prinzip der Untergrundreduktion durch eine Schirmelektrode . . . . .	98
7.2 Potentialverlauf nahe und fern der planen Drahtelektrode . . . . .	99
7.3 Radialer Potentialverlauf in einer langen Zylinderelektrode . . . . .	100
7.4 Aufbau der Innenelektrode aus zwei Drahtschichten . . . . .	102
7.5 Hüllenform des 24-m-Spektrometers unter Berücksichtigung der Innenelektrode	105
7.6 Entwurf eines Doppellagen-Drahtelektrodensystems für das Hauptspektrometer	106
7.7 Homogenität des Retardierungspotentials für einen ersten Entwurf der Draht- elektrode . . . . .	108
7.8 Longitudinalenergieverlauf für einen ersten Drahtelektrodenentwurf mit zwei Lagen . . . . .	109
7.9 Design einer doppellagigen Drahtelektrode mit variierendem $l$ und $s$ . . . . .	110
7.10 Longitudinalenergieverlauf und Potentialhomogenität für den Drahtelektro- denentwurf mit variierendem $l$ und $s$ . . . . .	111
7.11 CAD-Zeichnung zur möglichen Segmentierung der Innenelektrode . . . . .	112



# Tabellenverzeichnis

3.1	Ausgabewerte des Bahnverfolgungsprogramms . . . . .	46
5.1	Daten zum elektromagnetischen Design des Hauptspektrometers . . . . .	56
5.2	Numerische Genauigkeit für Runge-Kutta-Verfahren 4. bzw. 8. Ordnung . . . . .	69
6.1	Abhängigkeit des Potentialdurchgriffs von der Potentialbelegung der Zusatzelektrode . . . . .	72
6.2	Ergebnisse der Konusmodifikationen beim 22-m-Spektrometer . . . . .	75
6.3	Adiabasieverhalten in Abhängigkeit der Überschussenergie . . . . .	79
6.4	Daten der Luftspule: Vergleich 22-m- und 24-m-Spektrometer . . . . .	87
7.1	Abschirmung im Fall eines langen Zylinders . . . . .	101
7.2	Eingabeparameter für die Vollelektrodenkonfiguration . . . . .	104
7.3	Eingabeparameter für die Drahtelektrodenkonfiguration . . . . .	104
7.4	Konfigurationsparameter der Doppellagen-Drahtelektrode . . . . .	106
7.5	Daten der verschiedenen Elektrodensegmente im ersten Zwei-Lagen-Entwurf der Drahtelektrode . . . . .	107
7.6	Daten der verschiedenen Elektrodensegmente im Drahtelektrodenentwurf mit konstantem Potential . . . . .	110



# Literaturverzeichnis

- [Ahm02] Q. R. Ahmad et al. (SNO Collaboration), Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 011301
- [Ahm03] S. N. Ahmed et al. (SNO Collaboration), [nucl-ex/0309004](#) v1
- [Ahn03] M. H. Ahn et al. (K2K Collaboration), Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 041801
- [Ara04] T. Araki et al. (KamLAND Collaboration), [hep-ex/0405035](#) v1
- [All03] S. W. Allen, R. W. Schmidt, S. L. Bridle, [astro-ph/0306386](#) v3
- [Alt03] C. Weinheimer, Laboratory Limits on Neutrino Masses, in: G. Altarelli and K. Winter (Eds.), Neutrino Mass, Springer, 2003
- [Ash04] Y. Ashie et al. (Super-Kamiokande Collaboration), [hep-ex/0404034](#)
- [Bah01] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, and S. Basu, Astrophys. J. **555** (2001) 990
- [Bea80] G. Beamson et al., J. Phys. E: Sci. Instrum. **13** (1980) 64 - 66
- [Bet34] H. Bethe and R. Peierls, Nature **133** (1934) 532
- [Bro95] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 1995
- [Cha14] J. Chadwick, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **16** (1914) 383
- [Cla38] J. W. Clark, Rev. Sci. Instrum. **9** (1938) 320 - 322
- [Cle95] B. T. Cleveland et al. (Homestake), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **38** (1995) 47
- [Cod65] W. J. Cody, Math. Comp. **19** (1965) 105 - 112
- [Cur49] S. C. Curran et al., Phil. Mag. **40** (1949) 53
- [Dan62] G. Danby et al., Phys. Rev. Lett. **9** 1 (1962) 36
- [Dav94] R. Davis, Prog. Part. Nucl. Phys. **32** (1994) 13; Proc. 13th Intern. Conf. on Neutrino Physics and Astrophysics, Boston, USA, 1988, p. 518, Eds. J. Schneps et al., World Scientific, 1989
- [Dav96] R. Davis, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **48** (1996) 284
- [Ell27] C. D. Ellis and W. A. Wooster, Proc. Roy. Soc. **A117** (1927) 109
- [Eng87] G. Engeln-Müllges (Hrsg.), Gewöhnliche Differentialgleichungen, Reihe: Rechner-orientierte Ingenieurmathematik, Vieweg, 1987

- [Eng96] G. Engeln-Müllges und F. Reutter, Numerik-Algorithmen, 8. Auflage, VDI Verlag, 1996
- [Ess04] K. Essig, Diplomarbeit, Helmholtz-Institut f. Strahlen- u. Kernphysik, Universität Bonn, 2004
- [Eve66] J. E. Everett and J. E. Osemeikhian, *J. Sci. Instrum.* **43** (1966) 470 - 474
- [Far02] Y. Farzan and A. Yu. Smirnov, [hep-ph/0211341](#)
- [Fer34] E. Fermi, *Z. Phys.* **88** (1934) 161 - 177
- [Fic00] L. Fickinger, Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2000
- [Fla01] B. Flatt, Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2001
- [Fla04] B. Flatt, Dissertation, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2004
- [Fuk98] Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562, [hep-ex/9807003](#)
- [Gar57] R. L. Garwin et al., *Phys. Rev.* **105** (1957) 1415
- [Glü03] F. Glück, Vortrag EMD Task Meeting in Fulda (Februar 2003) und Vortrag 5. KATRIN Kollaborationstreffen in Karlsruhe (Dezember 2003), KATRIN internes Dokument Nr. 95-TRP-1527-Glück
- [Glü04a] F. Glück, Vortrag EMD Task Meeting in Bonn (April 2004)
- [Glü04b] F. Glück, persönliche Mitteilung; Veröffentlichung in Vorbereitung
- [Gol58] M. Goldhaber et al., *Phys. Rev.* **109** (1958) 1015
- [Han03] S. Hannestad, [astro-ph/0303076 v1](#)
- [Jac02] J. D. Jackson, Klassische Elektrodynamik, 3. Auflage, de Gruyter, 2002
- [Kat03a] B. Flatt und C. Weinheimer, KATRIN internes Dokument Nr. 25-DRQ-0003-7, April 2003
- [Kat03b] T. Thümmler, B. Flatt und C. Weinheimer, KATRIN internes Dokument Nr. 25-ME-2001-1, Juli 2003
- [Kat04] B. Bornschein et al., KATRIN internes Dokument Nr. 10-DSP-2030-2, Juli 2004
- [Kau02] W. Kaufmann, *Phys. Zeitschr.* **4** (1902) 54
- [Kla04] H. V. Klapdor-Kleingrothaus et al., *Phys. Lett.* **B586** (2004) 198 - 212
- [Kod01] K. Kodama et al. (DONUT Collaboration), *Phys. Lett.* **B504** (2001) 218 - 224
- [Kra03] C. Kraus, Dissertation, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2003
- [Kut01] W. Kutta, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* **46** (1901) 435 - 453
- [Lob85] V. M. Lobashev et al., *Nucl. Instr. Meth.* **A240** (1985) 305

- [LVer] Landesamt für Vermessung und Geobasisinformation Rheinland-Pfalz, URL: <http://www.lvermgeo.rlp.de/>
- [Mat99] J. C. Mather et al., *Astrophys. J.* **512** (1999) 511
- [Mül02] B. Müller, Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2002
- [Mur04] H. Murayama, URL: <http://hitoshi.berkeley.edu/neutrino/>
- [Osi01] A. Osipowicz et al. (KATRIN Collaboration), [hep-ex/0109033](http://arxiv.org/abs/hep-ex/0109033)
- [Osi04a] A. Osipowicz, Vortrag 6. KATRIN Kollaborationstreffen in Moskau (Juni 2004), KATRIN internes Dokument 95-TRP-1632-Osipowicz.pdf
- [Osi04b] A. Osipowicz, Vortrag EMD Task Meeting in Mainz (Juli 2004)
- [Pai86] A. Pais, *Inward Bound – Of Matter and Forces in the Physical World*, Oxford University Press, 1986
- [Pau30] Wolfgang Pauli, „Offener Brief an die Gruppe der Radioaktiven bei der Gauvereins-Tagung zu Tübingen“ (datiert 4. Dez. 1930), wiedergegeben in: R. Kronig and V. Weisskopf (Eds.), Wolfgang Pauli, *Collected Scientific Papers*, Vol. 2, Interscience, New York (1964) 1316 - 1317
- [PDG04] S. Eidelman et al. (Particle Data Group), *Phys. Lett.* **B592** (2004) Issues 1 - 4
- [Pen65] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142** (1965) 419
- [Per75] M. L. Perl et al., *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 1489
- [Pic90] A. Picard, Dissertation, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 1990
- [Pi92a] A. Picard et al., *Nucl. Instr. Meth.* **B63** (1992) 345
- [Pi92b] A. Picard et al., *Z. Phys.* **A342** (1992) 71 - 78
- [Perr33] F. Perrin, *Comptes Rendus* **197** (1933) 1625
- [Pre01] W. Preuß und G. Wenisch (Hrsg.), *Lehr- und Übungsbuch Numerische Mathematik*, Fachbuchverlag Leipzig, 2001
- [Read] F. H. Read et al., *Rev. Sci. Inst.* **69** (1998) 2000; *Nucl. Instr. Meth.* **A427** (1999) 363 - 367
- [Rei59] R. Reines and C. L. Cowan, *Phys. Rev.* **113** (1959) 273
- [Rob88] R. G. H. Robertson and D. A. Knapp, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **38** (1988) 185
- [Root] URL: <http://root.cern.ch/>
- [Rut08] E. Rutherford and H. Geiger, *Proc. Roy. Soc.* **A81** (1908) 162
- [Rut14] E. Rutherford and E. N. da C. Andrade, *Phil. Mag.* **27** (1914) 854
- [Sae00] A. Saenz et al., *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 242 - 245
- [San03] S. Sánchez Majos, Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2003

- [Sch97] N. Schmitz, Neutrinophysik, Teubner Verlag, 1997
- [Sim00] D. A. Dahl, Simion 3D Version 7 User's Manual, Idaho National Engineering and Environmental Laboratory, ID 83415, 2000
- [SNO] Website zum SNO-Experiment: <http://www.sno.phy.queensu.ca/>
- [Spe03] D. N. Spergel et al. (WMAP), [astro-ph/0302209](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302209) v2
- [Ste04] M. Steidl, Vortrag 7. KATRIN Kollaborationstreffen in Karlsruhe (Dezember 2004), KATRIN internes Dokument 95-TRP-1741-Steidl.ppt
- [Thü02] T. Thümmler, Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2002
- [Vill00] P. Villard, Comptes Rendus **130** (1900) 1010 1178
- [Wei04] C. Weinheimer, persönliche Mitteilung
- [Win04] Erdmagnetisches Observatorium Wingst (Geoforschungszentrum Potsdam, GFZ), URL: <http://www.gfz-potsdam.de/pb2/pb23/GeoMag/Wingst/>
- [Wu57] C. S. Wu et al., Phys. Rev. **105** (1957) 1413