

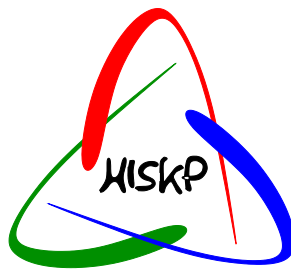
# Untersuchungen zur Penningfalle zwischen den Spektrometern des KATRIN Experiments

von

Kathrin Essig

Diplomarbeit in Physik

angefertigt im



Helmholtz-Institut für Strahlen- und Kernphysik

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn

im Januar 2004



Ich versichere, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt, sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Dr. C. Weinheimer

Korreferent: Prof. Dr. P. Herzog



# Einleitung

Lange Zeit galten Neutrinos als masselose Teilchen. Heute weiß man, dass dem nicht so ist: Neutrinos tragen eine (wenn auch relativ kleine) Masse. Neutrinos sind im Universum in sehr großer Zahl vorhanden. Die meisten von ihnen sind Überbleibsel des Urknalls, der Rest stammt aus Teilchenzerfällen. Da Neutrinos zu den elementaren Bausteinen des Universums zählen, ist die Kenntnis der absoluten Masse aller drei Neutrinoarten äußerst wichtig für weite Bereiche der Kosmologie und Astrophysik sowie der Elementarteilchenphysik. Die Bestimmung der absoluten Neutrinomassen-Skala ist eine der größten Herausforderungen der aktuellen Forschung. Bisherige Experimente sind lediglich in der Lage, eine Obergrenze für die Neutrinomassen anzugeben. Eine Neutrinomassenmessung im Sub-eV-Bereich wird mit dem **Karlsruher Tritium Neutrino Experiment KATRIN** möglich sein.

KATRIN besteht neben einer Tritiumquelle als Elektronenemitter und einem Halbleiterdetektor zum Elektronennachweis hauptsächlich aus zwei Spektrometern vom MAC-E-Filter Typ, welche das Energiespektrum der Elektronen aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall analysieren und somit die Messung der Neutrinomasse  $m_\nu$  ermöglichen. Die elektromagnetische Feldkonfiguration dieser hintereinander geschalteten Spektrometer führt auf ideale Speicherbedingungen für geladene Teilchen. Zerfallselektronen können also in diesem Teilchenspeicher vom Typ Penningfalle eingefangen werden. Je länger sich die Elektronen dort aufhalten, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie durch Stöße Ionen erzeugen, die aufgrund ihrer positiven Ladung in Richtung Detektor beschleunigt werden. Wenn die Ionen auf diesem Weg ihrerseits in Stoßprozessen Sekundärelektronen freisetzen, deren Energie ausreicht, um die Analyseebene des Hauptspektrometers zu überwinden, können die Sekundärelektronen vom Detektor nachgewiesen werden und das Messergebnis verfälschen, falls die Energien dieser Sekundärelektronen in auf die Neutrinomasse besonders sensiblen Bereich des  $\beta$ -Spektrums liegen. Erfahrungen aus früheren Tritium- $\beta$ -Experimenten zeigen, dass im zeitlichen Mittel bereits ein im Hauptspektrometer gespeichertes Elektron ausreichen kann, um die Untergrundzählrate messbar zu erhöhen [Sch01]. Die Kenntnis und das genaue Verständnis jedes einzelnen Untergrundprozesses ist für eine hochpräzise Neutrinomassenmessung daher von entscheidender Bedeutung.

In Kühlprozessen, wie Synchrotronstrahlung oder Stößen, verlieren die zwischen den Spektrometern gespeicherten Elektronen ihre kinetische Energie, bis schließlich keine Stoßionisation mehr möglich ist. Um den Beitrag der Elektronen in der Penningfalle zum Untergrund richtig einordnen zu können, ist es wichtig, die Anzahl der durch ein gespeichertes Elektron erzeugten Elektron-Ionen-Paare sowie die Zeitskala zu kennen, auf der diese Kühlung vonstatten geht.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zu diesem Zweck zwischen den Spektrometern gespeicherte Elektronen simuliert und ihre Speicherzeiten berechnet. Desweiteren wurden die Stöße der Elektronen mit Restgasmolekülen qualitativ und quantitativ untersucht. Zunächst aber mussten die notwendigen Computerprogramme erweitert beziehungsweise entwickelt und getestet werden.

Nach einer kurzen Einführung in die Geschichte und die Eigenschaften des Neutrinos in Kapitel 1, folgt in Kapitel 2 die Beschreibung des KATRIN Experiments. Auf die sich daraus ergebende Problematik der Teilchenspeicherung und eine allgemeine Darstellung der Charakteristik einer Penningfalle wird in Kapitel 3 näher eingegangen. Die verwendeten Simulationsprogramme werden in Kapitel 4 vorgestellt und erläutert. In den sich anschließenden Kapiteln werden die Kühlmechanismen beschrieben und ihre Auswirkungen auf die gespeicherten Teilchen untersucht. Dabei beziehen sich Kapitel 5 auf die Synchrotronstrahlung und Kapitel 6 und 7 auf die Stoßprozesse. Schließlich endet diese Arbeit mit einer Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse und einem Ausblick mit weiteren Ideen für die Software gestützte Untersuchung der Penningfalle und einem Konzept für den Aufbau eines Experimentes zur Messung von gespeicherten Teilchen in MAC-E-Filtern am Mainzer Tritium- $\beta$ -Spektrometer.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Paulis Neutrinohypothese . . . . .	2
1.2	Neutrinos im Standardmodell . . . . .	2
1.3	Das unfassbare Neutrino . . . . .	3
1.4	Das unglaubliche Neutrino . . . . .	3
1.5	Das oszillierende Neutrino . . . . .	4
1.6	Das kosmologische Neutrino . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Das KATRIN Experiment</b>	<b>13</b>
2.1	Das MAC-E-Filter . . . . .	15
2.2	Experimenteller Aufbau . . . . .	17
2.3	Sensitivität . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Die Teilchenfalle im KATRIN Experiment</b>	<b>19</b>
3.1	Penningfalle zw. Vor- und Hauptspektrometer . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Simulationsprogramme</b>	<b>23</b>
4.1	SIMION 3D Version 7.0 . . . . .	23
4.1.1	Erstellen der elektrischen Potentialkarten . . . . .	23
4.1.2	Erstellen der magnetischen Potentialkarten . . . . .	24
4.1.3	Bahnverfolgung . . . . .	25
4.1.4	SIMION User Programming . . . . .	25
4.2	ADIPARK . . . . .	27
4.2.1	Driftterme . . . . .	27
4.3	Lorentz3D . . . . .	28

<b>5</b>	<b>Synchrotronstrahlung</b>	<b>33</b>
5.1	Einbau der Synchrotronstrahlung in SIMION . . . . .	34
5.1.1	Test der Synchrotronstrahlung in SIMION . . . . .	35
5.2	Synchrotronstrahlung in ADIPARK . . . . .	38
5.3	Synchrotronstrahlung im KATRIN–Aufbau . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Streuprozesse</b>	<b>47</b>
6.1	Streuprozesse in ADIPARK . . . . .	48
6.1.1	Totale Wirkungsquerschnitte in ADIPARK . . . . .	53
6.1.2	Energieverlust und Streuwinkel in ADIPARK . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Simulationsergebnisse</b>	<b>61</b>
7.1	Winkelabhängigkeit des Kühlmechanismus . . . . .	62
7.2	Zusammenhang zwischen Speicherzeit und Radius . . . . .	65
7.3	Test der Numerik . . . . .	66
7.4	Lokalisierung der Ionisationsprozesse . . . . .	67
7.5	Aktives Entfernen der gespeicherten Elektronen . . . . .	71
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>User Program zur Synchrotronabstrahlung</b>	<b>85</b>



# Kapitel 1

## Einführung

Die Sonne ist uns von allen Sternen der nächste. Sie ist uns vertraut, und man kann sagen, ihr Anblick ist für uns selbstverständlich. Doch obwohl wir sie mit bloßem Auge sehen können, bleibt uns der Blick in die Tiefen ihres Innern verwehrt. Wenn wir etwas über die Prozesse innerhalb der Sonne erfahren wollen, benötigen wir eine Sonde, die in der Lage ist, die Sonne nahezu ungehindert zu durchdringen. Ein idealer Kandidat für eine solche Sonde sind Neutrinos. Sie werden in großer Zahl (ca.  $2 \times 10^{38} \text{ sec}^{-1}$ ) in Fusionsprozessen in der Sonne erzeugt, und aufgrund ihrer extrem kleinen Wechselwirkungswahrscheinlichkeit ist jegliche Materie für sie nahezu transparent. Dieser Vorteil macht ihren Nachweis auf der Erde jedoch ausgesprochen schwierig, da für die Detektion eines Teilchens eine Wechselwirkung zwingend notwendig ist. Alle Neutrinodetektoren zeichnen sich deshalb durch eine große Targetmasse aus, da man die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung erhöhen kann, indem man dem Neutrino eine große Anzahl an Reaktionspartnern anbietet.

In den frühen 1970er Jahren gelang es der Gruppe um Raymond Davis Jr., den Neutrinofluss von der Sonne in einem mit ca. 350.000 Liter Tetrachlorethylen gefüllten Tank zu messen [Dav94, Cle95, Dav96]. Dieser befand sich mehr als 1 km tief unter der Erdoberfläche in der Homestake Goldmine in South Dakota. Man stellte fest, dass nur ein Drittel der Anzahl der erwarteten Neutrinos auf der Erde ankam. Wenn wir davon ausgehen, dass sowohl das Experiment, als auch unser Verständnis der in der Sonne vor sich gehenden Prozesse korrekt sind, was geschieht dann mit den restlichen solaren Neutrinos? Eine mögliche Erklärung für dieses sogenannte *Solare Neutrino Problem (SNP)* ist, dass sich die Neutrinos auf ihrem Weg von der Sonne zur Erde in etwas umwandeln, das vom Detektor nicht nachgewiesen werden kann. Dieses Phänomen der Oszillation ist uns schon von den Mesonen, nämlich vom  $K^0 - \bar{K}^0$ -System, bekannt. Erst im April 2002 konnten Messungen mit dem *Sudbury Neutrino Observatory (SNO)* eine zweifelsfreie Antwort auf diese Frage geben [SNO03].

An dieser Stelle wird es für das weitere Verständnis jedoch notwendig, sich zunächst mit einer anderen Frage auseinander zu setzen:

*Was ist eigentlich ein Neutrino?*

Um es mit den Worten Frederick Reines zu sagen: „[It is]...the most tiny quantity of reality ever imagined by a human being.“

Obwohl sich Wissenschaftler seit über 70 Jahren mit dem Neutrino beschäftigen, sind seine Eigenschaften immer noch nicht vollständig bekannt. Die momentan vielleicht wichtigste Unbekannte ist die Neutrinomasse. Die Einzigartigkeit dieses Teilchens wird deutlich, wenn man seinen Auftritt in der Geschichte der Physik betrachtet.

## 1.1 Paulis Neutrinohypothese

Ende des 19. Jahrhunderts war bekannt, dass einige Atomkerne nicht stabil sind, sondern sich unter Aussendung von „Strahlung“ umwandeln. Eine Möglichkeit eines solchen radioaktiven Zerfalls ist der  $\beta^-$ -Zerfall, d.h. die Umwandlung eines Neutrons in ein Proton innerhalb eines Atomkerns unter Emission eines Elektrons:

$$\text{Kern}_1 \rightarrow \text{Kern}_2 + e^-.$$

In diesem Fall spricht man von einem Zweikörper-Zerfall und erwartet, dass sich die Zerfallsenergie zwischen den beiden beteiligten Teilchen aufteilt. Die Energie des Elektrons ist dadurch eindeutig bestimmt, was gleichbedeutend ist mit nur einer einzigen Linie im Energiespektrum, wenn  $\text{Kern}_1$  in Ruhe zerfällt. Das Energiespektrum des Elektrons ist jedoch kontinuierlich, so dass fundamentale Gesetzmäßigkeiten wie Energie- und Impulserhaltung verletzt scheinen. 1930 postulierte Wolfgang Pauli eine mögliche Erklärung für diesen überraschenden Sachverhalt [Pau61, Mey85]: Wenn beim  $\beta^-$ -Zerfall neben dem Elektron noch ein weiteres Teilchen emittiert würde, könnte dieses die überschüssige Energie aufnehmen und somit die Gültigkeit obiger Erhaltungssätze garantieren. Da dieses Teilchen nicht als Zerfallsprodukt nachgewiesen werden konnte, musste es nicht nur ungeladen sein (Pauli gab ihm aufgrund dieser Eigenschaft den Namen „Neutron“), sondern auch eine extrem kleine Ruhemasse besitzen. Zudem musste es wie die am  $\beta^-$ -Zerfall beteiligten Teilchen Neutron, Proton und Elektron einen Eigendrehimpuls  $\frac{1}{2}$  tragen, um die Drehimpulserhaltung zu gewährleisten. Später wurde es von Enrico Fermi in Neutrino (= kleines Neutron) umbenannt, als man das Neutron als neutralen Partner des Protons identifiziert hatte. Bis hierhin war die Existenz des Neutrinos lediglich theoretisch vorhergesagt. Es sollten noch weitere 23 Jahre vergehen, bis diese Hypothese experimentell verifiziert werden konnte.

## 1.2 Neutrinos im Standardmodell

Die Teilchenphysik hat ein Modell hervorgebracht, welches die Bestandteile der uns bekannten Materie und ihre Wechselwirkungen untereinander beschreibt. Dieses sogenannte Standardmodell hat die Anzahl der „elementaren Teilchen“ beträchtlich verringert. Gemäß dem Standardmodell besteht die gesamte Materie aus 12 Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$ , die sich wiederum in 6 Leptonen und 6 Quarks gliedern. Sie werden in aufsteigender Masse in drei „Familien“ oder „Generationen“ angeordnet. Zu den Quarks zählen das Up-, Down-, Charm-, Strange-, Top- und Bottom-Quark mit

jeweils drei Farben (*flavours*) und einer Ladung in Vielfachen von  $\pm\frac{1}{3}$ . Die Leptonen setzen sich zusammen aus dem Elektron (e), dem Myon ( $\mu$ ) und dem Tau ( $\tau$ ) mit jeweils der elektrischen Ladung  $-e$  und den Massen  $m_{e,\mu,\tau}$  und den dazu gehörigen ungeladenen Neutrinos  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ . Im bisher verwendeten Standardmodell werden die Neutrinos als masselos angenommen, obwohl massebehaftete Neutrinos keinen Widerspruch darstellen bzw. in das bestehende Standardmodell formal problemlos eingebettet werden können. Allerdings stellt sich dann die Frage, warum zumindest im Falle des Elektroneneutrinos  $\nu_e$ , die Neutrinomasse so viel kleiner ist als die Masse der zugehörigen Leptonen. Zu all diesen Fermionen genannten Teilchen gehören die jeweiligen Antiteilchen mit gleicher Masse, aber entgegengesetzter Ladung. Die Neutrinos gehören also zu den elementaren Bestandteilen unseres Universums.

### 1.3 Das unfassbare Neutrino

Wir kennen vier fundamentale Wechselwirkungen: Die elektromagnetische, die starke, die schwache Wechselwirkung und die Gravitation, wobei letztere nicht Teil des Standardmodells ist. Neutrinos unterliegen als elektrisch neutrale und farblose Fermionen der schwachen Wechselwirkung und der Gravitation. Reaktionen von Neutrinos weisen nur sehr kleine Wirkungsquerschnitte auf<sup>1</sup>. Die Tatsache, dass innerhalb einer Sekunde Milliarden von solaren Neutrinos jeden Quadratzentimeter unseres Körpers durchdringen, ohne dass wir auch nur das Geringste spüren, unterstreicht diese Aussage auf beeindruckende Weise.

Die ersten, die 1956 einen zweifelsfreien Nachweis der Neutrinohypothese lieferten, waren Frederick Reines und Clyde L. Cowan [Rei59], indem sie die Umkehrung des  $\beta$ -Zerfalls

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

durch Beschuss von Wasserstoffatomen mit Antineutrinos aus einem Kernreaktor beobachteten. Genauer gesagt, konnte mit diesem Experiment die Existenz des Elektronantineutrinos  $\bar{\nu}_e$  nachgewiesen werden. Aufgrund der Leptonzahlerhaltung (siehe Abschnitt 1.4) der schwachen Wechselwirkung ist das am  $\beta^-$ -Zerfall  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  beteiligte Teilchen ebenfalls ein Elektronantineutrino  $\bar{\nu}_e$ . Die Entdeckung des Myoneneutrinos  $\nu_\mu$  folgte 1962 durch Lederman, Steinberger und Schwartz, die des Tau-neutrinos  $\nu_\tau$  im Jahre 2000 durch das DONUT-Experiment am Fermilab [Don00].

### 1.4 Das unglaubliche Neutrino

Fermionen werden in der relativistischen Quantenmechanik durch die Dirac-Gleichung beschrieben. Im masselosen Fall hat sie genau zwei Lösungen, die man als Zustände

---

<sup>1</sup>In der Neutrino-Elektron-Streuung liegen die Wirkungsquerschnitte im Bereich von  $\sim 10^{-42} \text{ cm}^2 \cdot E_\nu/\text{GeV}$ , in der Neutrino-Nukleon-Streuung von  $\sim 10^{-38} \text{ cm}^2 \cdot E_\nu/\text{GeV}$ . Zum Vergleich: Im Falle der Streuung von Protonen an Protonen beträgt der totale Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{pp} \approx 40 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$  bei einer Strahlenergie von 10 GeV.

rechtshändiger (positiver) oder linkshändiger (negativer) Chiralität bezeichnet. Die schwache Wechselwirkung ist als einzige der bekannten Wechselwirkungen paritätsverletzend, d.h. schwache Prozesse unterscheiden sich von ihrem Spiegelbild. Im Standardmodell haben Neutrinos keinerlei elektromagnetische Eigenschaften. Sie tragen weder elektrische Ladung, noch besitzen sie ein elektrisches oder magnetisches Dipolmoment. Somit stellt sich die Frage: *Worin unterscheiden sich Neutrinos von ihren Antiteilchen?* Da Neutrinos zu den Leptonen gehören, kann man ihnen eine sogenannte Leptonzahl zuordnen, die für Leptonen  $+1$ , für Antileptonen  $-1$  beträgt. Für Leptonen im Allgemeinen ist diese Leptonzahl in der schwachen Wechselwirkung in allen Reaktionen erhalten. Innerhalb jeder einzelnen Familie wird die Leptonzahl allerdings durch Neutrinooszillationen (siehe Abschnitt 1.5) verletzt. Alle bisherigen Experimente sind konsistent damit, dass Neutrinos *immer* linkshändig und Antineutrinos *immer* rechtshändig sind, also ist bei Neutrinos der Spin *immer* entgegengesetzt, bei Antineutrinos *immer* gleich der Geschwindigkeit orientiert. Diese maximale Paritätsverletzung gilt allerdings nur unter der Prämisse, dass Neutrinos exakt masselos sind. Für massebehaftete Teilchen gibt es auch immer eine Beimischung der entgegengesetzten Chiralität. Aus den Neutrinooszillationen folgt, dass Neutrinos nicht masselos sind. Im Falle massebehafteter Neutrinos existieren somit auch rechtshändige Neutrinos.

## 1.5 Das oszillierende Neutrino

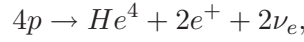
Teilchen können sich unter gewissen Umständen wie Wellen verhalten. Die Wellenlänge (DeBroglie–Wellenlänge)  $\lambda$  ist dann antiproportional zum Teilchenimpuls  $p$ :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}}, \quad (1.1)$$

mit  $h$  dem Planckschen Wirkungsquantum,  $c$  der Lichtgeschwindigkeit,  $E$  der Energie und  $m_0$  der Ruhemasse des Teilchens. Dieses Verhalten spielt erst dann eine Rolle, wenn mindestens zwei solcher Materiewellen miteinander interferieren, d.h., die Wellenberge addieren sich zu einem größeren Wellenberg (konstruktive Interferenz), bzw. ein Wellenberg trifft auf ein Wellental und es kommt zur Auslöschung (destruktive Interferenz). Haben zwei interferierende Wellen dieselbe Wellenlänge, so ist die resultierende Welle je nach Phasenlage einfach eine verkleinerte bzw. vergrößerte Kopie der ursprünglichen Wellen. Sind die Wellenlängen jedoch verschieden, so hat die resultierende Welle keine feste Wellenlänge mehr, da die beiden Wellen an manchen Stellen konstruktiv und an anderen Stellen destruktiv interferieren. Ihre Amplitude variiert periodisch. Die Frequenz, mit der diese Variation stattfindet, ist proportional zur Differenz der ursprünglichen Frequenzen. Diese Beschreibung ähnelt der von Neutrinooszillationen (Wellen alternieren zwischen verschiedenen Zuständen). Falls man jedoch ein gegebenes Neutrino als Materiewelle bezeichnet, wo findet man dann die zur Interferenz notwendige zweite Materiewelle? Die Antwort ist so einfach wie erstaunlich: Das Neutrino interferiert mit sich selbst. In der schwachen Wechselwirkung werden Neutrinos als  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  erzeugt. Betrachten wir der Einfachheit halber nur zwei Neutrinoarten. Falls sich z.B. das Elektronneutrino  $\nu_e$  nicht wie

eine einzelne Materiewelle verhält, sondern wie eine der oben beschriebenen kombinierten Wellen, d.h. falls das  $\nu_e$  keine feste Masse hat, sondern sich in einem Zustand befindet, der eine Überlagerung zweier Massenzustände ist, so können die beiden unterschiedlichen Massenterme miteinander interferieren. Ein Myonneutrino  $\nu_\mu$  ist dann eine andere Mischung dieser zwei Massenzustände. Umgekehrt ist ein Neutrino mit einer festen Masse eine Mischung aus Elektron- und Myonneutrino, so dass dann aus dem ursprünglichen reinen Elektronneutrino als Mischung zweier Massenzustände ein Neutrino mit einer reinen Masse und einer Mischung von Flavoureigenschaften geworden ist. An diesem einfachen Spezialfall soll der Mechanismus der Neutrinooszillation veranschaulicht werden.

Kommen wir nun zurück zu unserem ursprünglichen Problem, dem Solaren Neutrino Problem. Neutrinos werden in der Sonne bei der thermonuklearen Fusion von Wasserstoff zu Helium zu 98 % in einer Kette von Reaktionen gebildet, deren Summe sich schreiben lässt als



d.h., der in der Sonne entstehende Neutrinofluss besteht ausschließlich aus  $\nu_e$ 's. Angenommen, ein in der Sonne "geborenes"  $\nu_e$  könnte auf dem Weg zu einem auf der Erde befindlichen Detektor über den oben beschriebenen Oszillationseffekt seinen Flavour ändern. Ist der Detektor für Neutrinos des neuen Flavours nicht sensitiv, würde das in einem gegenüber der Erwartung reduzierten gemessenen Neutrinofluss resultieren. Um Neutrinooszillationen als Lösung des SNP zu bestätigen, reicht eine Messung des Elektronneutrinoflusses allein nicht aus. Tatsächlich ist das mit 1000 Tonnen Schwerwasser ( $D_2O$ ) gefüllte und 10000 Photomultipliern bestückte Sudbury Neutrino Observatory (SNO) [SNO03] der erste Detektor, der auf alle drei Neutrino-flavours sensitiv ist und somit getrennt die Anzahl der Elektronneutrinos und die Gesamtzahl der ankommenden Neutrinos messen kann. Aus der Messung kann der Elektronneutrinofluss

$$\Phi_e = 1.76_{-0.05}^{+0.05}(\text{stat.})_{-0.09}^{+0.09}(\text{syst.}) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$$

und der kombinierte Fluss aus Myon- und Tauneutrinos

$$\Phi_\mu + \Phi_\tau = 3.41_{-0.45}^{+0.45}(\text{stat.})_{-0.45}^{+0.48}(\text{syst.}) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$$

extrahiert werden.

Die Messung des totalen Neutrinoflusses von der Sonne ergibt

$$\Phi_\nu = \Phi_e + \Phi_\mu + \Phi_\tau = 5.09_{-0.43}^{+0.44}(\text{stat.})_{-0.43}^{+0.46}(\text{syst.}) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \quad (1.2)$$

und ist in exzellenter Übereinstimmung mit dem vom *Standard Solar Model* [Bah01] vorhergesagten Fluss von  $\Phi_{SSM} = 5.05_{-0.81}^{+1.01} \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . In einer zweiten Phase des Experimentes ist das schwere Wasser im Detektor mit 2 Tonnen Salz angereichert worden. Dadurch konnte die Sensitivität in der Detektion der neutralen Ströme verbessert werden. Auch der in der zweiten Messphase ermittelte Neutrinofluss von  $\Phi_\nu^{\text{salt}} = 5.21_{-0.27}^{+0.27}(\text{stat.})_{-0.38}^{+0.38}(\text{syst.}) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  stimmt mit dem Modellfluss gut

überein. Damit ist nicht nur das Solare Neutrino Problem endgültig gelöst, sondern auch ein experimenteller Beweis für Neutrinooszillationen erbracht worden.

Die mathematische Beschreibung folgt nun für den allgemeinen Fall. Die verschiedenen an der schwachen Wechselwirkung teilnehmenden Neutrinoarten  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  werden Flavoureigenzustände  $|\nu_\alpha\rangle$  genannt mit  $\alpha = e, \mu, \tau$ . Sie sind allerdings keine Eigenzustände zum Massenoperator  $M$ , sondern wie bereits erwähnt Mischungen von Masseneigenzuständen  $|\nu_i\rangle$  mit festen Massen  $m_i$ . Flavour- und Masseneigenzustände hängen über eine unitäre Mischungsmatrix  $U$  miteinander zusammen:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \quad (1.3)$$

$$|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{i\alpha}^\dagger |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i}^* |\nu_\alpha\rangle. \quad (1.4)$$

Die Zeitabhängigkeit der Masseneigenzustände  $|\nu_i\rangle$  kann folgendermaßen beschrieben werden (man setze im folgenden  $\hbar = 1$  und  $c = 1$ ):

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (1.5)$$

$$\text{mit } E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p}, \quad (1.6)$$

falls  $p \gg m_i$ . Im Laufe der Zeit wandelt sich also ein reiner Flavourzustand  $|\nu_\alpha\rangle$  in einen Zustand

$$|\nu(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle = \sum_{i,\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle \quad (1.7)$$

um. Betrachten wir nun noch die Übergangswahrscheinlichkeiten  $P(\alpha \rightarrow \beta; t)$ :

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \quad (1.8)$$

$$= \sum_{i,j} |U_{\alpha i} U_{\beta i}^*|^2 + 2\text{Re} \sum_{j>i} U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* U_{\beta i}^* U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t} \quad (1.9)$$

Der erste Term beschreibt das Zeitmittel der Übergangswahrscheinlichkeit und der zweite die zeitabhängige Neutrinooszillation. Dieser hängt über die Energiedifferenz  $E_i - E_j$  (siehe Gleichung (1.6)) mit der Differenz der Massenquadrate  $\Delta m^2 = m_i^2 - m_j^2$  zusammen. Deshalb sind Neutrinooszillationen nur dann möglich, wenn wenigstens eine der Neutrinomassen verschieden von Null ist. Man benutzt für diese Art der Transformation das Wort „Oszillation“, da die Umwandlung nicht nur in eine Richtung erfolgt, sondern auch umgekehrt werden kann, z.B. oszilliert ein  $\nu_\mu$ , welches sich in ein  $\nu_e$  oder  $\nu_\tau$  umwandelt, laufend zwischen den drei Flavours hin und her.

Nicht nur anhand solarer Neutrinos lassen sich Oszillationen nachweisen, sondern auch mit atmosphärischen Neutrinos. Diese können anhand ihrer Energien im GeV-Bereich klar von solaren Neutrinos unterschieden werden, die nur Energien bis etwa 20 MeV erreichen. Atmosphärische Neutrinos entstehen, wenn kosmische Strahlung auf die Erdatmosphäre trifft. Dort werden durch Wechselwirkungen von Teilchen (z.B. Protonen) der kosmischen Strahlung mit Atomkernen (z.B. Stickstoff N) der oberen Atmosphäre Kaskaden von Sekundärreaktionen ausgelöst. In solchen hadronischen Schauern werden vornehmlich Pionen und geladene Kaonen erzeugt, die ihrerseits über den  $\mu^\pm$ -Zerfall letztendlich in Elektronen, Positronen und Neutrinos zerfallen können, z.B.

$$\begin{aligned}
 p + N &\rightarrow \pi^\pm, K^\pm + \dots \\
 \pi^+, K^+ &\rightarrow \mu^+ \nu_\mu; & \pi^-, K^- &\rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \\
 \mu^+ &\rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu; & \mu^- &\rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu
 \end{aligned}$$

Das Verhältnis  $R = \frac{(\nu_\mu/\nu_e)_{mes}}{(\nu_\mu/\nu_e)_{MC}}$  des gemessenen  $\nu_\mu/\nu_e$ -Verhältnisses zum in Monte-Carlo-Simulationen vorhergesagten Verhältnisses von atmosphärischen Myon- zu Elektronenneutrinos lässt sich in einem Energiebereich von 0.1 GeV bis 10 GeV bis auf 5% genau berechnen [Barr89, Honda90]. Der Nachweis von Neutrinooszillationen erfolgt über die Messung dieses Verhältnisses und dem Vergleich mit dem durch Simulationen vorhergesagten Wert. Detektoren für atmosphärische Neutrinos bestehen meist aus tief unter der Erdoberfläche positionierten Tanks, die dort gut vor allem gegenüber nicht zerfallenen atmosphärischen Myonen abgeschirmt sind. Diese dringen entsprechend ihrer Energie-Reichweite-Beziehung umso tiefer in die Erde ein, je höher ihre Energie ist. Die ankommenden Neutrinos wechselwirken mit dem Tankinhalt und erzeugen in Abhängigkeit ihres Flavours bei der Kollision  $e^-$  oder  $\mu^-$ . Die Super-Kamiokande-Kollaboration (SK) hat in den 1990er Jahren das Verhältnis  $R$  zu  $R = 0.63 \pm 0.03 \pm 0.05$  im Sub-GeV Bereich und  $R = 0.65 \pm 0.05 \pm 0.08$  im Multi-GeV Bereich bestimmt [Fu98]. Dieses Defizit von Myonneutrinos zusammen mit der beobachteten Abhängigkeit des Verhältnisses vom Zenitwinkel  $\theta_C$  kann mittels Oszillationen erklärt werden. Ein unter  $\theta_C = 0^\circ$  einfallendes Neutrino hat bis zum Detektor eine Strecke von ca. 20km zurückgelegt, während ein Neutrino mit  $\theta_C = 180^\circ$  die ganze Erde (ca. 10000km) durchquert hat. Letzteres hat aufgrund der langen Flugstrecke eine deutlich höhere Oszillationswahrscheinlichkeit.

Oszillationsexperimente haben nicht nur gezeigt, dass Neutrinos Masse besitzen, sondern sind auch sensitiv auf die Differenz der Massenquadrate  $\Delta m^2 = m_i^2 - m_j^2$ . Damit können sie eine Untergrenze für eine der beteiligten Neutrinomassen angeben. Die Kombination aller Messdaten aus Experimenten mit atmosphärischen und solaren Neutrinos, Beschleunigerneutrinos sowie Reaktorneutrinos liefert

$$\Delta m_{12}^2 < \Delta m_{23}^2 \leq 5 \times 10^{-3} \text{eV}^2.$$

Die Tatsache, dass Neutrinos massebehaftet sind, hat interessante Auswirkungen auf sowohl Teilchenphysik, als auch Kosmologie.

Das bisherige Standardmodell (vgl. Abschnitt 1.2) nimmt Neutrinos als masselos

an, wohingegen alle anderen Bausteine der Materie Masse besitzen. Dabei folgt die Masselosigkeit des Neutrinos nicht, wie z.B. beim Photon, aus einem fundamentalen Prinzip. Die Neutrinomasse ist vielmehr ein frei wählbarer Parameter. Damit wird deutlich, dass das Standardmodell erweitert werden muss, da eine vollständige Theorie die Massen aller Elementarteilchen voraussagen sollte. Die genaue Kenntnis der Neutrinomasse, der Oszillation sowie der Mischungsmatrix  $U$ , ist für die Entwicklung einer solchen Theorie essentiell wichtig. Da die Neutrinomasse im Vergleich zu den restlichen Leptonmassen sehr klein ist, wird sie sich quantitativ nicht sonderlich auf die Vorhersagen des Standardmodells auswirken. In der Tat gibt es bis heute keine direkten Hinweise auf die Neutrinomasse. Nur in „Interferenz“-Experimenten kann dieser winzige Effekt beobachtet werden. Dennoch lässt die Existenz einer Neutrinomasse darauf schließen, dass die Eigenschaft „Masse“ der gesamten Materie gemein ist.

## 1.6 Das kosmologische Neutrino

Neutrinos entstehen nicht nur bei den Fusionsprozessen im Innern von Sternen oder bei Supernovae, sondern sie füllen außerdem als Überbleibsel des Urknalls, zusammen mit dem photonischen Anteil, das Universum als kosmische Hintergrundstrahlung. Allein deren Neutrinokomponente führt auf eine Neutrinoanzahl, die eine Milliarde mal größer ist als die Menge an sogenannter baryonischer Materie (d.h. vor allem Protonen, Neutronen und Elektronen), das sind ungefähr 336 Neutrinos pro  $\text{cm}^3$ . Aufgrund ihrer großen Anzahl könnten Neutrinos auch bei kleiner Masse eine wichtige Rolle für die Evolution des Universums spielen. Das bedeutet aber andererseits, dass uns die Beobachtung des Universums Informationen über die Eigenschaften von Neutrinos liefert.

Die Entstehung und Entwicklung des Universums werden beschrieben durch die Urknalltheorie. Sie basiert auf der allgemeinen Relativitätstheorie und besagt, dass sich vor etwa 14 Milliarden Jahren [Ben03] das Universum in einem äußerst heißen und dichten Zustand von nur wenigen Millimetern Ausdehnung befand. Seither expandiert es bis hin zu dem riesigen kalten Kosmos ( $T = 2.725 \pm 0.002 \text{ K}$  [Ben03]), in dem wir heute leben. Die Urknalltheorie geht davon aus, dass die im Universum vorhandene Materie auf großen Skalen homogen und isotrop verteilt ist.

Das zeitliche Verhalten des Universums lässt sich unter obigen Annahmen durch

$$H^2(R) \equiv \frac{\dot{R}^2}{R^2} = H_0^2 (\Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{m_0} R^{-3} + \Omega_{r_0} R^{-4} + \Omega_{k_0} R^{-2}) \quad (1.10)$$

beschreiben, wobei  $R$  einen zeitabhängigen Skalenparameter für die Abstandsmessung im dreidimensionalen Ortsraum bezeichnet.

$H_0$  ist der heutige Wert des sogenannten Hubble-Parameters  $H(R)$ , der ein Maß für die Expansionsrate des Universums ist. Der Hubble-Parameter ist nach Edwin Hubble benannt, der in den 1920er Jahren erstmals die Ausdehnung des Universums experimentell nachweisen konnte, als er feststellte, dass sich Galaxien außerhalb der Milchstraße umso schneller von uns fortbewegen, je weiter sie von unserer Galaxis entfernt sind. Der heutige Wert, auch Hubble-Konstante genannt, wurde durch das



*Hubble Space Telescope Key Project* [Free01] zu

$$H_0 = 72 \pm 2 \pm 7 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

bestimmt.

Die Parameter  $\Omega_{i_0}$  sind so definiert, dass für den heutigen Skalenparameter  $R_0 \equiv R(t_{\text{heute}}) = 1$  und somit die *kosmische Summenregel*

$$\Omega_0 \equiv \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} + \Omega_{k_0} = 1 \quad (1.11)$$

gilt.

$\Omega_r$  ist der Strahlungsbeitrag zu  $\Omega$ . Der heutige Anteil lässt sich aus der kosmischen Hintergrundstrahlung zu  $\Omega_{r_0} \sim 10^{-5}$  abschätzen, ist also vernachlässigbar.

$\Omega_k \sim -k$  ist mit der Krümmung  $k$  verknüpft und entscheidet damit über die Geometrie des Universums:

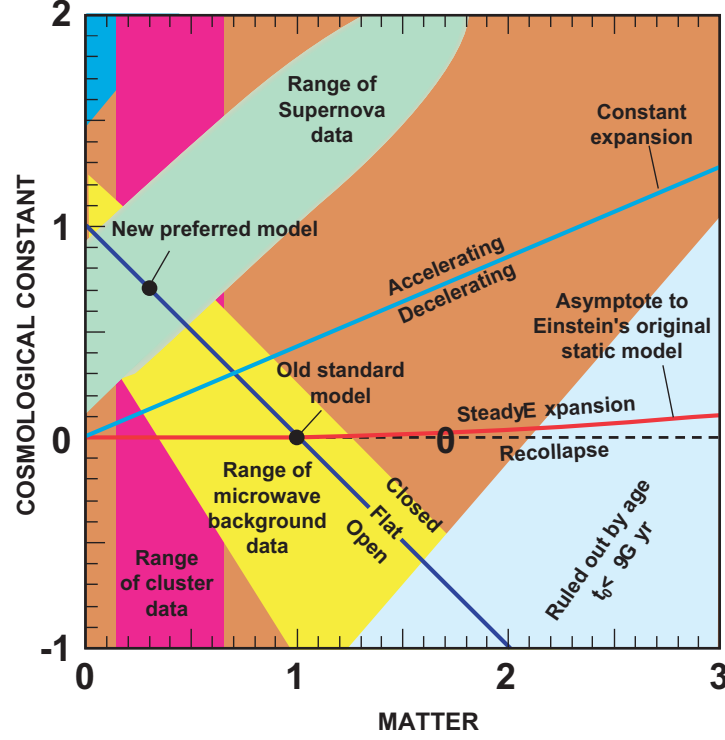
$$\begin{aligned} \Omega_k &= 0 \rightarrow \text{flaches Universum (euklidische Geometrie)} \\ \Omega_k &> 0 \rightarrow \text{geschlossenes Universum (sphärische Geometrie)} \\ \Omega_k &< 0 \rightarrow \text{offenes Universum (hyperbolische Geometrie)} \end{aligned}$$

Aus der Vermessung der Anisotropie der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung (*Cosmic Microwave Background Radiation* – *CMB*) erhält man  $\Omega_{\text{tot}} \equiv \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{m_0} + \Omega_{r_0} = 1.02^{+0.06}_{-0.05}$  [Be02] bzw.  $\Omega_{\text{tot}} = 1.02 \pm 0.02$  [Ben03]. Wegen  $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_0 - \Omega_{k_0} = 1 - \Omega_{k_0}$  sind die Messungen also verträglich mit  $\Omega_{k_0} = 0$ , was auf ein flaches Universum hinweist.

$\Omega_{m_0}$  bezeichnet den Materieanteil und  $\Omega_{\Lambda_0}$  den Beitrag der kosmologischen Konstante  $\Lambda > 0$  an  $\Omega_0$ . Abbildung 1.1 zeigt  $\Omega_{\Lambda_0}$  aufgetragen gegen  $\Omega_{m_0}$  ( $\Omega_{r_0} = 0$ ). Für  $\Omega_{k_0} = 0$ , also  $\Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{m_0} = 1$  ergibt sich die dunkelblaue Gerade, die ein flaches Universum widerspiegelt.  $\Omega_{\Lambda} > 0$  ist verknüpft mit einer konstanten (insofern die kosmologische Konstante  $\Lambda$  nicht von der Zeit abhängt) Energiedichte und damit mit einem „negativen Druck“, der zur Expansion des Universums beiträgt. Enthält das Universum demgegenüber genügend Masse, so wird die auf den Urknall folgende Ausdehnung gravitativ bis zum Stillstand gebremst oder sogar umgekehrt. Reicht die im Universum vorhandene Masse hierzu jedoch nicht aus, so wird sich das Weltall endlos ausdehnen und letztlich dem „Kältetod“ erliegen.

In der Kosmologie definiert man die sogenannte „kritische Dichte“ als die Dichte, die Gleichung (1.11) für  $\Lambda = 0$  und  $k = 0$  löst. Diese Randbedingungen definieren das alte Standardmodell des Universums mit  $\Omega_{m_0} = 1$  und  $\Omega_{\Lambda_0} = \Omega_{k_0} = 0$  (siehe Abb. 1.1), bei dem die Expansion zum Stillstand kommt, sich jedoch nicht umkehrt. Dieses Verhalten tritt auch für andere Kombinationen von  $\Omega_{\Lambda_0}$ ,  $\Omega_{m_0}$  und  $\Omega_{k_0}$  auf (siehe rote Linie in Abb. 1.1). Man schätzt die kritische Dichte heutzutage im Mittel auf  $\varrho_c \approx 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ , das entspricht ca. 6 Protonen pro  $\text{m}^3$ . Das Verhältnis der tatsächlichen Massendichte des Universums zur kritischen Dichte bezeichnet man als  $\Omega_m(R) \equiv \frac{\varrho_m(R)}{\varrho_c} = \frac{\Omega_{m_0}}{R^3} \cdot \frac{H_0^2}{H^2(R)}$ .

Lange Zeit erwartete man, dass die Expansion des Universums durch die gravitative Wirkung der in ihm vorhandenen Materie abgebremst wird (Lage von  $\Omega_{\Lambda_0}$  und  $\Omega_{m_0}$  unterhalb der hellblauen Linie in Abb. 1.1). Die Vermessung der Rotverschiebung



**Abbildung 1.1: Parameterraum  $(\Omega_{m_0}, \Omega_{\Lambda_0})$  [Gar99].** Die Summe  $\Omega_{m_0} + \Omega_{\Lambda_0}$  gibt den totalen kosmischen Energieinhalt an und entscheidet somit über die Geometrie der Raum-Zeit: Die Linie  $\Omega_{\Lambda_0} = 1 - \Omega_{m_0}$  (dunkelblau) beschreibt ein flaches und trennt ein offenes von einem geschlossenen Universum. Die Differenz  $\Omega_{m_0}/2 - \Omega_{\Lambda_0}$  charakterisiert die relative Stärke von Expansion und Gravitation und beschreibt den zeitlichen Verlauf der Expansionsrate: Die entsprechende (hellblaue) Linie repräsentiert eine gleichförmige Ausdehnung und trennt somit ein beschleunigt expandierendes Universum von einem Universum, dessen Expansion abgebremst wird. Ein Gleichgewicht zwischen beiden Energiedichten entscheidet, ob das Universum endlos expandiert (rote Linie) oder rekollabieren wird (gestrichelte Linie). Diese drei Effekte sind in großräumigen Strukturen (*cluster data*), über Temperaturanisotropien (*microwave background data*) und der Messung der universellen Expansion (*supernova data*) untersucht worden. Alle Beobachtungen liegen in einem engen Bereich des Parameterraumes und weisen auf ein flaches Universum mit einem Drittel der Energiedichte in Form von nichtrelativistischer Materie und zwei Drittel in Form von Vakuumenergie oder einer kosmologischen Konstante.

von Typ-I-Supernovae [Perl99, Riess98] deutet jedoch darauf hin, dass sich die Expansion sogar beschleunigt. Eine solche Beschleunigung lässt sich durch die Existenz einer bisher noch unbekannten Form von dunkler Energie erklären, deren Gravitation repulsiv wirkt. Die kosmologische Konstante  $\Lambda$  ist ein Beispiel für eine solche

## Matter and Energy in the Universe: A Strange Recipe

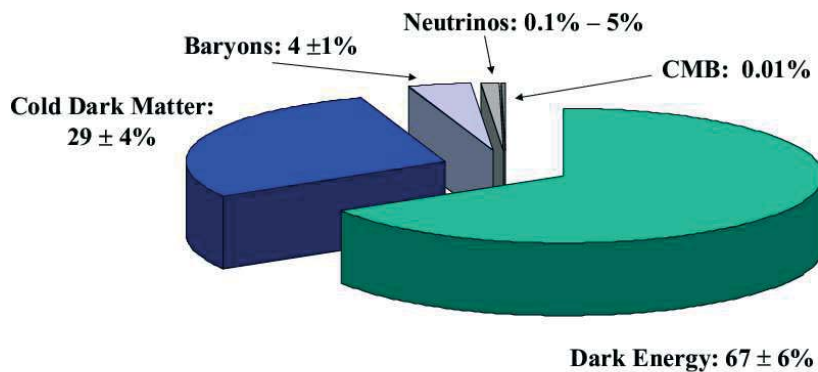


Abbildung 1.2: Zusammensetzung des heutigen Universums [Tu03].

Energieform.

Man nimmt an, dass dunkle Energie (*Dark Energy*) ungefähr zwei Drittel der Masse/Energie-Dichte des Universums ausmacht (siehe Abb. 1.2). Vom verbleibenden Drittel besteht ca. 1% aus sichtbarer normaler Materie (Sterne), der Rest ist dunkel und nur über seine gravitativen Effekte zu beobachten. Diese dunkle Materie setzt sich zusammen aus baryonischer Materie (ca. 4.5%) und schwach wechselwirkenden, nicht geladenen Elementarteilchen. Da sich die verschiedenen Beiträge zur Masse/Energie unterschiedlich entwickeln, ändert sich die Zusammensetzung mit der Zeit. Zu frühen Zeiten waren Photonen und relativistische Teilchen die vorherrschenden Komponenten; von 10000 Jahren nach dem Urknall bis vor einigen Milliarden Jahren war Materie dominierend, und in der Zukunft wird dunkle Energie den maßgeblichen Anteil ausmachen.

Aus der Strukturbildung im Universum kann man ableiten, dass die meisten dunkle Materie-Teilchen früher kalt waren, d.h. sie bewegten sich nichtrelativistisch. Heiße dunkle Materie, die sich mit relativistischen Geschwindigkeiten ausbreitet, hätte die Fluktuationen, die sich letztendlich zu Galaxien und Clustern entwickelt haben, geglättet. Dennoch kennt man heute ein Teilchen, welches man zur heißen dunklen Materie zählt: Das Neutrino. Aus Oszillationsexperimenten [Ah02, Fu02] ergibt sich für die Neutrinomasse eine Untergrenze von  $m_\nu = 0.05 \text{ eV}$ . Somit tragen Neutrinos mit mindestens 0.1% Masse/Energie im Universum bei.

Trotz der verschiedensten, unabhängigen kosmologischen Experimente, wie der Ver-

messung der Anisotropie der kosmischen Mikrowellen–Hintergrundstrahlung (WMAP) oder Messungen der Rotverschiebung von Galaxien (2dFGRS), ist die Neutrinomasse in den Messdaten nicht direkt zugänglich, sondern kann nur über das zugrunde liegende Modell bestimmt werden. Aus der Kombination der Messdaten ergibt sich als Summe aller drei Neutrinomassen [Spa03, Han03]

$$\sum m_\alpha < 0.7 - 2.2 \text{ eV}, \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (1.12)$$

oder [WMAP03]

$$\sum m_\alpha \approx 0.56 \text{ eV}. \quad (1.13)$$

Aus kosmologischen Daten lassen sich nur modellabhängige Aussagen über die Summe der drei Neutrinomassen treffen. Oszillationsexperimente können nur eine Untergrenze für eine der beteiligten Neutrinomassen liefern, da hier die Messgröße das Massenquadrat ist. Eine direkte Messung der Neutrinomasse kann derzeit nur durch ein hochsensitives Laborexperiment wie das KATRIN Experiment erfolgen.

## Kapitel 2

# Das KATRIN Experiment

Wie schon im vorherigen Kapitel erwähnt, ist die Kenntnis der Neutrinomasse  $m_\nu$  für viele aktuelle Fragestellungen der Physik von Interesse. Deshalb werden schon seit Jahren große Anstrengungen unternommen,  $m_\nu$  experimentell zu bestimmen. Oszillationsexperimente können Aufschluss über die Neutrinomasse geben, sind allerdings nur sensitiv auf die Differenz der Massenquadrate  $\Delta m_\nu^2 = |m_{\nu_1}^2 - m_{\nu_2}^2|$ . Dies führt lediglich auf eine Untergrenze einer der beteiligten Neutrinomassen  $m_{\nu_i}$ . Eine direkte Bestimmung von  $m_\nu$  ist möglich, wenn man die Kinematik des  $\beta$ -Zerfalls untersucht. Die Neutrinomasse kann dann direkt aus dem Energiespektrum des beteiligten Elektrons bestimmt werden (vgl. Abbildung 2.1).

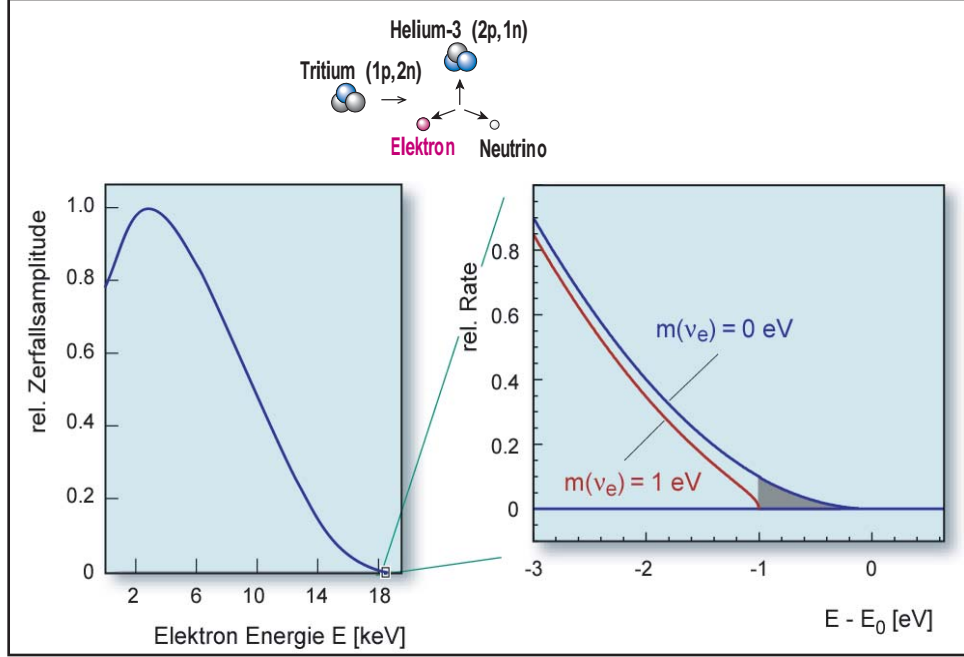
Vernachlässigt man für einen Moment die Mischung aus verschiedenen Masseneigenzuständen, so kann das Energiespektrum der Elektronen im  $\beta^-$ -Zerfall  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  eines Neutrons im Kern in ein Proton unter Aussendung eines Elektrons und eines Elektronantineutrinos durch

$$\frac{dN}{dE} = R(E) [(E - E_0)^2 - m_\nu^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

parametrisiert werden, wobei  $E$  die Elektronenergie und  $E_0$  die totale Zerfallsenergie sind. Für einen erlaubten Zerfall ist  $R(E)$  eine von der Neutrinomasse unabhängige Funktion:

$$R(E) = \frac{G_F^2}{2\pi^3 c^5 \hbar^7} \cos^2 \theta_C |M|^2 F(Z, E) p E (E_0 - E) \quad (2.2)$$

$G_F$  ist die Fermikonstante,  $p$  der Elektronimpuls,  $\theta_C$  der Cabibbowinkel und  $M$  das Kernmatrixelement. Die Funktion  $F(Z, E)$  beschreibt die Wechselwirkung des Elektrons im Endzustand. Da sowohl  $M$  als auch  $F(Z, E)$  keine Funktionen von  $m_\nu$  sind, folgt die Abhängigkeit der Form des Spektrums von der Neutrinomasse ausschließlich aus  $\sqrt{(E - E_0)^2 - m_\nu^2}$ . Hat das Neutrino eine endliche Ruhemasse, so endet das Spektrum bei einer Maximalenergie von  $E_0 - m_\nu$ , ansonsten bei  $E_0$ . Die Neutrinomasse  $m_\nu$  ließe sich also prinzipiell durch Bestimmung des Endpunktes des  $\beta$ -Spektrums ermitteln. Da  $E_0$  jedoch nicht genau genug bekannt ist, muss eine Bestimmung der Neutrinomasse  $m_\nu$  statt dessen aus der Vermessung der Kurvenform des Energiespektrums in der Nähe des Endpunktes erfolgen. Die Neutrinomasse erhält man dabei aus einem Fit des Energiespektrums mit einer Funktion



**Abbildung 2.1: Energiespektrum des Elektrons beim Tritium- $\beta$ -Zerfall.** Die Zerfallsenergie wird auf Elektron und Neutrino aufgeteilt. Neben dem kontinuierlichen Elektronspektrum (a) ist vergrößert die Endpunktregion nahe der Elektronenergie  $E_0 = 18.6$  keV dargestellt (b). Der Verlauf des Spektrums ist abhängig von  $m_\nu$ .

$\propto \sqrt{(E - E_0)^2 - m_\nu^2}$  mit  $m_\nu$  als Fitparameter. Das Besondere ist, dass bei dieser Art der Neutrinomassenmessung keine weiteren Bedingungen an die Eigenschaften des Neutrinos gestellt werden.

In der Nähe des Endpunktes  $E \rightarrow E_0$  nimmt die Zerfallsrate  $\frac{dN}{dE}$  rapide ab. Deshalb sollte man als Mutterkern für einen schwachen Zerfall ein Element wählen, bei dem sich  $m_\nu$  möglichst stark auf das Spektrum auswirkt. Der am besten geeignete Zerfall ist der  $\beta^-$ -Zerfall von Tritium



da Tritium mit einer Endpunktenergie von  $E_0 = 18.6$  keV einen sehr kurzen Spektralbereich abdeckt und somit relativ viele Zerfälle auf ein Intervall nahe des Endpunktes entfallen. Desweiteren liefert Tritium mit einer Halbwertszeit von 12.3 Jahren insgesamt genügend Zerfälle. Der  $\beta^-$ -Zerfall von Tritium ist ein übererlaubter Übergang, d.h., die Nukleonen behalten, wie beim Zerfall des freien Neutrons, ihre Wellenfunktionen bei. Kernspezifische Korrekturen der Übergangsmatrixelemente  $M$  brauchen also nicht berücksichtigt werden. Zu guter Letzt besitzt Tritium als Wasserstoffisotop eine einfache Konfiguration der Elektronenhülle, deren Einfluss leicht berechnet werden kann.

Die Messung der Neutrinomasse stellt trotz der Wahl des idealen  $\beta$ -Emitters hohe Anforderungen an ein Experiment. Aufgrund der geringen Zählrate im Messintervall um den Endpunkt ist eine möglichst hohe Raumwinkelakzeptanz und ein

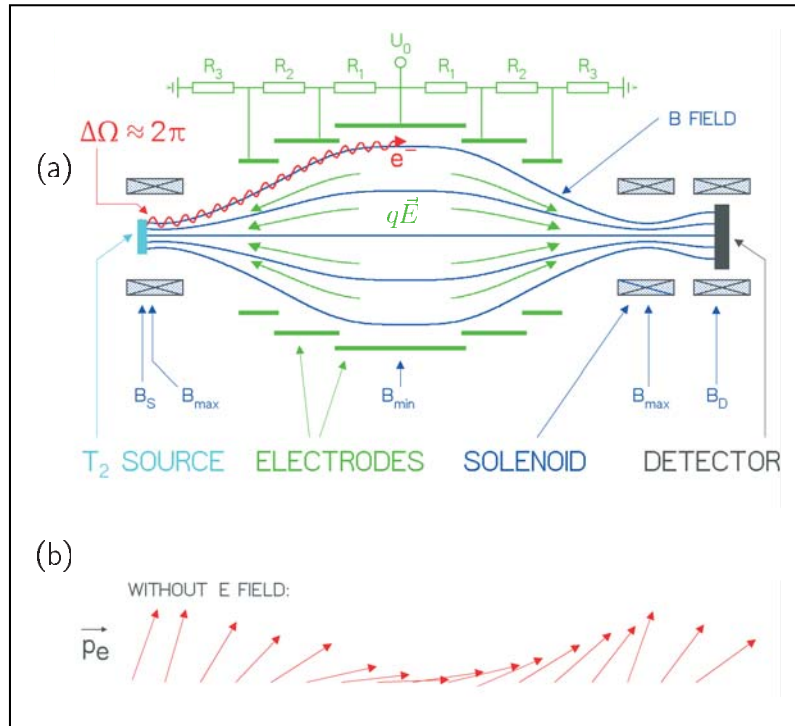
gutes Signal-zu-Rausch-Verhältnis erforderlich. Um auf die erwartungsgemäß sehr kleine Neutrinomasse sensitiv sein zu können, benötigt man außerdem eine exzellente Energieauflösung. Die bis heute beste Messung der Neutrinomasse aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall wurde am *Mainzer Neutrinomassensexperiment* [Kr03] durchgeführt und liefert eine Obergrenze von

$$m_{\nu_e} \leq 2.2 \text{ eV} \quad (95\%C.L.).$$

Alle zur Zeit bestehenden Tritium- $\beta$ -Experimente haben ihr Sensitivitätslimit erreicht. Das momentan in der Planungs- und Aufbauphase befindliche *Karlsruher Tritium Neutrino Experiment* **KATRIN** [LoI00] soll ausreichend empfindlich sein, um die Neutrinomasse im Sub-eV-Bereich messen zu können.

## 2.1 Das MAC-E-Filter

Die oben genannten Anforderungen werden durch eine spezielle Methode, der **M**agnetischen **A**diatischen **K**ollimation kombiniert mit einem **E**lektrostatischen **F**ilter (**MAC-E-Filter**), erfüllt.



**Abbildung 2.2: Prinzip des MAC-E-Filters.** (a) Die Zerfallselektronen werden adiabatisch von Quelle über Analysierebene zum Detektor geführt. Dabei werden alle Elektronen mit  $E < eU_0$  elektrisch reflektiert. (b) Impulstransformation aufgrund der Invarianz des magnetischen Bahnmoments im inhomogenen magnetischen Feld.

Die von der Tritiumquelle in Vorwärtsrichtung emittierten Elektronen laufen auf Zyklotronbahnen entlang eines von zwei supraleitenden Solenoiden erzeugten in-

homogenen magnetischen Führungsfeldes, resultierend in einem akzeptierten Raumwinkel von nahezu  $2\pi$  (vgl. Abbildung 2.2(a)). Dabei möchte man vermeiden, dass Elektronen, die innerhalb der Quelle einen weiten Weg zurückgelegt haben und somit mit hoher Wahrscheinlichkeit an Streuprozessen beteiligt waren, ins Spektrometer gelangen. Deshalb platziert man die Quelle innerhalb eines Magnetfeldes  $B_S$ , dessen Feldstärke unterhalb der maximalen Magnetfeldstärke  $B_{max}$  liegt. Durch diesen magnetischen Spiegel werden die akzeptierten Startwinkel auf Winkel kleiner als

$$\sin \theta_{max} = \sqrt{\frac{B_S}{B_{max}}} \quad (2.4)$$

beschränkt.

Bis zur Spektrometermitte fällt das Magnetfeld um mehrere Größenordnungen ab. Die magnetische Gradientenkraft (in nichtrelativistischer Näherung)

$$\vec{F}_\nabla = \vec{\nabla} (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad (2.5)$$

$$\text{mit } \mu = |\vec{\mu}| = \frac{e}{2m_e} |\vec{l}| = \frac{E_\perp}{B} \quad (2.6)$$

wandelt dabei den größten Teil der Zyklotronenergie in Longitudinalenergie um (siehe Abbildung 2.2(b)), wobei diese Transformation aufgrund der nur langsam mit dem Ort variierenden Magnetfelder adiabatisch vor sich geht. In nichtrelativistischer Näherung bleibt das magnetische Moment somit konstant [Jac82]:

$$\mu = \frac{E_\perp}{B} = \text{const.} \quad (2.7)$$

Man erhält einen breiten Elektronenstrahl, der in der Analysierebene des Spektrometers praktisch parallel zu den Magnetfeldlinien verläuft. Damit ist fast die gesamte kinetische Energie der Elektronen elektrostatisch analysierbar. Um die Energie der Elektronen zu bestimmen, wird über ein zusätzlich zum Magnetfeld installiertes System zylindrischer Elektroden ein elektrisches Gegenpotential  $U_0$  aufgebaut, gegen das die Elektronen anlaufen. Die Elektronen, die das Retardierungspotential überwinden können, werden auf den Detektor refokussiert und beschleunigt, wohingegen der Rest reflektiert wird.

Ein MAC-E-Filter bildet somit ein integrierendes Spektrometer, da es die Zählrate über die Elektronenergie integriert. Die relative Energieauflösung ist über das Verhältnis von minimalem zu maximalem Magnetfeld definiert:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{B_{min}}{B_{max}} \quad (2.8)$$

Eine Vermessung der Endpunktregion des Tritium- $\beta$ -Spektrums beruht also auf einer Variation der Retardierungsspannung und damit eines sukzessiven Durchfahrens des Messintervalls.



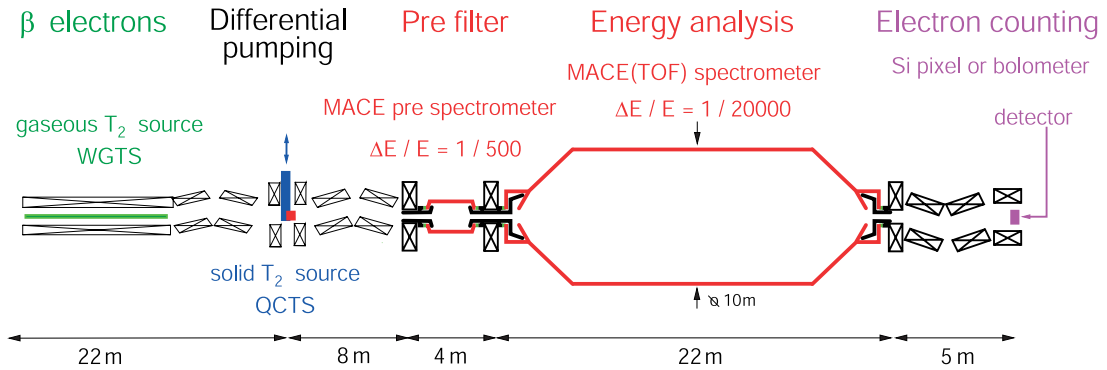


Abbildung 2.3: Schematische Anordnung der Komponenten des KATRIN Experiments.

## 2.2 Experimenteller Aufbau

Anhand von Abbildung 2.3 soll im Folgenden die Anordnung der einzelnen Komponenten des KATRIN Experimentes erklärt werden.

- Die Tritiumquelle:** KATRIN benötigt eine fensterlose, gasförmige und möglichst isotonenreine ( $> 95\%$ ) Tritiumquelle (**W**indowless **G**aseous **T**ritium **S**ource – **WGTS**) hoher Intensität. Die Quelle besteht im Wesentlichen aus einem mit molekularen Tritiumgas (Dichte  $\rho = 10^{15}$  Moleküle/cm<sup>3</sup>) gefüllten 10 m langen Rohr mit 90 mm Innenradius, welches in einem 3.6 T starken Magnetfeld angeordnet und auf 30 K abgekühlt ist. Die Tritiumquelle wird innerhalb eines geschlossenen Tritiumkreislaufes betrieben. Das an den Enden des Rohres austretende Gas wird abgepumpt, gereinigt und mit konstanter Isotonenreinheit wieder in das Quellrohr eingespeist. Optional kann KATRIN mit einer Festkörperquelle (QCTS) betrieben werden. Diese besteht aus einem dünnen Film molekularen Tritiums, welcher auf ein Graphitsubstrat aufgebracht wird.
- Das Transportsystem:** Etwa dreißig supraleitende Magnete sorgen dafür, dass die Elektronen von der Quelle adiabatisch ins Spektrometer geführt werden. Gleichzeitig wird jegliches im Transportsystem befindliche Tritium innerhalb einer differentiellen Pumpstrecke eliminiert, um dann erneut der Quelle zugeführt zu werden. Ein möglichst geringer Tritium-Fluss zum Hauptspektrometer ist von großer Bedeutung, da sonst der Untergrund erhöht würde.
- Das Vorspektrometer:** Das Vorspektrometer ist ein Spektrometer des bereits erwähnten MAC-E-Filter Typs und dient der Vorfilterung der  $\beta$ -Elektronen. Da für die Bestimmung der Neutrinomasse nur die letzten 50 eV des Spektrums von Relevanz sind, werden alle Elektronen im restlichen Teil des Spektrums hier elektrostatisch reflektiert. Das Vorspektrometer besteht aus einem 3.5 m langen Tank mit einem Durchmesser von 1.7 m und ähnelt damit in den Ausmaßen den Spektrometern bisheriger Tritium- $\beta$ -Experimente.

- **Das Hauptspektrometer:** Das Herzstück des KATRIN Experiments bildet das Hauptspektrometer, ebenfalls ein MAC-E-Filter. Mit einer Länge von 22 m und einem Durchmesser von 10 m wird man in der Lage sein, das Tritium- $\beta$ -Spektrum mit einer Energieauflösung von 1 eV zu vermessen. Dabei dient der Spektrometertank selbst als Elektrode, liegt also auf Hochspannung. Er wird auf  $-20^\circ\text{C}$  abgekühlt, um das Ausgasen von Wasserstoff aus den Spektrometerwänden zu vermeiden. Um den hauptsächlich durch Stöße mit Restgasionen verursachten Untergrund möglichst gering halten zu können, herrscht innerhalb des Hauptspektrometers ein extremes Ultrahochvakuum von  $p < 10^{-11}$  mbar.
- **Detektor:** Am Ende werden die Elektronen, die das Hauptspektrometer passiert haben, mit einer Anordnung aus Silizium-Driftdioden registriert. Der magnetische Fluss, das Produkt aus Magnetfeldstärke  $B$  und durch die Feldlinien eingeschlossenen Fläche  $A$ , ist konstant. Er bildet somit einen Schlauch verschiedener Dicke, der durch das gesamte System verläuft. Da die Detektoranordnung den gesamten Flussschlauch abdecken muss, ist ein Durchmesser von 10 cm erforderlich. Die Anforderungen an den Detektor sind eine hohe Effizienz für die Detektion von 18.6 keV Elektronen bei einer Energieauflösung von  $\Delta E = 600$  eV Halbwertsbreite.

## 2.3 Sensitivität

Messungen der Neutrinomasse sind mit bestehenden Zerfallsexperimenten nicht mehr möglich, da diese ihr Sensitivitätslimit bereits erreicht haben und die Neutrinomasse unterhalb dieser Grenze liegt. Das KATRIN Experiment verbessert mit einer angestrebten Sensitivität im Sub-eV-Bereich die Sensitivität gegenüber früheren Spektrometer-Experimenten um eine Größenordnung, d.h. zwei Größenordnungen bezogen auf die eigentliche Messgröße  $m_\nu^2$ . Die Sensitivität wird von der Signalstärke im Bereich des Endpunktes, von der Untergrundrate, der Größe des Messintervalls und systematischen Unsicherheiten beeinflusst. Mit einer Optimierung dieser Parameter kann eine Sensitivität von 0.2 eV mit gleichen Beiträgen von statistischen und systematischen Fehlern erreicht werden, d.h., für  $m_\nu = 0$  kann mit 90% Vertrauensniveau eine Obergrenze von  $m_\nu = 0.2$  eV angegeben werden, die gegenüber bisherigen Tritium- $\beta$ -Zerfallsexperimenten um eine Größenordnung verbessert ist und den kosmologisch relevanten Bereich abdeckt. Eine Neutrinomasse von  $m_\nu = 0.35$  eV kann mit  $5\sigma$ , von  $m_\nu = 0.30$  eV immerhin noch mit  $3\sigma$  gemessen werden. Hier bezeichnet  $\sigma$  den Fehler gewonnen aus dem Fit des theoretischen Energiespektrums (vgl. Gl. (2.1) und (2.2)) an die gemessene Verteilung.

## Kapitel 3

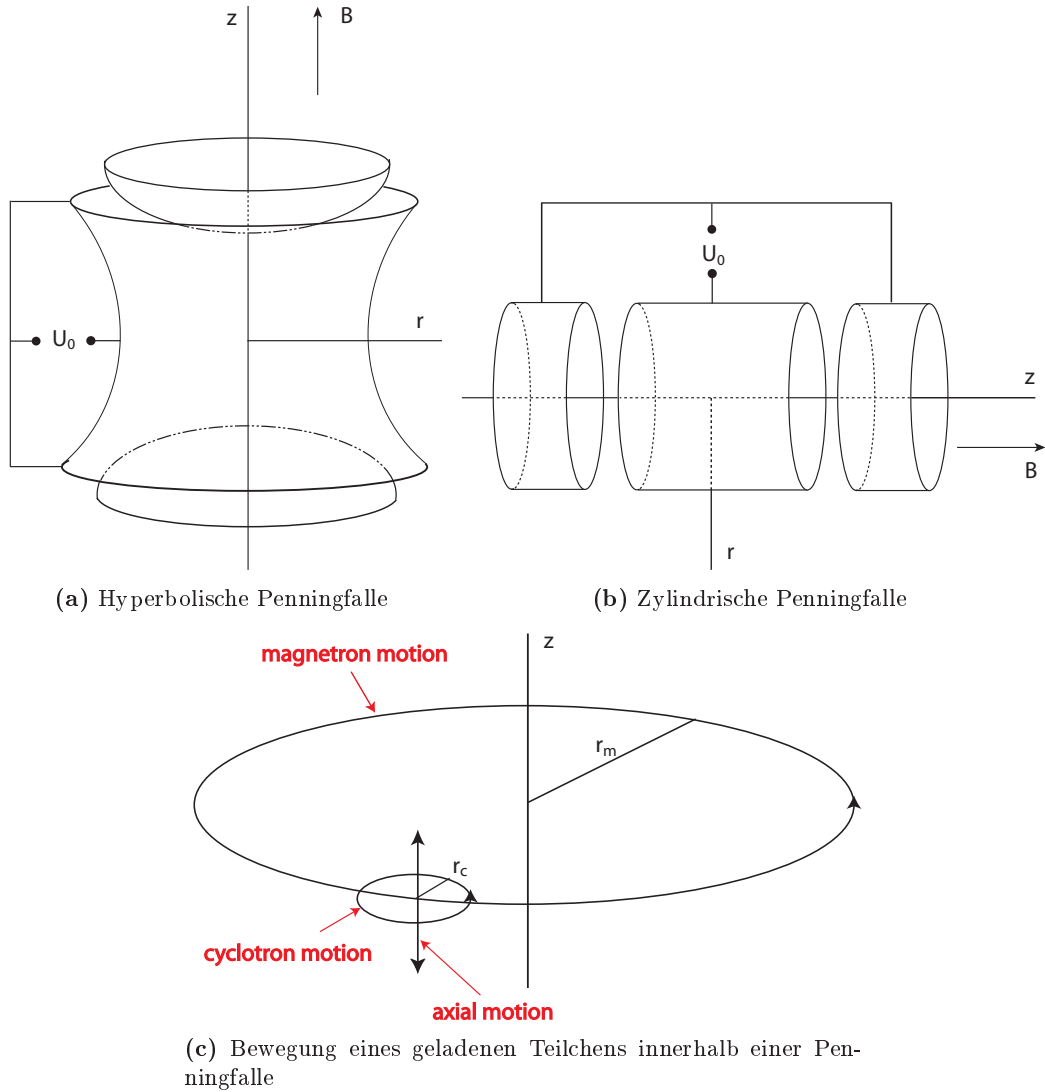
# Die Teilchenfalle im KATRIN Experiment

Beim KATRIN Experiment wird eine Kombination aus zwei MAC-E-Filtern benutzt, um die Elektronen aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall zu analysieren. Dabei dient das Vorspektrometer der Vorselektion der hochenergetischen Zerfallselektronen, während das Hauptspektrometer die eigentliche Energieanalyse der für die Neutrinomassenbestimmung interessanten  $\beta$ -Elektronen durchführt. Aufgrund der elektromagnetischen Feldkonfiguration in Vor- und Hauptspektrometer bilden beide MAC-E-Filter eine für Elektronen ideale Penningfalle.

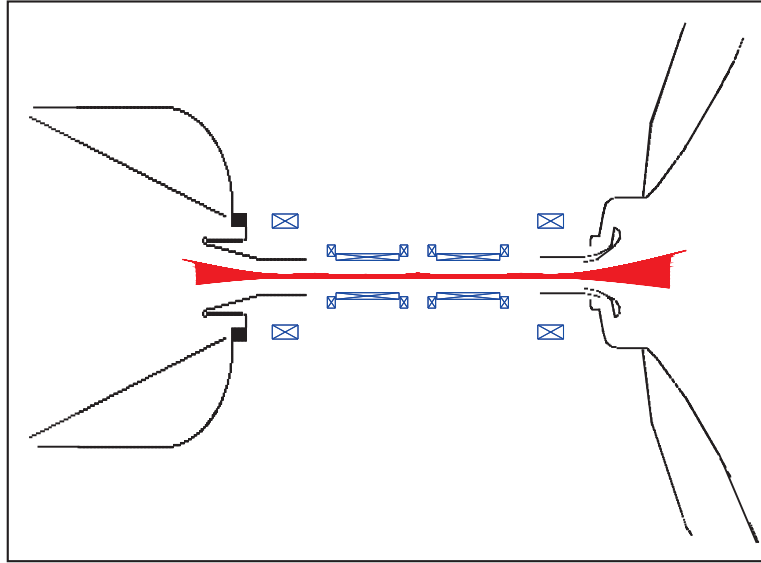
Eine Penningfalle ist eine Überlagerung aus einem elektrischen Quadrupolfeld und einem homogenen Magnetfeld. Penningfallen können mittels verschiedener Elektrodenkonfigurationen erzeugt werden. Abbildung 3.1 zeigt zwei typische mechanische Realisierungen einer Penningfalle. Die Bewegung eines in einer solchen Falle gespeicherten Teilchens ist eine Überlagerung dreier entkoppelter Bewegungen. In axialer Richtung führt das Teilchen eine einfache harmonische Schwingung aus. Die radiale Bewegung lässt sich nochmals in zwei Komponenten unterteilen, die Magnetron- und die Zyklotronbewegung (siehe Abb. 3.1(c)).

### 3.1 Die Penningfalle zwischen Vor- und Hauptspektrometer

Die aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall stammenden Elektronen decken einen Energiebereich bis 18.6 keV ab. Für die Bestimmung der Neutrinomasse benötigt man jedoch nur einen kleinen Teil des Energiespektrums, der Großteil der Zerfallselektronen muss gar nicht erst zum Detektor gelangen. Um zu verhindern, dass diese dennoch ins Spektrometer eindringen und durch Stoßprozesse mit Restgasmolekülen und den Spektrometerwänden Untergrund erzeugen, wird im Vorspektrometer ein Retardierungspotential von  $U_{pre} \approx 18.5$  kV ( $pre = prespektrometer$ ; siehe Abb. 2.3) angelegt, welches nur die „hochenergetischen“ Elektronen passieren können. Nach einer weiteren Transportstrecke gelangen die Elektronen letztendlich ins Hauptspektrometer,



**Abbildung 3.1: Skizze zweier typischer Realisierungen einer Penningfalle.** Bei einer hyperbolischen Penningfalle (a) entsprechen die Elektroden den Äquipotentialflächen eines statischen elektrischen Quadrupolfeldes. Werden die Segmente einer zylindrischen Penningfalle (b) richtig dimensioniert, so nähert sich das elektrische Feld nahe der Achse dem einer hyperbolischen Penningfalle. Die Bewegung eines geladenen Teilchens innerhalb einer Penningfalle lässt sich in eine harmonische Schwingung in axialer Richtung und die Magnetron- und die Zyklotronbewegung in radialer Richtung zerlegen (c).



**Abbildung 3.2: Skizze eines zwischen den Spektrometern gespeicherten Teilchens.** Das gespeicherte Elektron (rot) oszilliert zwischen Vor- und Hauptspektrometer (schwarz). In blau sind die Transportmagnete eingezeichnet.

wo ihre Energie bestimmt wird, indem sie das dort herrschende elektrische Gegenfeld überwinden oder aber reflektiert werden. Das System aus zwei solchen MAC-E-Filtern bildet für Elektronen eine zylindrische Penningfalle mit den begrenzenden negativen Potentialwällen jeweils in der Analysierebene der Spektrometer und dem Potentialminimum im Transportsystem. Im Gegensatz zu einer herkömmlichen zylindrischen Penningfalle ist das Magnetfeld hier nicht über den gesamten Bereich homogen.

Elektronen, welche zwar das Vorspektrometer passiert haben, müssen nicht zwangsläufig genügend Energie besitzen, um auch den Potentialwall im Hauptspektrometer überwinden zu können. Ist ihre kinetische Energie  $E_{kin}$  kleiner als das im Hauptspektrometer angelegte Gegenfeld  $eU_{ret}$ , so werden die Elektronen im Hauptspektrometer elektrisch reflektiert. Nach der Reflexion bewegen sie sich dann in Richtung Vorspektrometer. Wenn die Elektronen z.B. aufgrund von Synchrotronstrahlungsverlusten oder Energieverlusten aus Stoßprozessen nicht genügend kinetische Energie besitzen, um den Potentialwall im Vorspektrometer zu passieren, werden sie dort wiederum elektrisch reflektiert und oszillieren fortan zwischen den beiden Spektrometern. Abbildung 3.2 zeigt beispielhaft ein solches zwischen den Spektrometern gespeichertes Elektron. Da die Teilchenbahn im Vergleich zu den Dimensionen der Spektrometer sehr klein ist, wurde hier auf eine maßstäbliche Darstellung verzichtet. Die Speicherung negativ geladener Teilchen ist eine Eigenart der so angeordneten Spektrometer. Die Speicherbedingung kann nur durch aktives Eingreifen aufgebrochen werden. Eine mögliche Methode, die Elektronen aus der Falle zu entfernen, wird im Laufe dieser Arbeit noch diskutiert werden.

Die gespeicherten Elektronen oszillieren zwischen den Spektrometern hin und her. Durch Stöße mit Restgasmolekülen können sie Ionen erzeugen, die aufgrund ihrer positiven Ladung vom negativen Potential im Hauptspektrometer angezogen wer-

den. Kollidieren diese im Hauptspektrometer jenseits des Analysierpotentials ihrerseits mit Restgasmolekülen, entstehen Sekundärelektronen, die auf den Detektor beschleunigt werden und dort somit zum Untergrund beitragen können.

Die minimale Anregungsenergie molekularen Wasserstoffs ( $\text{H}_2$ ) beträgt ca. 10 eV. Wenn also Kühlprozesse existieren, die schnell genug dafür sorgen, dass die kinetische Energie der gespeicherten Elektronen unterhalb von 10 eV sinkt, werden die für den Untergrund signifikanten Beiträge durch Stoßionisation nicht auftreten.

Ein solcher Kühlprozess ist die Synchrotronstrahlung, die von beschleunigten Ladungen abgestrahlt wird. Sie wird in Kapitel 5 näher erläutert. Ein weiterer Kühlmechanismus sind Stöße, die neben einem Energieverlust über den Streuwinkel auch zu einer Richtungsänderung der gestreuten Elektronen führen. Die Energie in dieser Richtungsänderung kann ebenfalls über Synchrotronstrahlung abgestrahlt werden. Ein Hinweis darauf, dass die Penningfalle zwischen den Spektrometern zu Problemen während des laufenden Betriebs werden könnte, liefert das Neutrinomassen-Experiment in Troitsk [Lo99]. Das dortige Spektrometer bildet mit dem Vorspektrometer ebenfalls eine Penningfalle. Die drastisch erhöhte Untergrundrate ab einer angelegten Spannung von  $U = -2 \text{ kV}$ , könnte auf in dieser Falle gespeicherte Elektronen zurückzuführen sein. Detaillierte Untersuchungen hierzu wurden jedoch nicht durchgeführt. Um Aussagen über Speicherzeiten und eventuelle Stoßprozesse und somit über den zu erwartenden Untergrund machen zu können, müssen zwischen den Spektrometern gespeicherte Teilchen simuliert werden. Die dazu verwendeten Simulationsprogramme werden im folgenden Kapitel beschrieben.

## Kapitel 4

# Simulationsprogramme

### 4.1 SIMION 3D Version 7.0

Mit **SIMION 3D Version 7.0** aus dem *Idaho National Engineering and Environmental Laboratory* lassen sich Trajektorien geladener Teilchen in elektro- und magnetostatischen Feldkonfigurationen relativistisch korrekt simulieren. Die elektrischen und magnetischen Felder werden mittels Potentialfeldkarten innerhalb von **SIMION** erstellt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde **SIMION** benutzt, um Elektronen in und zwischen den beiden Spektrometern des KATRIN Experiments (vgl. Kapitel 2) zu simulieren und die elektrischen Potentialkarten für andere Simulationsprogramme zu erstellen. Desweiteren wurde über die von **SIMION** angebotene Programmierschnittstelle ein Benutzerprogramm („user program“) hinzugefügt, welches den Energieverlust der Elektronen durch Synchrotronabstrahlung berücksichtigt.

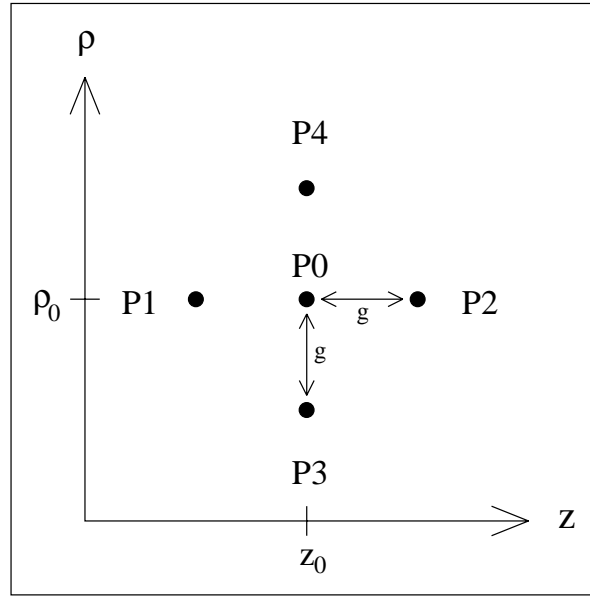
Dieses Kapitel kann nur eine kurze Einführung in Funktionsweise und ausgewählte Anwendungsmöglichkeiten von **SIMION 3D** sein. Für weitere Informationen sei auf [Sim00] verwiesen.

#### 4.1.1 Erstellen der elektrischen Potentialkarten

Elektrische Potentialkarten in **SIMION 3D** erhält man, indem man Elektrodengeometrien entweder über einen graphischen Editor oder eine Serie von Befehlen in speziellen ASCII-Dateien definiert, so dass sich jeder Elektrode deren Potentialwert zuordnen lässt.

Allgemein erhält man eine elektrische Feldkarte, indem man die Laplace-Gleichung als Grenzwertproblem löst. Die Randbedingungen werden durch die Elektroden festgelegt. Die folgende Relaxationsmethode löst die Laplace-Gleichung numerisch:

Angenommen, dass zu Beginn jedem Punkt ein beliebiger Potentialwert zugewiesen worden ist. Dann bewegt man sich Punkt für Punkt durch das definierte Gitter. An jedem Gitterpunkt  $P_0$  wird das Potential angepasst, indem im zweidimensionalen Fall über die 4 nächsten, im dreidimensionalen Fall über die 6 nächsten Nachbarpunkte (Die Punkte im Raum vor und hinter  $P_0$  werden zusätzlich zur Berechnung



**Abbildung 4.1: Zweidimensionales Schema zum Relaxationsmechanismus in SIMION.** Ausgehend von den Punkten P1 bis P4 berechnet sich das Potential am Punkt P0. Die Abbruchbedingung für die Iteration ist erreicht, wenn die Potentialdifferenz zwischen P0 und den Nachbarpunkten einen vom Benutzer festzulegenden Grenzwert unterschreitet.

hinzugefügt, vgl. Abb. 4.1.) mittels der Methode der Relaxation der Potentialwert gemäß folgender Formeln berechnet wird:

$$2D : P_0 = \frac{1}{4}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \quad (4.1)$$

$$3D : P_0 = \frac{1}{6}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6) \quad (4.2)$$

Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis das vom Benutzer festzulegende Konvergenzkriterium erreicht ist.

Die Lösungen der Laplace-Gleichung sind additiv, so dass im Falle mehrerer Elektroden die Potentiale bezüglich jeder Elektrode separat berechnet werden, wobei alle übrigen Elektrodenpunkte auf Nullpotential gelegt sind. Die gesamte Feldkarte ergibt sich als Superposition der Einzelfeldkarten.

#### 4.1.2 Erstellen der magnetischen Potentialkarten

Randwertprobleme in der Magnetostatik sind im Allgemeinen sehr viel komplizierter als in der Elektrostatik. Ausgehend von den Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (4.4)$$



kann  $\vec{B}$  immer durch ein Vektorpotential  $\vec{A}$  über  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  definiert werden. Im Falle verschwindender Stromdichte  $\vec{J} = 0$  reduziert sich Gleichung (4.4) auf  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ . Wie in der Elektrostatik lässt sich dann ein skalares magnetisches Potential  $\Phi_m$  einführen mit  $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi_m$ .

**SIMION** kann zwar skalare magnetische Potentialkarten verarbeiten, aber nicht direkt aus Spulengeometrien erzeugen. Um diese zu erstellen, bieten sich zwei Möglichkeiten an. Zum einen kann man künstlich „magnetische Monopole“ einführen. Ein reales durch Spulen erzeugtes Magnetfeld kann man aus der Summe dreidimensionaler gaussförmiger Ladungsverteilungen von entlang der Spulen positionierten Spiegelladungen generieren. Das reale Magnetfeld lässt sich dann aus einer Multipolentwicklung des so approximierten Magnetfeldes bestimmen [Deg99]. Dieser Weg ist für die Geometrie der bei KATRIN verwendeten Solenoiden sehr aufwendig. Die zweite Möglichkeit besteht darin, das skalare Potential direkt dem von B. Flatt entwickelten Programm **Bfield\_3D** [Fla01] zu entnehmen, welches das superponierte Magnetfeld oder das dazugehörige magnetische Potential gegeneinander gekippter Spulen, wie sie bei KATRIN zum Einsatz kommen (siehe Abb. 2.3), innerhalb eines gewissen Konvergenzbereiches berechnen kann. Das für **SIMION** benötigte magnetische Potential wird ermittelt, indem jede einzelne Spule durch eine Anzahl dünner, langer Spulen angenähert wird. Das Potential einer solchen dünnen, langen Spule kann durch eine Reihenentwicklung bestimmt werden.

### 4.1.3 Bahnverfolgung

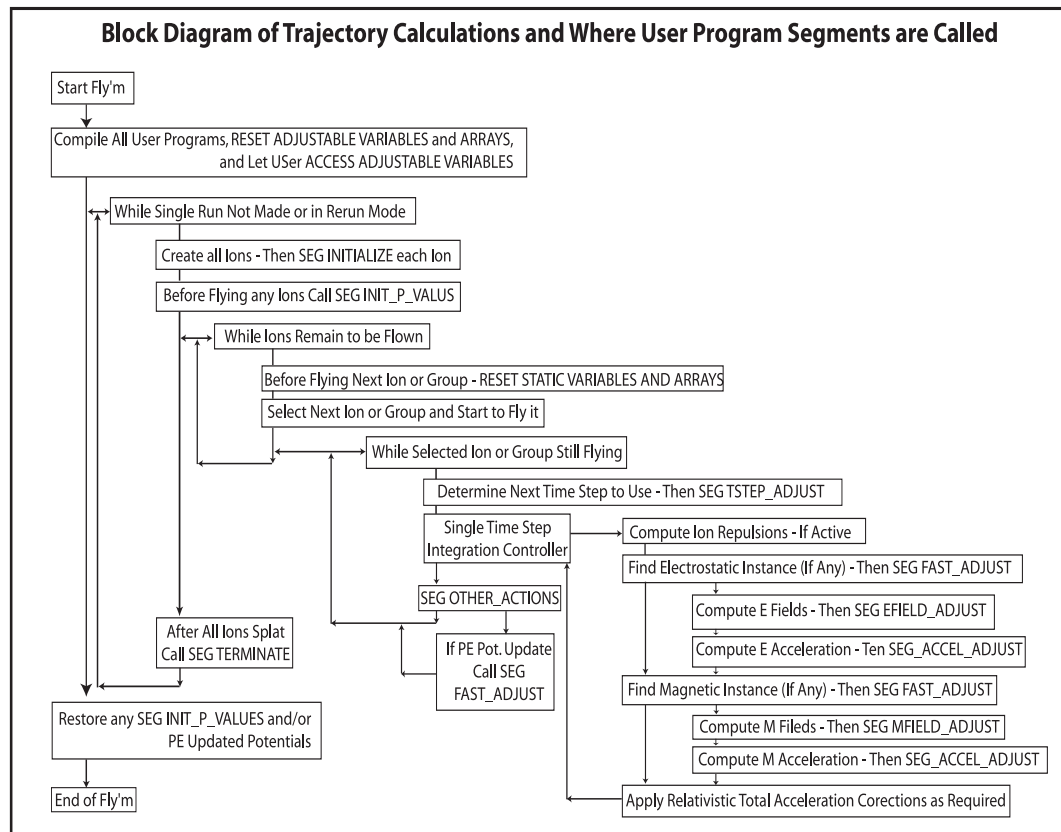
Der von **SIMION** verwendete Bahnverfolgungsalgorithmus unterteilt sich in drei zusammenhängende Schritte. Zunächst werden die elektrostatischen und magnetischen Kräfte basierend auf der momentanen Position und Geschwindigkeit des Teilchens getrennt voneinander berechnet. Daraus folgt dann die Bestimmung der momentan auf das Teilchen wirkenden Beschleunigung und der Position und Geschwindigkeit für den nächsten Zeitschritt. Zur numerischen Integration der Teilchenbahn in drei Dimensionen wird die Runge–Kutta–Methode in 4. Ordnung verwendet [NumRec]. Für eine größtmögliche Genauigkeit der Teilchenbahn bei minimaler Anzahl der benötigten Integrationsschritte wird der Zeitschritt selbst mittels dynamischer Schrittweitensteuerung kontinuierlich angepasst. Die Genauigkeit der Simulation kann vom Benutzer über den sogenannten „computational quality factor (QF)“ eingestellt werden [Sim00]. Dieser ist zunächst mit einem Wert von 3 vorgegeben. Allerdings bietet erst ein  $QF > 100$  vollen Zugriff auf alle Kontrollmechanismen, wie z.B. Einstellung der relativen Schrittweite, schrittweise Annäherung an einen Grenzwert und korrekte Erkennung der Feldkrümmung.

### 4.1.4 SIMION User Programming

Wann immer **SIMION** elektrische oder magnetische Potentialkarten lädt, sucht es nach bestimmten zu den Feldkarten gehörenden Dateien, sogenannten „user programs“. Diese ähneln Subroutinen, da sie miteinander kommunizieren und Daten austauschen. Sobald ein Teilchen durch eine mit einem solchen Benutzerprogramm

assoziierten Feldkarte fliegt, wird dieses automatisch kompiliert und ausgeführt und ändert die bisherigen Eigenschaften von **SIMION**. „User programs“ bieten dem Benutzer somit die Möglichkeit, **SIMION** an die jeweilige zu simulierende Fragestellung anzupassen.

Ein „user program“ ist eine ASCII-Datei, die ein oder mehrere Programmsegmente enthält. Genauer gesagt besteht eine solche Datei aus einem optionalen Segment zur Variablendefinition und bis zu neun weiteren Segmenten. Jedes Segment darf nur ganz bestimmte Funktionen ausführen und hat deshalb spezielle Zugriffs- und Kontrollmöglichkeiten. Anhand eines einfachen Flussdiagramms der Teilchenbahnberechnung (Abb. 4.2) wird deutlich, wo Benutzerprogramme aufgerufen und kompiliert, Variablen verändert und neu gesetzt und die einzelnen Programmsegmente der Benutzerprogramme aufgerufen werden.



**Abbildung 4.2: Flussdiagramm zur Berechnung der Teilchenbahn in SIMION [Sim00].** Das Diagramm zeigt, wann Variablen und Arrays zurückgesetzt und wo die verschiedenen Programmsegmente der Benutzerprogramme aufgerufen werden. Die einzelnen Programmsegmente sind im Text aufgelistet und beschrieben.

- **Define\_Data** enthält die Definitionen globaler und lokaler Variablen.
- **Initialize** wird benutzt, um die Startparameter und -bedingungen eines Teilchens dynamisch zu verändern.

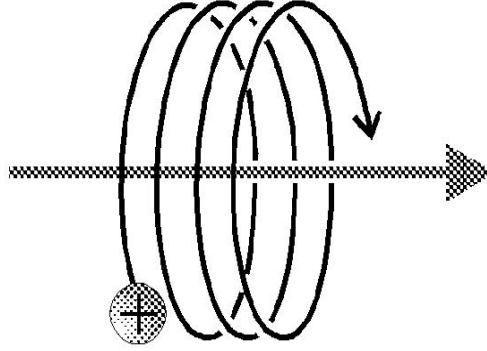
- **Init\_P\_Values** initialisiert die gesamten Potentialkarten, bevor irgendein Teilchen simuliert wird.
- Mit **Tstep\_Adjust** ist es möglich, den für die Integration benötigten Zeitschritt zu kontrollieren und gegebenenfalls zu ändern.
- Mit **Fast\_Adjust** lassen sich Elektrodenpotentiale während des Fluges eines Teilchens kontrollieren und anpassen.
- **Efield\_Adjust** kontrolliert/ändert die elektrostatischen Potentiale und Feldgradienten für jeden Zeitschritt.
- **Mfield\_Adjust** kontrolliert/ändert die Magnetfelder für jeden Zeitschritt.
- **Accel\_Adjust** kontrolliert/ändert die Beschleunigungskomponenten für jeden Zeitschritt.
- Das Segment **Other\_Actions** wird nach jedem Integrationsschritt aufgerufen, um Teilchenparameter wie Masse, Geschwindigkeit usw. zu kontrollieren/ändern. Außerdem kann hier die Ausgabe von Nachrichten und Ergebnissen auf den Bildschirm bzw. in eine Datei erfolgen.
- **Terminate** wird aufgerufen, nachdem alle Teilchen ihren Flug beendet haben, um die endgültigen Teilchenparameter zu kontrollieren.

## 4.2 ADIPARK

Das Programm **ADI**abatic **PART**icle trac**K**ing wurde von Thomas Thümmeler im Rahmen seiner Diplomarbeit entwickelt [Thü02]. Es dient ebenfalls zur Berechnung von Teilchenbahnen, beruht jedoch auf dem Prinzip der adiabatischen Näherung 1. Ordnung [Nor63]. Das bedeutet, dass bei der Bahnverfolgung nur die Bewegung des Führungszentrums (siehe unten) interessiert, während die Zyklotronbewegung vernachlässigt wird, um Berechnungsaufwand und numerische Fehler zu minimieren. Synchrotronstrahlung und Streuprozesse wurden im Rahmen dieser Arbeit nachträglich als optionale Funktion hinzugefügt (siehe Kapitel 5 und 6).

### 4.2.1 Driftterme

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld kann nur in den seltensten Fällen analytisch gelöst werden. Meistens muss man auf Näherungslösungen zurückgreifen. Für schwach inhomogene Felder ist die Teilchenbahn für einen Umlauf nahezu kreisförmig. Der Mittelpunkt der momentanen Kreisbahn wird Führungszentrum genannt und verschiebt sich von Umlauf zu Umlauf, so dass die Gesamtbewegung aus der Überlagerung einer Kreisbewegung mit einer Drift des Führungszentrums besteht (siehe Abbildung 4.3). Somit kann der Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{R} + \vec{\varrho}$  in den Ortsvektor  $\vec{R}$  des Führungszentrums und den Zyklotronvektor  $\vec{\varrho}$  zerlegt werden. Die Bewegung des Führungszentrums setzt sich zusammen



**Abbildung 4.3: Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld.** Die Teilchenbewegung wird in die Bewegung des Führungszentrums und die dazu senkrechte Kreisbewegung zerlegt.

aus mehreren Drifttermen, von denen hier die drei wichtigsten kurz erwähnt werden sollen:

$$\vec{E} \times \vec{B} - \text{Drift} : \vec{v}_E = \frac{c}{B^2} \vec{E} \times \vec{B} \quad (4.5)$$

$$\text{Gradientendrift} : \vec{v}_G = -\frac{cE_{\perp}}{eB^3} \vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} \vec{B} = -\frac{cE_{\perp}}{eB^2} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2} \quad (4.6)$$

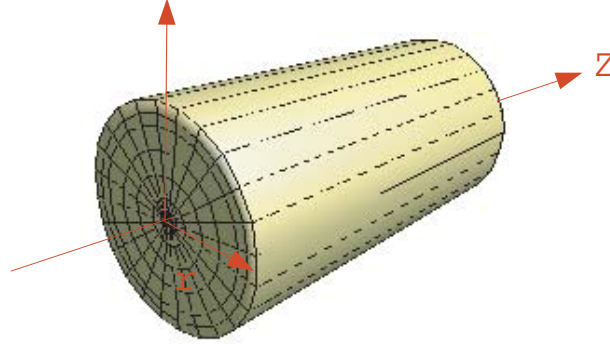
$$\text{Krümmungsdrift} : \vec{v}_C = -\frac{2cE_{\parallel}}{eB^3} \vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} \vec{B} = -\frac{2cE_{\parallel}}{eB^2} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R^2} \quad (4.7)$$

$E_{\perp}$  und  $E_{\parallel}$  sind konventionsgemäß die kinetischen Energien in der zum Magnetfeld senkrechten bzw. parallelen Bewegungskomponente. Die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift tritt immer dann auf, wenn sich elektrische und magnetische Feldlinien kreuzen. Die Gradientendrift resultiert aus einem Magnetfeldgradienten und die Krümmungsdrift aus gekrümmten Magnetfeldlinien.

Aus Gleichung (4.7) folgt, dass die Krümmungsdrift Parallelenergie in die zum Magnetfeld senkrechte Bewegungskomponente transformiert. Dieser Effekt bewirkt letztlich auch eine Kühlung von gespeicherten Teilchen, da Energie aus der parallelen in die transversale Bewegungskomponente umgewandelt wird und dann über Synchrotronstrahlung (siehe Kapitel 5) verloren geht. Allerdings ist der Beitrag der Krümmungsdrift zum Kühlungsprozess vernachlässigbar gering. Da noch keine Untersuchungen bezüglich der korrekten Implementation der Krümmungsdrift in **ADIPARK** durchgeführt worden sind, wurde ein neues Programm entwickelt, welches die komplette dreidimensionale Teilchenbewegung in einem toroidalen Magnetfeld berechnen kann.

### 4.3 Lorentz3D

Um die Krümmungsdrift in **ADIPARK** testen zu können, wählt man idealerweise ein Magnetfeld, welches eine besonders große Krümmungsdrift bewirkt. Hierfür eignet sich z.B. ein toroidales Magnetfeld (siehe Abb. 4.4 und Gl. (4.8)), da hier



**Abbildung 4.4: Toroidales Magnetfeld.** Die Magnetfeldlinien verlaufen in konzentrischen Kreisen um die Symmetrieachse  $z$ . Ein Teilchen bewegt sich aufgrund der Krümmungsdift auf einer Spiralbahn in  $z$ -Richtung.

die Magnetfeldlinien ständig gekrümmt sind:

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} B(r) (\hat{r} \times \hat{z}) \quad (4.8)$$

$$B(r) = \frac{r_0}{r} B_0 \quad (4.9)$$

$$\Rightarrow B(0) \rightarrow \infty, B(r_0) = B_0,$$

mit  $B_0$  einem Referenzmagnetfeld im Abstand  $r_0$ .

**SIMION** setzt für die Erstellung der magnetischen Feldkarten eine verschwindende Stromdichte an, um mit skalaren magnetischen Potentialen arbeiten zu können (siehe 4.1.1). Dieser Spezialfall ist jedoch für ein toroidales Magnetfeld nicht erfüllt. Deshalb musste ein neues Programm entwickelt werden, welches wie **SIMION** die volle dreidimensionale Teilchenbewegung berechnet und gleichzeitig analytisch implementierte Magnetfelder verarbeiten kann. Da die Teilchenbewegung auf der Lorentzkraft beruht, hat das Programm den Namen **Lorentz3D** erhalten. Die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{q}{m} \left[ \vec{E} + \left( \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right) \right] \quad (4.10)$$

besteht aus drei Differentialgleichungen (DGLn) 2. Ordnung. Ziel ist es nun, diese Differentialgleichungen zu integrieren und somit Ort und Geschwindigkeit des Teilchens zu jedem Zeitpunkt zu ermitteln. Dazu reduziert man alle DGLn 2. Ordnung auf zwei DGLn 1. Ordnung gemäß

$$r(u) = \frac{d^2 v}{du^2} + q(u) \frac{dv}{du} \quad (4.11)$$

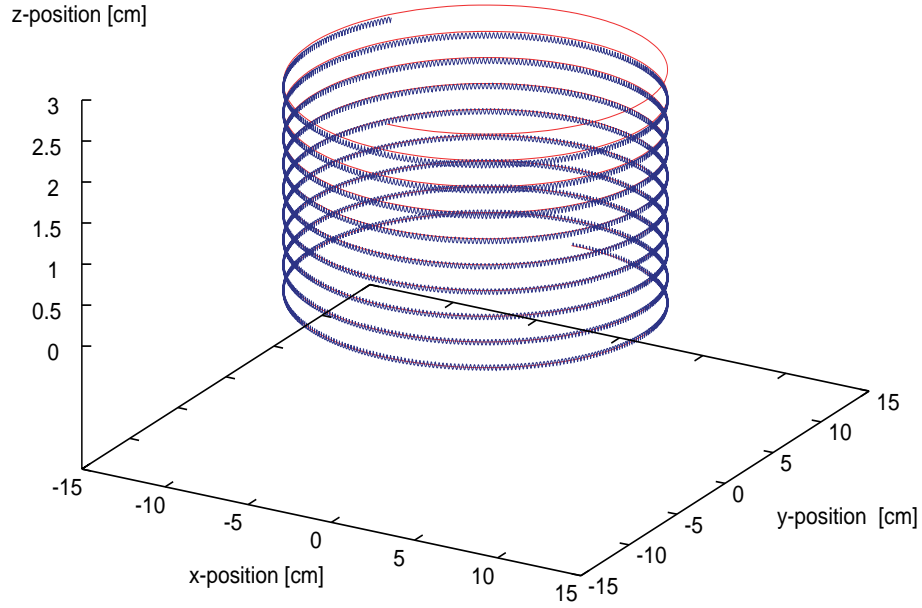
$$\text{mit } \frac{dv}{du} = w(u) \Rightarrow \frac{dw}{du} = r(u) - q(u)z(u). \quad (4.12)$$

Allgemein heißt das:

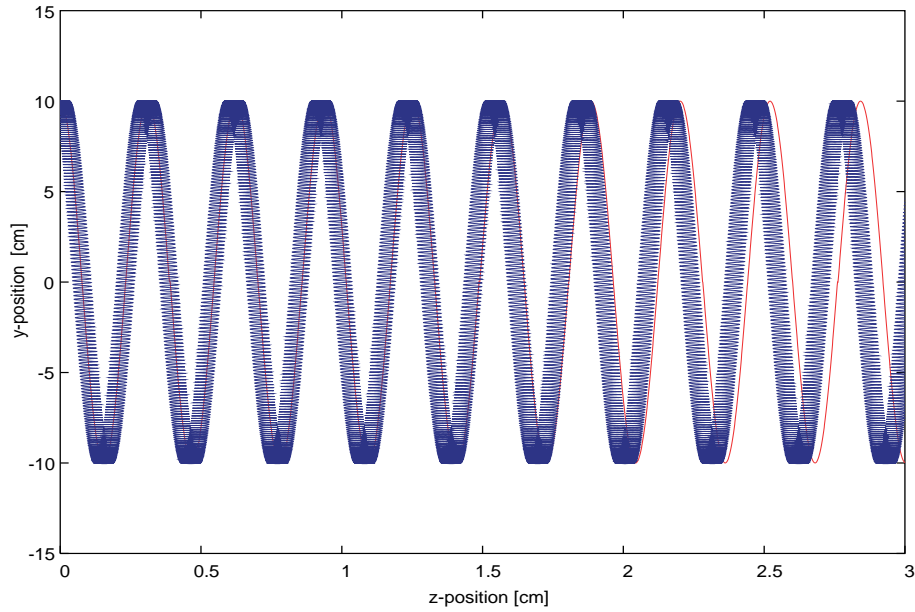
$$\frac{dv_i}{du} = f_i(u, v_1, v_2, \dots, v_N) \quad , i = 1, \dots, N, \quad (4.13)$$

wobei die  $f_i$  bekannt sind. Die Idee ist nun, von den infinitesimalen Schritten  $dv$  und  $du$  auf endliche Schritte  $\Delta v$  und  $\Delta u$  überzugehen und die Änderung der Funktionen während eines Schrittes der Weite  $\Delta u$  zu untersuchen. Die hierfür verwendete Methode ist die Runge–Kutta–Methode in 4. Ordnung [NumRec].

Aufgrund der Krümmungsdrift bewegt sich ein das Führungszentrum in einem toroidalen Magnetfeld auf einer Spiralbahn entlang der Symmetrieachse  $z$ . Die mit **Lorentz3D** simulierten Teilchenbahnen wurden mit den von **ADIPARK** berechneten Bahnen verglichen (Abb. 4.5). Simuliert wurde die Bahn eines Elektrons, gestartet bei  $P = (0\text{cm}, 10\text{cm}, 0\text{cm})$  mit einer für KATRIN typischen Energie  $E_S = 18\text{keV}$  unter den Winkeln  $\theta_S = 45^\circ$  (Einschusswinkel gegen die  $x$ -Achse) und  $\varphi_S = 0^\circ$  (Azimut in  $y$ - $z$ -Ebene gegen die  $y$ -Achse). Wie erwartet ergibt sich für das Führungszentrum eine Spiralbewegung in  $z$ -Richtung (siehe Abb.4.5 (a)). Man erkennt, dass **ADIPARK** (in rot) ausschließlich die Bewegung des Führungszentrums berechnet, wohingegen bei **Lorentz3d** (in blau) die Zyklotronbewegung klar zu erkennen ist. Die Bewegung des Führungszentrums verläuft in guter Übereinstimmung. Betrachtet man die Projektion der Elektronbahn auf die  $y$ - $z$ -Ebene (siehe Abb.4.5 (b)), so stellt man fest, dass diese mit der Zeit nicht mehr gewährleistet ist, sondern die Teilchenbahnen etwas auseinander laufen. Das bedeutet, dass die Berechnung von Driftstrecken mit **ADIPARK** und **Lorentz3D** nicht exakt zum gleichen Ergebnis führt. Möglicherweise ist die Beschränkung von **ADIPARK** auf Driftterme 1. Ordnung dafür verantwortlich. Für die Bestimmung der Speicherzeiten spielt dieser Effekt jedoch keine Rolle, da wie in Abschnitt 4.2 bereits dargelegt wurde, die Krümmungsdrift nur einen vernachlässigbaren Beitrag zum Kühlprozess liefert.



(a) Dreidimensionale Teilchenbahn

(b) Projektion der Teilchenbahn in die  $y$ - $z$ -Ebene

**Abbildung 4.5: Vergleich der Krümmungsdrift in ADIPARK (rot) und Lorentz3D (blau).** Simuliert wurde ein Elektron bei  $P=(0\text{cm}, 10\text{cm}, 0\text{cm})$  mit  $E_S=18\text{keV}$ ,  $\theta_S = 45^\circ$  und  $\varphi_S = 0^\circ$ . Sowohl die Beschränkung auf die Bewegung des Führungszentrums in **ADIPARK** (rot) als auch die Berechnung der dreidimensionalen Teilchenbahn in **SIMION** (blau) sind gut zu erkennen (a). Trotz anfänglich guter Übereinstimmung laufen beide Bahnen mit der Zeit auseinander (b).





## Kapitel 5

# Synchrotronstrahlung

Beim KATRIN Experiment werden die Elektronen aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall magnetisch geführt. Da sie sich dabei auf Zyklotronbahnen entlang der Magnetfeldlinien bewegen (vgl. Abb. 2.2 in Abschnitt 2.1), verlieren sie kontinuierlich Energie aufgrund von Synchrotronstrahlung. Diese Energie wird aus der zur Bewegung des Führungszentrums (siehe Abschnitt 4.2) senkrechten Komponente emittiert, und zwar umso mehr, je stärker das durchflogene Magnetfeld ist. Aufgrund der Magnetronbewegung laufen die Elektronen auf einer gekrümmten Bahn um die Symmetrieachse um. Analog zur Zyklotronbewegung wird aus dieser Bewegung ebenfalls Synchrotronstrahlung emittiert. Die Frequenz der Magnetronbewegung ist allerdings so klein gegenüber der Zyklotronbewegung, dass diese Abstrahlung hier vernachlässigt werden kann.<sup>1</sup>

Die durch Synchrotronstrahlung abgestrahlte Leistung kann für eine Kreisbewegung (in sehr guter Näherung) folgendermaßen beschrieben werden:

$$P_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |\vec{p}_{\perp}|^2 \quad [\text{Jac82}], \quad (5.1)$$

wobei die Kreisfrequenz  $\omega$  gleich der Zyklotronfrequenz  $\omega_c = \frac{eB}{\gamma m}$  ist. Somit ergibt sich:

$$P_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2}{m^4 c^3} |\vec{p}_{\perp}|^2 =: \frac{1}{m} C B^2 |\vec{p}_{\perp}|^2 = \gamma^2 C B^2 m |\vec{v}_{\perp}|^2. \quad (5.2)$$

Die abgestrahlte Leistung  $P_{\perp}$  entspricht einer zeitlichen Änderung der kinetischen Energie  $E_{kin\perp}$  des betrachteten Teilchens:

$$P_{\perp} = \dot{E}_{kin\perp}. \quad (5.3)$$

Als Dämpfungskonstante definiert man

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{kin\perp}}{E_{kin\perp}}. \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup>Gleichzeitig werden die Elektronen durch das elektrische Feld in longitudinaler Richtung beschleunigt. Das führt zur Abstrahlung von Energie aus dieser longitudinalen Bewegungskomponente des Führungszentrums.

Im nichtrelativistischen Fall ( $\gamma \approx 1$ ) beträgt die durch die Synchrotronstrahlung verursachte Dämpfung für Elektronen

$$\Gamma = \frac{4}{3} \frac{e^4 B^2}{m^3 c^3} \approx 0.4 \frac{B^2}{T^2} \frac{1}{s}. \quad (5.5)$$

Für die Synchrotronabstrahlung bezüglich der longitudinalen Bewegungskomponente ergibt sich eine abgestrahlte Leistung  $P_{\parallel}$  gemäß

$$P_{\parallel} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dp_{\parallel}}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dE_{\parallel}}{dx} \right)^2 \quad [\text{Jac82}], \quad (5.6)$$

da  $\frac{dp}{dt} = \frac{dE}{dx}$ . Bei KATRIN beträgt der maximale Energiegewinn

$$\frac{dE}{dx} = 0.1 \frac{\text{MeV}}{\text{m}}.$$

Das entspricht einer Strahlungsleistung von  $P \approx 10^{-8} \frac{\text{eV}}{\mu\text{s}}$ . Der Energieverlust durch die longitudinale Synchrotronabstrahlung ist also vernachlässigbar klein. Da die Implementation in **ADIPARK** aber sehr einfach ist, wird er der Vollständigkeit halber dennoch berechnet.

## 5.1 Implementierung der Synchrotronstrahlung in SIMION

Der Energieverlust aufgrund von Synchrotronabstrahlung wird von **SIMION** bei der Simulation geladener Teilchen nicht berücksichtigt, kann aber vom Benutzer über ein „user program“ eingefügt werden. Aus Zeitgründen ist bisher nur die transversale Abstrahlung implementiert worden. Die einfachste Methode ist, die Synchrotronstrahlung als Dämpfung der Zyklotronbewegung zu betrachten und die daraus resultierende Änderung der Beschleunigungskomponenten im Segment *Accel\_Adjust* einzubauen. Dabei muss beachtet werden, dass die Abstrahlung aus der zum Magnetfeld senkrechten Bewegungskomponente stattfindet, d.h., der Energieverlust  $\dot{E}_{kin\perp}$  ist nach Gleichung (5.4) proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit  $v_{\perp}$ , mit der das Elektron um die Magnetfeldlinie umläuft. Eine Änderung von  $v_{\perp}$  bewirkt eine Änderung der zu  $v_{\perp}$  parallelen Beschleunigung  $a_{\perp}$  des Elektrons. Die Synchrotronstrahlung wird nun in **SIMION** eingebaut, indem man diese Änderung der zum Magnetfeld senkrechten Beschleunigung berechnet. Reduziert man die entsprechende Komponente in **SIMION** um diesen Betrag, erhält man letztlich eine um die Synchrotronabstrahlung korrigierte Teilchenbewegung.

Aus Gleichung (5.4) folgt:

$$\dot{E}_{kin\perp} = \Gamma E_{kin\perp}. \quad (5.7)$$

Die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens ist gegeben durch  $E_{kin} = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$ . Die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie ergibt sich dann

als

$$\begin{aligned}
\dot{E}_{kin} &= \frac{d}{dt} (\gamma - 1) m c^2 \\
&= \frac{m \gamma^3}{2} \frac{d}{dt} (v^2) \\
&= \frac{m \gamma^3}{2} \frac{d}{dt} (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) \\
&= m \gamma^3 v_{\perp} a_{\perp} + m \gamma^3 v_{\parallel} a_{\parallel} \\
&=: \dot{E}_{kin\perp} + \dot{E}_{kin\parallel}.
\end{aligned}$$

Die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie bezüglich der Zyklotronbewegung ist somit durch  $\dot{E}_{kin\perp} = m \gamma^3 v_{\perp} a_{\perp}$  gegeben. Zusammen mit Gl. (5.3) ergibt sich:

$$\dot{E}_{kin\perp} = m \gamma^3 v_{\perp} a_{\perp} = \frac{1}{m} C B^2 |\vec{p}_{\perp}|^2. \quad (5.8)$$

Für die Beschleunigungskomponente erhält man somit:

$$a_{\perp} = \frac{1}{\gamma} C B^2 v_{\perp} =: \Delta a_{\perp}, \quad (5.9)$$

mit  $C = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^3 c^3}$  (vgl. Gl. (5.2)).

Jetzt lässt sich die neue Beschleunigungskomponente für **SIMION** berechnen:

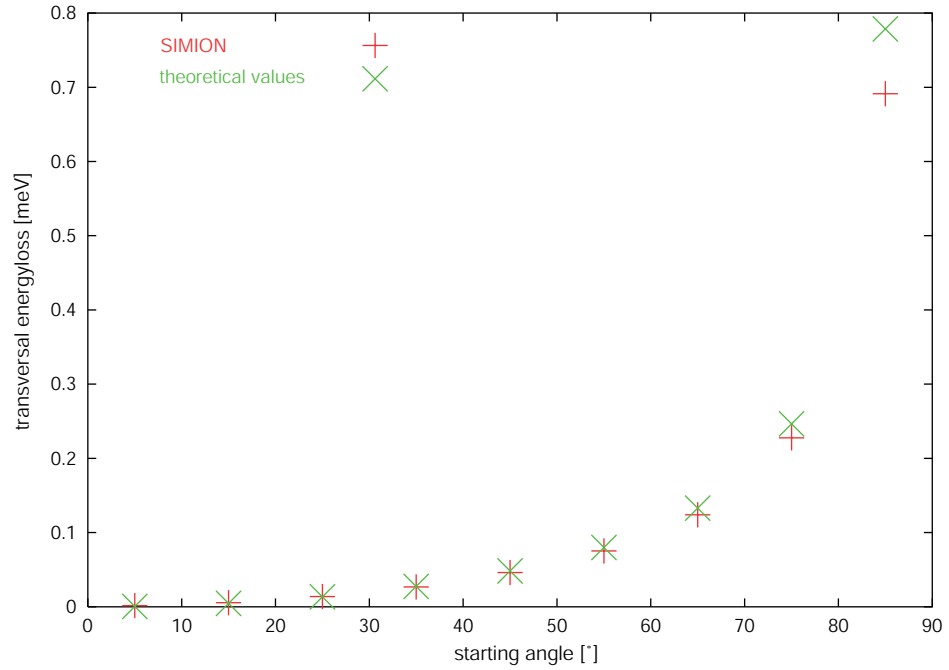
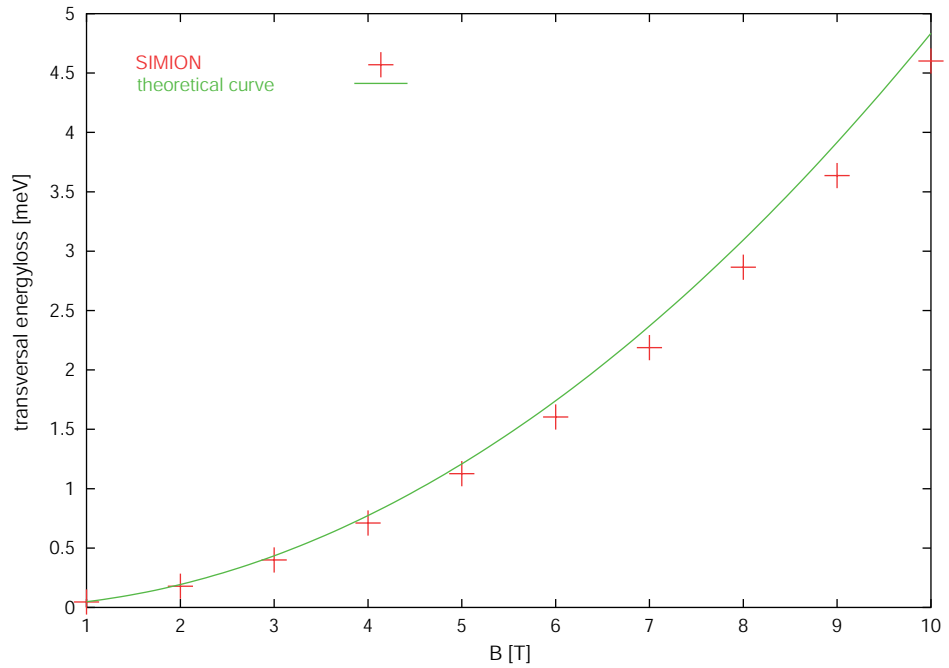
$$\begin{aligned}
a_{\perp}^{neu} &= a_{\perp}^{alt} - \Delta a_{\perp} \\
&= a_{\perp}^{alt} - \frac{1}{\gamma} C B^2 v_{\perp}
\end{aligned} \quad (5.10)$$

Das vollständige Benutzerprogramm ist in Anhang A aufgeführt.

### 5.1.1 Test der Synchrotronstrahlung in SIMION

Der Test der Synchrotronabstrahlung in **SIMION** wurde zunächst an einfachen Magnetfeldkonfigurationen getestet, die eine analytische Berechnung der abgestrahlten Energie erlauben. Simuliert wurden Teilchen mit einer kinetischen Startenergie von  $E_S = 10$  keV in einem homogenen Magnetfeld von  $l=1$  m Länge. Für  $B = 1$  T wurde die Winkelabhängigkeit des Energieverlustes untersucht, indem der Startwinkel  $\theta_S$  (gemessen gegen die Magnetfeldrichtung) in  $10^\circ$ -Schritten von  $5^\circ$  bis  $85^\circ$  variiert wurde. Das Verhalten der Abstrahlung in Magnetfeldern unterschiedlicher Feldstärke ergibt sich aus der Simulation von Elektronen mit  $E_S = 10$  keV und  $\theta_S = 45^\circ$  in einem Magnetfeldbereich von  $B = 1$  T–10 T. Aus Gleichung (5.4) folgt, dass

$$\Delta E_{\perp} \equiv E_{kin\perp 0} - E_{kin\perp}(t) = E_{kin\perp 0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \approx E_{kin\perp 0} \frac{t}{\tau} \quad (5.11)$$

(a)  $\Delta E_{\perp}$  gegen  $\theta_S$ (b)  $\Delta E_{\perp}$  gegen B

**Abbildung 5.1: Test der Synchrotronstrahlung in SIMION anhand homogener Magnetfelder.** (a) Simuliert wurden Elektronen mit  $E_S = 10$  keV unter verschiedenen Startwinkeln  $\theta_S = 5^\circ$  bis  $85^\circ$  in einem 1 m langen homogenen Magnetfeld von  $B = 1$  T. (b) Simuliert wurden Elektronen mit  $E_S = 10$  keV und  $\theta_S = 45^\circ$  in 1 m langen homogenen Magnetfeldern mit  $B = 1$  T–10 T.

mit  $\tau = 1/\Gamma$  und  $t \ll \tau$  für die letzte Näherung. Damit lässt sich für jedes Teilchen die Energieabstrahlung berechnen, wobei

$$E_{kin\perp 0} = E_S \sin^2(\theta_S) \quad (5.12)$$

$$t = \frac{l}{v_{\parallel}} = \frac{l}{v \cos(\theta_S)} \quad (5.13)$$

$$v = \frac{c \sqrt{E_S^2 + 2mc^2 E_S}}{E_S + mc^2}. \quad (5.14)$$

Abbildung 5.1 (a) zeigt den von **SIMION** simulierten (rot) und analytisch berechneten (grün) Energieverlust durch Synchrotronstrahlung für die oben beschriebenen Teilchen. Die Synchrotronabstrahlung steigt mit zunehmendem Winkel aufgrund der Proportionalität von  $\Delta E_{\perp}$  zu  $E_{kin\perp 0} \approx E_S \cdot \sin^2 \theta_S$  (Gl. (5.11) und (5.12)). Die Abhängigkeit des Energieverlustes vom Magnetfeld  $B$  (Gl. 5.8) ist in Abbildung 5.1(b) dargestellt. Die abgestrahlte Leistung hängt quadratisch vom Magnetfeld ab:

$$f(B) = E_{kin\perp 0} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \frac{B^2}{T^2}. \quad (5.15)$$

Die simulierten Werte stimmen gut mit den theoretischen überein. Die leichte Abweichung in beiden Fällen wird verursacht durch die nicht vollständige Homogenität des Magnetfeldes. Da in **SIMION** das Magnetfeld nicht analytisch eingegeben werden kann, muss es mit **BField3D** über eine Spulenkonfiguration bestimmt werden. Eine Spule erzeugt jedoch kein exakt homogenes Magnetfeld. In der Tat war das hier verwendete Magnetfeld geringfügig kleiner als die oben angegebenen Feldstärken. Dadurch, dass die Magnetfeldstärke in den Energieverlust quadratisch eingeht, ist die von **SIMION** berechnete Abstrahlung immer etwas kleiner als der theoretische Wert.

Nun muss noch die Frage geklärt werden, wie sich das Benutzerprogramm auf die Simulationsdauer auswirkt. Zu diesem Zweck wurde ein Teilchen mit einer Startenergie von  $E_S = 10 \text{ eV}$  unter einem Winkel von  $\theta_S = 1^\circ$  in der Mitte des Transportsystems zwischen den beiden Spektrometern simuliert und die Rechenzeit bis zum Erreichen des ersten Reflexionspunkt bestimmt (siehe Tabelle 5.1). Die Simulationen wurden mit verschiedenen *quality factors* (QF) und sowohl mit als auch ohne Synchrotronstrahlung durchgeführt. QF wurde ausgehend vom in **SIMION** vorgegebenen Standardwert (QF = 3) um jeweils 100 erhöht. Die Erhöhung des QF ist gleichbedeutend mit einer Verbesserung der Rechengenauigkeit und erhöht somit selbstverständlich die Rechenzeit. Diese erhöht sich nochmals, wenn man mit eingeschaltetem Benutzerprogramm simuliert. Weitere Tests zeigten, dass ein QF von 203 nötig ist, damit der Energieverlust korrekt berechnet wird. Um die Speicherzeiten der Teilchen zwischen beiden Spektrometern berechnen zu können, müssen diese einige 10000 mal reflektiert werden. Das bedeutet für die Simulation nur eines einzigen Teilchens eine Rechenzeit von ungefähr einem Monat. Dieses Ergebnis hat dazu geführt, **SIMION** im Rahmen dieser Arbeit zwar als Editor zur Erstellung der elektrischen Potentialkarten (vgl. Abschnitt 4.1.1), jedoch nicht zur Berechnung der Speicherzeiten zu verwenden.

QF	$t_R$ [s]	Synchrotronstrahlung
103	80–90	aus
103	150–160	ein
203	140–150	aus
203	250–260	ein

**Tabelle 5.1: Rechenzeit  $t_R$  bis zum ersten Reflexionspunkt in Abhängigkeit von *quality factor* (QF) und Benutzerprogramm.** Eine Erhöhung des QF um 100 führt zu einer Verlängerung der Simulationsdauer um ca. 43%, das Einschalten der Synchrotronstrahlung zusätzlich um 44%.

## 5.2 Implementierung und Test der Synchrotronstrahlung in ADIPARK

Mit  $\omega = (c\beta/r)$  lässt sich Gleichung (5.1) auch schreiben als

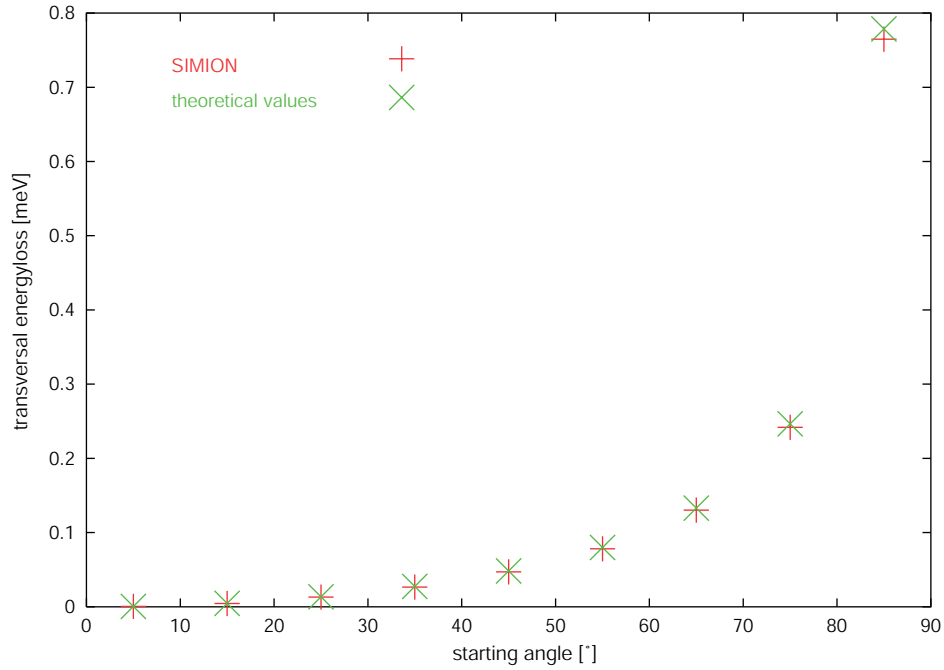
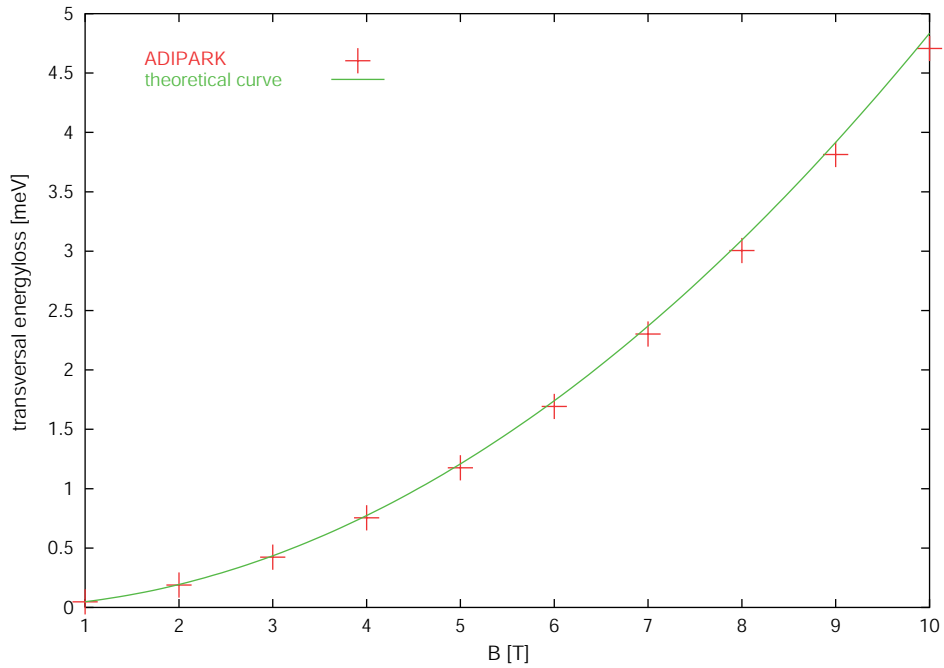
$$P_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 |p_{\perp}|^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{r^2} \beta_{\perp}^4 \gamma^4. \quad (5.16)$$

Die rechte Seite von Gl. (5.16) wurde verwendet, um die senkrechte Synchrotronabstrahlung in **ADIPARK** zu berücksichtigen. Dabei werden Zyklotronradius  $r$ ,  $\beta_{\perp}$  und  $\gamma$  und daraus der Energieverlust für jeden Zeitschritt bestimmt und akkumuliert. Der Test der Abstrahlung im homogenen Magnetfeld wurde, wie bereits in Abschnitt 5.1.1 für **SIMION** beschrieben, durchgeführt. Aufgrund des exakt implementierten homogenen Magnetfeldes stimmen simulierte und theoretische Werte in Abb.5.2 (a) ausgezeichnet überein. In Abb.5.2 (b) ist deutlich die Verstärkung der Abstrahlung mit  $B^2$  zu erkennen.

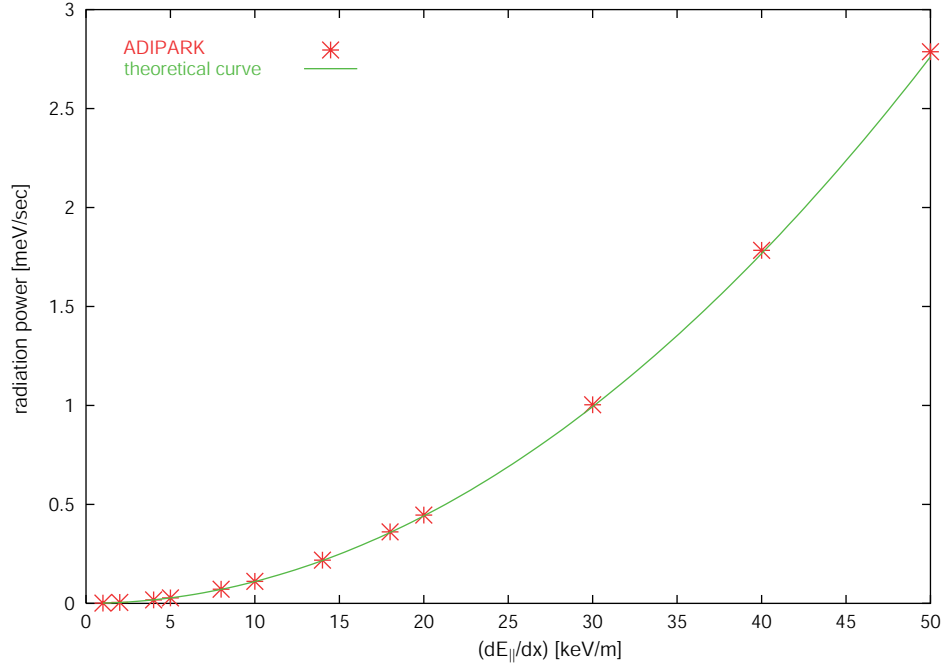
Die longitudinale Synchrotronabstrahlung wurde gemäß Gleichung (5.6) in **ADIPARK** implementiert, so dass für jeden Schritt die Energieänderung  $(dE_{\parallel}/dx)$  und die resultierende Abstrahlung  $\Delta E_{\parallel}$  berechnet und aufsummiert wird. Wie im transversalen Fall überprüft man den Einbau der longitudinalen Synchrotronstrahlung anhand einer einfachen Feldanordnung. Statische Magnetfelder bewirken wegen

$$\vec{F} = q(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})) \quad (5.17)$$

keine Änderung der kinetischen Energie geladener Teilchen. Eine Synchrotronstrahlung proportional zu  $(dE_{\parallel}/dx)^2$  erfordert also das Vorhandensein eines elektrischen Feldes. Im einfachsten Fall ist dies ein homogenes Feld, so dass in ihm befindliche Teilchen linear beschleunigt werden. In einem Testszenario wurden Elektronen in homogenen elektrischen Feldern verschiedener Stärke simuliert, so dass die Elektronen auf einer Strecke  $dx = 1$  m bis auf Null abgebremst werden. In Abbildung 5.3 ist über einen Energiegradientenbereich von  $(dE_{\parallel}/dx) = 1$  keV/m...50 keV/m die Strahlungsleistung  $P_{\parallel}$  aufgetragen. Die theoretische Kurve (grün) gemäß Gleichung (5.6) reproduziert die simulierten Daten (rot) ausgezeichnet. Gut zu erkennen ist der parabelförmige Verlauf aufgrund der Beziehung  $P_{\parallel} \propto (dE_{\parallel}/dx)^2$ .

(a)  $\Delta E_{\perp}$  gegen  $\theta_S$ (b)  $\Delta E_{\perp}$  gegen B

**Abbildung 5.2: Test der Synchrotronstrahlung in ADIPARK anhand homogener Magnetfelder.** (a) Simuliert wurden Elektronen mit  $E_S = 10$  keV unter verschiedenen Startwinkeln  $\theta_S = 5^\circ - -85^\circ$  in einem 1 m langen homogenen Magnetfeld von  $B = 1$  T. (b) Simuliert wurden Elektronen mit  $E_S = 10$  keV und  $\theta_S = 45^\circ$  in 1 m langen homogenen Magnetfeldern mit  $B = 1$  T–10 T.



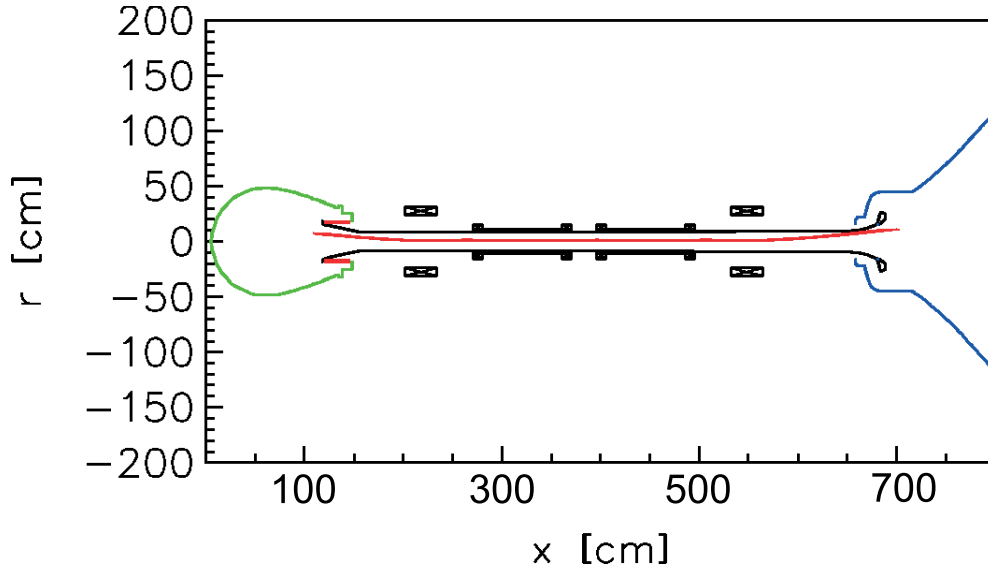
**Abbildung 5.3: Test der Synchrotronstrahlung in ADIPARK.** Aufgetragen ist die Strahlungsleistung in Abhängigkeit des Gradienten der Parallelenergie. Simuliert wurden Elektronen in verschieden starken homogenen elektrischen Feldern, einen Bereich von  $(dE_{||}/dx) = 1 \text{ keV/m} \dots 50 \text{ keV/m}$  umfassend, und mit einer theoretischen Kurve verglichen.

### 5.3 Berechnung der Synchrotronstrahlung im KATRIN–Aufbau

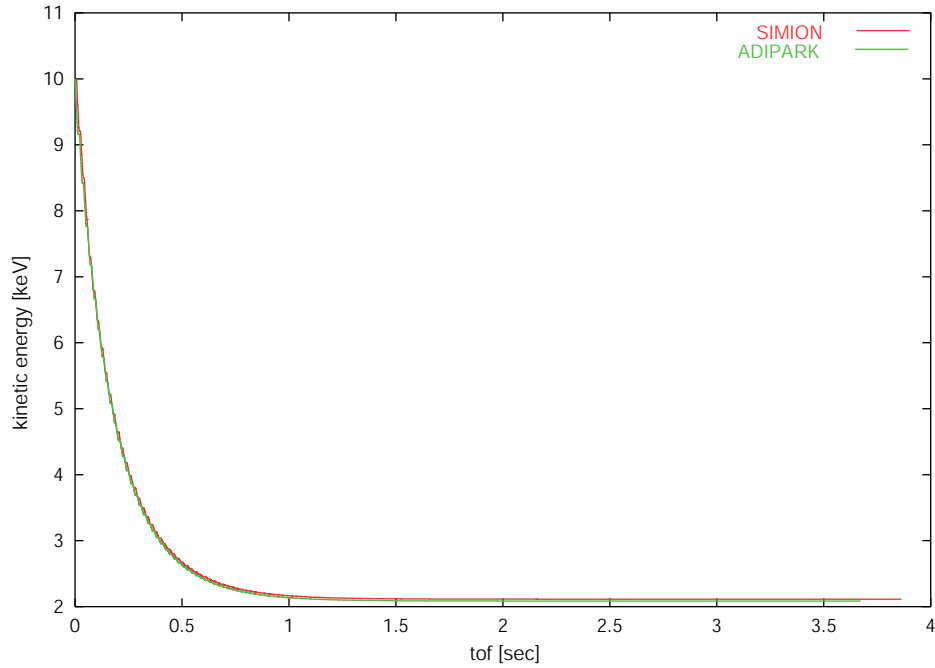
Nachdem die Implementation der Synchrotronabstrahlung sowohl in **SIMION** als auch in **ADIPARK** erfolgreich getestet worden ist, können nun die Abstrahlungen im komplizierten elektromagnetischen Feld des KATRIN Experiments berechnet werden. Mit beiden Programmen wurde ein 10-keV-Elektron simuliert, welches bei  $x = 200 \text{ cm}$  (siehe Abb. 5.4) mit einem radialen Abstand zur Symmetrieachse ( $x$ -Achse) von  $r = 1 \text{ cm}$  in einem Magnetfeld  $B = 3.1 \text{ T}$  unter einem Winkel von  $\theta_S = 45^\circ$  gegen die Symmetrieachse startet.

In Abbildung 5.5 ist die kinetische Energie gegen die Flugzeit des Elektrons aufgetragen. Aufgrund der Synchrotronstrahlung nimmt sie innerhalb weniger Sekunden vom Startwert  $E_S = 10 \text{ keV}$  auf ca.  $2 \text{ keV}$  ab. Geht man davon aus, dass die aus der Bewegung des Führungszentrums resultierende Abstrahlung  $P_{||}$  vernachlässigbar klein ist, so fällt auf, dass mehr Energie aus der Zyklotronbewegung verloren geht, als ursprünglich vorhanden war ( $E_{kin\perp 0} \approx E_{kin\perp 0} \cdot \sin^2 \theta_S = 5000 \text{ eV}$ , da  $\vec{B} || x$ -Achse). Es existiert also ein Mechanismus, der der Transversalbewegung Energie zuführt. Aufgrund der Energieerhaltung kann diese jedoch nur aus der Parallelbewegung entnommen werden. Dies war auch zu erwarten, da die adiabatische Transformation gemäß Gleichung (2.7) beim Übergang zu höheren Magnetfeldstärken den Impulsvektor des Teilchens aufrichtet. Das ist gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Energie in der

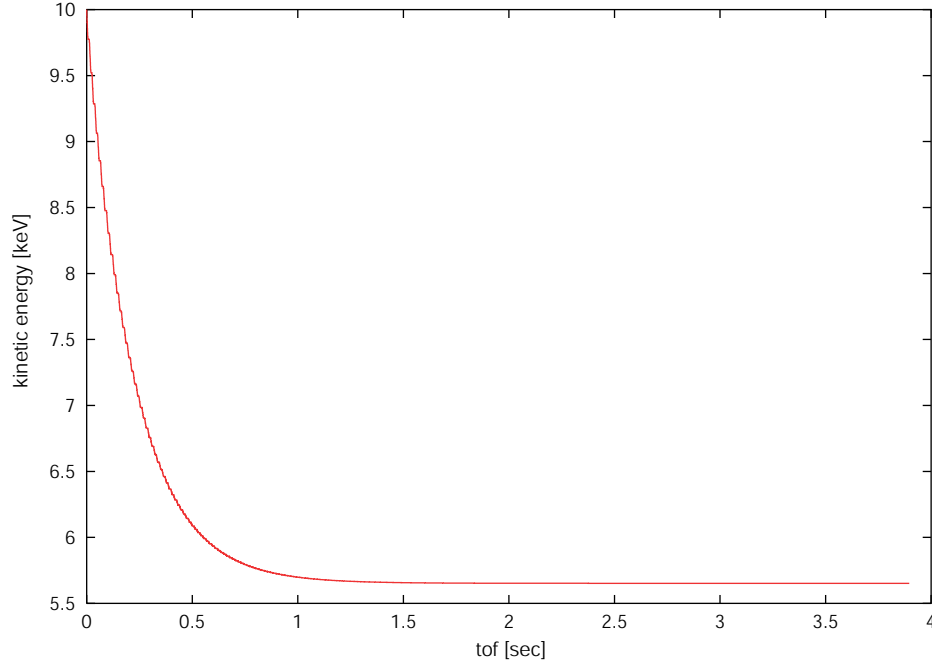




**Abbildung 5.4: Bahn eines zwischen den Spektrometern gespeicherten Elektrons.** Der Nullpunkt der x-Achse liegt in der Mitte des Vorspektrometers. Das Vorspektrometer wurde durch die Äquipotentiallinie (grün) bei  $U = 17900$  V simuliert, um die Größe der Potentialkarte zu minimieren.



**Abbildung 5.5: Abnahme der kinetischen Energie durch Synchrotronstrahlung.** Die Startparameter des simulierten Elektrons lauten:  $x = 200$  cm,  $r = 1$  cm,  $E_S = 10$  keV,  $\theta_S = 45^\circ$ . Die adiabatische Transformation wandelt Energie aus der Parallelbewegung in Zyklotronenergie um, so dass der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung größer als erwartet ist (siehe Text).



**Abbildung 5.6: Kinetische Energie eines im maximalen Magnetfeld gestartetem Elektron.** Das im maximalen Magnetfeld  $B = 5.4 \text{ T}$  mit  $E_S = 10 \text{ keV}$  unter  $\theta_S = 45^\circ$  gestartete Elektron strahlt wegen der adiabatischen Transformation weniger Energie ab, als man erwarten würde.

Zyklotronbewegung, die dann wiederum gemäß Gl. (5.16) abgestrahlt werden kann. Die Situation wird durch die Synchrotronabstrahlung sehr viel komplizierter. Besonders deutlich wird das, wenn man ein im maximalen Magnetfeld gestartetes Elektron betrachtet. Nach Gl. (2.7) kann dieses Teilchen keine Zyklotronenergie mehr hinzugewinnen und sollte folglich  $E_\perp$  vollständig abstrahlen. Dies wurde überprüft, indem die Abstrahlung eines unter  $\theta_S = 45^\circ$  mit  $E_S = 10 \text{ keV}$  im maximalen Magnetfeld  $B = 5.4 \text{ T}$  gestartetem Elektrons berechnet wurde. Abbildung 5.6 zeigt, dass es entgegen obiger Annahme sogar weniger Energie verliert, als nach

$$\Delta E_{\perp \max} = E_{\text{kin} \perp 0} \cdot \frac{B_{\max}}{B_S} = E_S \cdot \sin^2 \theta_S \cdot \frac{B_{\max}}{B_S} \quad (5.18)$$

maximal möglich ist. Die Ursache liegt in der Transformation von Energie aus der Zyklotronbewegung in die Bewegung des Führungszentrums, wenn das Elektron in das niedrigere Magnetfeld der Spektrometer fliegt. Die Zyklotronenergie ist sozusagen in der Bewegung des Führungszentrums zwischengespeichert bis das Elektron wieder zu seinem Startpunkt zurückgekehrt ist. Betrachten wir das Elektron an zwei Punkten seiner Bahn, dem Startpunkt  $P_i$  im maximalen Magnetfeld  $B_{\max} = B_i$  und einem weiteren Punkt  $P_f$  mit  $B_f < B_i$ . Auf dem Weg von  $P_i$  nach  $P_f$  wird  $\Delta E_\perp$  in die Parallelbewegung transformiert. Ohne Abstrahlung würde diese auf dem Rückweg von  $P_f$  nach  $P_i$  vollständig zurücktransformiert, da man einfach nur  $i$  und  $f$  vertauschen muss. Allerdings geht aber Zyklotronenergie aufgrund von Synchrotronstrahlung verloren. Dadurch ist

$$E_{\perp f} < E'_{\perp i} \Rightarrow E'_{\perp f} < E_{\perp i}. \quad (5.19)$$

Aufgrund des gleichzeitigen Ablaufs und der gegenseitigen Beeinflussung von Synchrotronabstrahlung und adiabatischer Transformation, ist es schwierig, für ein vorgegebenes Teilchen den maximalen Energieverlust vorherzusagen. Festhalten lässt sich, dass das Teilchen durch Synchrotronstrahlung Energie verliert und dadurch gekühlt wird. Leider kann es durch den verschwindend kleinen Beitrag der Abstrahlung aus der Bewegung des Führungszentrums so nicht vollständig gekühlt werden. Nach wenigen Sekunden ist der maximal mögliche Energiebetrag abgestrahlt worden. Es fliegt dann, reflektiert von den elektrischen Spiegeln der Spektrometer, ausschließlich mit der kinetischen Energie  $E_{kin\parallel}$  durch das Transportsystem, das Teilchen führt also nach kurzer Zeit keine Zyklotronbewegung mehr aus.

Eine weitere interessante Frage ist, ob die Synchrotronstrahlung vom Startwinkel  $\theta_S$  oder dem radialen Abstand von der Symmetrieachse abhängt. Dabei genügt prinzipiell die Untersuchung von Teilchen, die im Transportsystem starten, z.B. bei festem  $x$  in der  $y$ - $z$ -Ebene variieren:

Nehmen wir an, das Elektron sei innerhalb eines der Spektrometer gestartet. Während es zwischen den Spektrometern oszilliert, befindet es sich irgendwann an einem Punkt im Transportsystem. Mittels adiabatischer Transformation lassen sich die wirklichen Startparameter des Teilchens innerhalb des Spektrometers so umrechnen, als wäre es im Transportsystem gestartet. Die Parameter, wie beispielsweise Energie  $E$  und Winkel  $\theta$  des Teilchens am Punkt  $P_i$ , werden folgendermaßen transformiert:

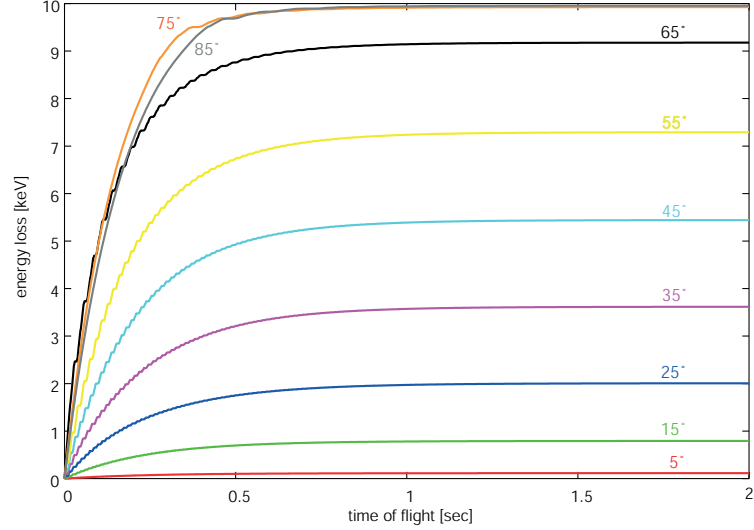
$$\begin{aligned}
 B_i &\rightarrow B_f \\
 U_i &\rightarrow U_f \\
 E_i^\perp = E_i \cdot \sin^2 \theta_i &\rightarrow E_f^\perp = E_i^\perp \frac{B_f}{B_i} \\
 E_i^\parallel = E_i - E_i^\perp &\rightarrow E_f^\parallel = E_i - E_f^\perp - e(U_i - U_f) \\
 E_i &\rightarrow E_f = E_f^\perp + E_f^\parallel \\
 \theta_i &\rightarrow \theta_f = \arcsin \sqrt{\frac{E_f^\perp}{E_f}},
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

wobei  $B_{i,f}$  und  $U_{i,f}$  Magnetfeldstärke und Potential am „realen“ ( $P_i$ ) bzw. „virtuellen“ ( $P_f$ ) Startort des Teilchens bezeichnen.

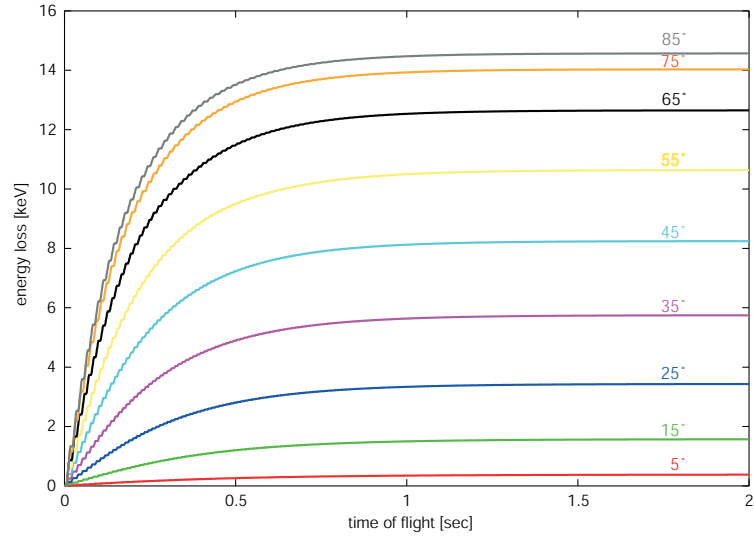
Die bei der Synchrotronabstrahlung nicht berücksichtigte Zeitspanne vom Startort des Teilchens im Spektrometer bis zum „Startort“ im Transportsystem liegt im Bereich weniger Mikrosekunden. Jedes im Spektrometer gestartete Teilchen entspricht im Transportsystem einem Teilchen mit hoher Energie und hohem Winkel, da zum einen der Startort im elektrischen Feld liegt und sich zum anderen der Impulsvektor beim Übergang ins hohe Magnetfeld aufrichtet.

Die Untersuchung der Winkelabhängigkeit der Synchrotronstrahlung wurde für ein mit Startpunkt  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$  im Magnetfeld  $B = 4.5\text{ T}$  im Transportsystem zwischen beiden Spektrometern und ein im Vorspektrometer bei  $P_2 = (50\text{cm}, 15\text{cm}, 0\text{cm})$  im Magnetfeld  $B = 330\text{ Gauss}$  gestartetes Elektron durchgeführt. Die Startenergie beträgt im ersten Fall  $E_S = 10\text{ keV}$ . Da das Teilchen im Vorspektrometer

im hohen Potential  $U = -17500$  V startet, beträgt hier die Startenergie  $E_S = 100$  eV, damit das Teilchen noch gespeichert wird. Abbildung 5.7 gibt die Simulationsergebnisse



(a)  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0)$ ,  $E_S = 10$  keV



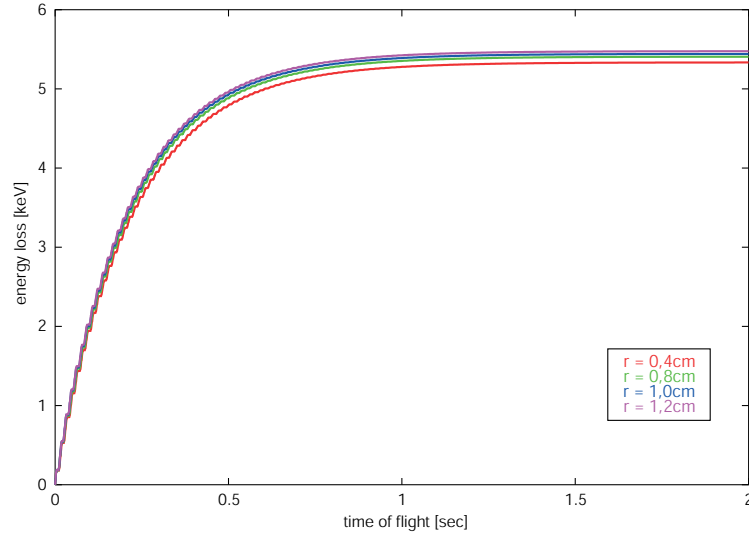
(b)  $P_2 = (50\text{cm}, 15\text{cm}, 0\text{cm})$ ,  $E_S = 100$  eV

**Abbildung 5.7: Energieverlust durch Synchrotronstrahlung in Abhängigkeit vom Startwinkel  $\theta_S$ .** Während der Betrag der abgestrahlten Zyklotronenergie wegen  $E_{\perp 0} = E_S \cdot \sin^2 \theta_S$  vom Startwinkel abhängt, ist die Zeitkonstante winkelnunabhängig.

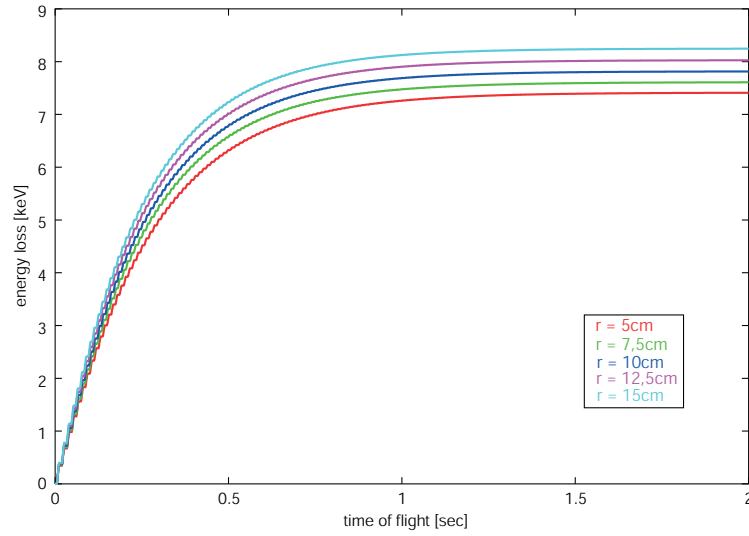
wider. Aufgetragen ist die mit der Zeit abgestrahlte Energie für die verschiedenen Startwinkel. Dabei wird deutlich, dass die Zeit, nach welcher die Zyklotronenergie  $E_{kin\perp}$  vollständig abgestrahlt worden ist, winkelnunabhängig ist, wie man es nach Gleichung (5.5) auch erwartet. Der Energieverlust geht jeweils nach weniger als einer Sekunde Flugzeit in Sättigung. Allein der Betrag des in dieser Zeit entstehenden Energieverlustes ist wegen  $E_{kin\perp 0} = E_S \cdot \sin^2 \theta_S$  durch den Startwinkel vorgegeben. Wie erwartet, ist das qualitative Verhalten der gespeicherten Elektronen in Vorspek-

trometer und Transportsystem gleich.

Die Winkelabhängigkeit für verschiedene radiale Abstände von der Symmetrieachse wurde nicht separat simuliert. Die oben betrachteten Teilchen lassen sich mittels adiabatischer Transformation nicht ineinander überführen, repräsentieren also schon mit verschiedenen Radien gestartete Elektronen. Da sich die Winkelabhängigkeit in diesen beiden Fällen qualitativ nicht unterscheidet, erwartet man Gleiches für die Wahl anderer Startradien.



(a)  $P_1 = (400\text{cm}, y, 0\text{cm})$ ,  $E_S = 10\text{ keV}$



(b)  $P_2 = (50\text{cm}, y, 0\text{cm})$ ,  $E_S = 100\text{ eV}$

**Abbildung 5.8: Energieverlust durch Synchrotronstrahlung in Abhängigkeit vom Radius  $r$ .** Der Startwinkel der Elektronen beträgt in allen Simulationen  $\theta_S = 45^\circ$ . Die Zeitkonstante ist unabhängig vom radialen Abstand von der Achse, aber aufgrund der Inhomogenität von elektrischem Feld und Magnetfeld ist der Betrag der Abstrahlung in den Spektrometern eine Funktion des Radius.

Analog zur Untersuchung der Winkelabhängigkeit wurden die Synchrotronstudien für verschiedene Radien durchgeführt. Da das Transportsystem auf Erdpotential liegt und das Magnetfeld dort homogen ist, erwartet man keine Radialabhängigkeit. Anders ist das in den Spektrometern, denn mit zunehmendem Abstand von der Symmetrieachse ändert sich dort das elektromagnetische Feld. Eine Variation der radialen Startposition sollte somit zu einem leicht unterschiedlichen Abstrahlungsverhalten führen. Um diese Tatsache auch graphisch demonstrieren zu können, sind für diesen Fall auch Teilchen innerhalb des Vorspektrometers bei  $P_2 = (50\text{cm}, y, 0\text{cm})$  in einem Magnetfeld  $B = 330$  Gauss gestartet worden. Alle Teilchen wurden unter festem Startwinkel  $\theta_S = 45^\circ$  simuliert, wobei für die im Transportsystem gespeicherten Elektronen die oben genannte Startenergie beibehalten wurde. Bei einer Startposition innerhalb der Spektrometer muss die Startenergie kleiner sein (hier:  $E_S = 100$  eV), damit die Teilchen noch gespeichert werden. Wie Abbildung 5.8 zeigt, ist der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung innerhalb des Transportsystems ebenfalls unabhängig vom radialen Abstand von der Symmetrieachse. Innerhalb der Spektrometer variiert die Höhe des Energieverlustes mit dem Radius, da im Gegensatz zum elektrisch feldfreien Transportsystem mit homogenen Magnetfeld dort sowohl elektrisches Feld als auch Magnetfeld inhomogen sind.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die gespeicherten Elektronen nicht vollständig abgekühlt werden, wobei die verbleibende Energie vom Startort des Teilchens abhängt, dagegen die Zeitkonstante der Synchrotronstrahlung unabhängig von der Wahl von Startwinkel und Radius ist.

## Kapitel 6

# Streuprozesse

Wie in Kapitel 5 gezeigt, reicht die Synchrotronstrahlung allein nicht aus, um die zwischen den Spektrometern gespeicherten Elektronen so weit zu kühlen, dass keine Stoßionisation mehr möglich ist. Ein weiterer Kühlmechanismus sind alle nicht ionisierenden Stöße der Elektronen an Restgasmolekülen. Es soll nun untersucht werden, ob sich die kinetische Energie eines gespeicherten Elektrons durch derartige Streuprozesse schnell genug reduzieren lässt, bevor ein Restgasmolekül ionisiert und damit möglicherweise die Vermessung des Tritium- $\beta$ -Spektrums gestört wird (vgl. Abschnitt 3.1). Um diese Fragestellung bearbeiten zu können, wurde **ADIPARK** um ein von F. Glück entwickeltes zusätzliches Modul erweitert, mit dem zumindest näherungsweise Elektronstreuung an Restgasmolekülen simuliert werden kann. Dieses wurde im Rahmen dieser Arbeit getestet und in **ADIPARK** implementiert.

Die Beschreibung von Streuprozessen erfordert die Kenntnis der totalen und doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitte. Selbst für das einfachste Molekül  $\text{H}_2$  ist die theoretische Berechnung der Wirkungsquerschnitte nur näherungsweise möglich, da die Eigenfunktionen des Wasserstoffmoleküls nicht exakt angegeben werden können [Gei64]. Die wenigen experimentellen Daten umfassen meist nur niederenergetische Elektronen bis zu einigen keV und kleine Streuwinkel.

Will man die Streuung von Elektronen am Wasserstoffmolekül berechnen, so muss man im Allgemeinen die Coulombwechselwirkung des gestreuten Elektrons mit den zwei Elektronen und den zwei Kernen im  $\text{H}_2$ -Molekül berücksichtigen. Die einfachste Möglichkeit, dies zu bewerkstelligen, ist die Berechnung mittels Bornscher Näherung. Diese Näherung lässt sich dann anwenden, wenn das zu berücksichtigende Potential schwach ist und die kinetische Energie des Projektils, in diesem Fall die Elektronen aus dem  $\beta$ -Zerfall, groß ist. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit des einfallenden Elektrons wesentlich größer sein muss, als die Geschwindigkeiten der im Molekül gebundenen Elektronen. Für die Stoßberechnung in Bornscher Näherung müssen die Anfangs- und Endzustände von Elektron und  $\text{H}_2$ -Molekül bekannt sein. Im Falle des Elektrons lassen sich die Eigenzustände durch ebene Wellen ausdrücken, für das  $\text{H}_2$ -Molekül müssen die Eigenzustände berechnet werden. Dann lässt sich ein Integral bilden, welches proportional zum differentiellen Wirkungsquerschnitt ist:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \int d^3r_1 d^3r_2 \psi_f^*(r_1, r_2) \psi_i(r_1, r_2) V \exp(iKr). \quad (6.1)$$

Hier sind  $\psi_i$  und  $\psi_f$  Anfangs- und Endzustand des Moleküls,  $V$  das Potential zwischen Elektron und Molekül,  $r$  der Ort des gestreuten Elektrons und  $K = k_i - k_f$  der Impulsübertrag mit  $k_i$  und  $k_f$  den Impulsen des gestreuten Elektrons vor und nach dem Stoß ( $\hbar = 1$ ). Die Indizes 1 und 2 bezeichnen die beiden Elektronen im  $H_2$ -Molekül.

## 6.1 Streuprozesse in ADIPARK

Die Streuprozesse, an denen die gespeicherten Elektronen beteiligt sind, werden in unserem Fall auf das Wasserstoffmolekül  $H_2$  beschränkt, da im Ultrahochvakuum praktisch nur  $H_2$  im Restgas vorkommt. Die Streuung der Elektronen setzt sich zusammen aus elastischer und inelastischer Streuung. Bei der elastischen Streuung bleibt das  $H_2$ -Molekül im Grundzustand und übernimmt nur den Rückstoßimpuls des Elektrons. Inelastische Streuung führt zu einer Anregung oder auch zur Ionisation des Moleküls. Für alle Prozesse gibt es einen separaten Wirkungsquerschnitt.

Eine wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die mittlere freie Weglänge  $\lambda$ . Sie ist abhängig von der Summe der jeweiligen totalen Wirkungsquerschnitte  $\sigma_{tot_i}$  der betrachteten Prozesse und der Teilchenzahldichte der Streuzentren. Die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  des Elektrons berechnet sich demnach gemäß

$$\lambda = \frac{1}{N \sum_i \sigma_{tot_i}}, \quad (6.2)$$

mit  $N$  der Teilchenzahldichte.

Für die Simulation muss zunächst aus dieser mittleren freien Weglänge bestimmt werden, wann, d.h. nach welcher durch ein Teilchen zurückgelegten Flugstrecke  $l$ , ein Stoß stattfindet. Gesucht ist also die Intervallverteilung der freien Flugstrecken  $l$ . Betrachten wir dazu ein Elektron, welches in der Penningfalle gespeichert ist und sich entlang eines Bahnstückes der Länge  $L$  bewegt. Die Teilchenzahldichte  $N$  ist in der Penningfalle ungefähr konstant, ebenso die totalen Wirkungsquerschnitte  $\sigma_{tot_i}$ , falls die kinetische Energie konstant ist. Ändert sich die kinetische Energie über die Länge  $L$  nur wenig, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $n$  Stoßprozesse stattgefunden haben, nachdem  $L$  durchflogen ist, durch eine Poissonverteilung gegeben:

$$P\left(\frac{L}{\lambda}, n\right) = \frac{\left(\frac{L}{\lambda}\right)^n}{n!} e^{-L/\lambda}. \quad (6.3)$$

Sei  $P_0$  die Wahrscheinlichkeit, dass während der Strecke  $l$  kein Stoß stattgefunden hat, und  $P_1$  die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung innerhalb der infinitesimal kleinen Flugstrecke zwischen  $l$  und  $l + dl$ , mit  $dl \ll l$ . Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(l)$  durch Multiplikation dieser beiden Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$f(l)dl = P_0 \cdot P_1 = P\left(\frac{l}{\lambda}, 0\right) \cdot P\left(\frac{dl}{\lambda}, 1\right) = \frac{1}{\lambda} e^{-l/\lambda} dl \quad (6.4)$$

Mit  $\int_0^\infty f(l)dl = 1$  und  $\int_0^\infty lf(l)dl = \lambda$  ist die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  wie erwartet der Mittelwert der Verteilung. Mittels Gl.(6.4) werden die Orte, an denen das



gespeicherte Elektron entlang seiner Bahn mit einem Restgasmolekül wechselwirkt, zufällig generiert. Da sich in **ADIPARK** die Energie des Teilchens aufgrund der Synchrotronstrahlung ändert, ist die Bestimmung des Wechselwirkungsortes allgemeiner für sich während des Fluges verändernde  $\sum \sigma_{tot_i}$  programmiert worden: Die noch unbekannte freie Weglänge wird auf Eins gesetzt und dann die Flugstrecke  $x_0$  bis zum Stoß aus einer Exponentialverteilung (siehe Gl. (6.4)) gewürfelt.  $x_0$  ist dann eine Zahl zwischen Null und  $\infty$  mit dem Mittelwert Eins nach wiederholtem Würfeln. Während der kurzen Flugstrecke  $\Delta l(j)$  eines in **ADIPARK** berechneten Iterationsschrittes, kann die Energie des Elektrons und damit  $\sum \sigma_{tot_i}$  als konstant betrachtet werden. Man kann also  $\sum \sigma_{tot_i}(j)$  bzw.  $\lambda(j)$  angeben. Der Quotient  $\frac{\Delta l(j)}{\lambda(j)}$  gibt nun den Beitrag der Flugstrecke  $\Delta l(j)$  zur auf Eins normierten freien Weglänge an. Es werden also N Iterationsschritte ausgeführt, wobei N über  $x_0$  festgelegt wird:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\Delta l(j)}{\lambda(j)} \leq x_0 < \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\Delta l(j)}{\lambda(j)} \quad (6.5)$$

Die Entscheidung, ob bei einem Stoß elastisch gestreut, ionisiert oder angeregt wird, wird mit Hilfe der entsprechenden totalen Wirkungsquerschnitte dieser Prozesse gefällt. Ist der Ort für einen Stoß ermittelt, werden über die aktuelle kinetische Energie des Teilchens die totalen Wirkungsquerschnitte der drei beteiligten Prozesse berechnet und aufsummiert. Dann ist aber auch der Anteil jedes einzelnen Prozesses an der gesamten Wechselwirkungswahrscheinlichkeit bekannt. Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Stoßprozesse umfassen also ein Intervall von 0 bis 1. Dieses Intervall lässt sich in Abschnitte unterteilen, deren Größe proportional zum jeweiligen Anteil an der gesamten Wechselwirkungswahrscheinlichkeit ist. Über eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 ermittelt man den für diesen Stoß relevanten Abschnitt des Intervalls und somit den stattfindenden Stoßprozess.

Die mittlere Flugzeit  $\tau$  zwischen zwei Stößen lässt sich berechnen, wenn man die Geschwindigkeit  $v$  der Elektronen und die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  kennt. Es gilt dann:

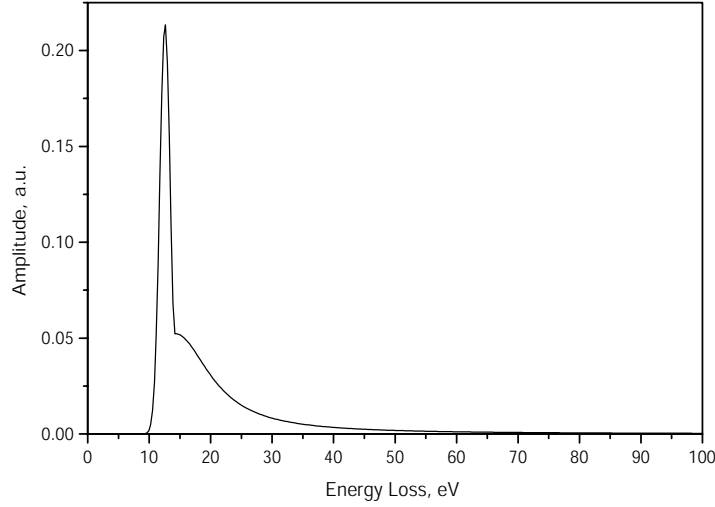
$$\tau = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{vN \sum_i \sigma_{tot_i}} \quad (6.6)$$

Betrachten wir für eine Abschätzung von  $\tau$  ein Elektron mit einer kinetischen Energie von  $E_{kin} = 5 \text{ keV}$ . In nichtrelativistischer Näherung beträgt die Teilchengeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} \cdot c = \sqrt{\frac{10 \text{ keV}}{511 \text{ keV}}} \cdot c = 0,14c. \quad (6.7)$$

Für die Berechnung der mittleren freien Weglänge benötigt man den (summierten) totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{tot}(5 \text{ keV}) = 1.17 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$  (siehe Abb. 6.2) und die Teilchenzahldichte  $N$ . Mit dem für KATRIN angestrebten Vakuumdruck  $p = 1 \cdot 10^{-11} \text{ mbar}$  und der Temperatur des Spektrometertanks von  $T = -20^\circ \text{C}$  erhält man letztere aus dem idealen Gasgesetz:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^{-11} \text{ mbar}}{1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 253 \text{ K}} = 3 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-3}. \quad (6.8)$$



**Abbildung 6.1: Energieverlustspektrum für inelastische Einfachstreuung von 18-keV-Elektronen an molekularem Wasserstoff [As00].**

Das führt auf  $\tau(5 \text{ keV}) \approx 70$  Sekunden. Die mittlere Flugzeit zwischen zwei Stößen ist eine Funktion der Teilchenenergie  $E$ , da die Wirkungsquerschnitte  $\sigma_{tot_i}$  von  $E$  abhängen (siehe Abb. 6.2). Die Summe dieser totalen Wirkungsquerschnitte ist näherungsweise proportional zu  $1/E$  (siehe  $\sigma_{TOT}$  in Abb. 6.2) und die Teilchengeschwindigkeit  $v$  somit proportional zu  $\sqrt{E}$ :

$$\tau(E) \approx \tau(5 \text{ keV}) \cdot \sqrt{E} = 70 \text{ s} \cdot \sqrt{\frac{E}{5 \text{ keV}}} \quad (6.9)$$

Für das Maximum des Ionisationswirkungsquerschnitts ( $E \approx 100 \text{ eV}$ ) ergibt das  $\tau(\sigma_{Ion}^{max}) = 9.6 \text{ s}$ , d.h. im Mittel einen Stoß alle 10 Sekunden.

Nachdem wie oben beschrieben die Art des Stoßprozesses bestimmt wurde, wird im nächsten Schritt der Energieverlust des gestreuten Elektrons im betreffenden Prozess ermittelt. Abhängig von der Art der Streuung, der Primärenergie des Teilchens und dem Stoßparameter gehorcht er ebenfalls einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Diese Verteilung wurde experimentell für die Streuung von 18-keV-Elektronen an molekularem Wasserstoff ermittelt [As00]. Abbildung 6.1 zeigt das Energieverlustspektrum für inelastische Einfachstreuung. Das Spektrum besteht aus einer schmalen Verteilung um ein Maximum bei einem Energieverlust von  $E' = 12.6 \text{ eV}$  durch die Anregung gebundener Zustände, welches für größere Energieverluste in ein Kontinuum übergeht. Letzteres wird überwiegend durch die bei  $E' = 15.45 \text{ eV}$  einsetzenden Ionisation des  $\text{H}_2$ -Moleküls erzeugt. Die Anregungen können vereinfacht durch eine Gaußverteilung, das Kontinuum durch eine Lorentzverteilung angepasst werden [As00]. Somit kann das Energieverlustspektrum durch

$$f(E') = \begin{cases} A_1 \cdot \exp\left(-\frac{2(E' - E'_1)^2}{w_1^2}\right) & \text{für } E' < E'_c \\ A_2 \cdot \frac{w_2^2}{w_2^2 + 4(E' - E'_2)^2} & \text{für } E' > E'_c \end{cases} \quad (6.10)$$

parametrisiert werden. Dabei sind  $A_{1,2}$  die Amplituden,  $E'_{1,2}$  die Positionen der Maxima und  $w_{1,2}$  die Breiten der Verteilungen. Mit der Normierung  $\int_0^{(E'/2)} f(E') dE' = 1$  liefert Gleichung (6.10) den inelastischen Wirkungsquerschnitt über

$$\frac{d\sigma}{dE'} = \sigma_{tot} \cdot f(E'). \quad (6.11)$$

Jeder Energieverlust ist mit einem bestimmten Streuwinkel verbunden. Für die Simulation der Teilchenbahn ist die Kenntnis beider Größen entscheidend, da das Elektron nicht nur direkt durch den Energieverlust, sondern auch indirekt über die Zunahme der Zyklotronenergie gekühlt wird, da letztere durch Synchrotronstrahlung schnell abgestrahlt wird. Der Zusammenhang zwischen Energieverlust  $\Delta E$  (entspricht  $E'$  in obiger Diskussion) und Streuwinkel  $\theta_{sc}$  ist für die beteiligten Stoßprozesse verschieden und mitunter schwierig zu bestimmen.

Am einfachsten lässt sich die elastische Streuung berechnen, da dann in Gl.(6.1)  $\psi_i = \psi_f$  der Grundzustand des  $H_2$ -Moleküls ist. Dieser Grundzustand ist vollständig berechenbar, so dass die Beschreibung der elastischen Streuung am zuverlässigsten ist. Für die elastische Elektronstreuung am Wasserstoffatom ist der differentielle Wirkungsquerschnitt in der ersten Bornschen Näherung gegeben durch

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_H^{el} = 4 \frac{(8 + K^2)^2}{(4 + K^2)^4} a_0^2, \quad (6.12)$$

mit  $a_0 = 0.53 \cdot 10^{-8}$  cm dem Bohrschen Atomradius. Der Impulsübertrag  $K$  ist hier

$$K = 2\sqrt{E_H(1 - \cos\theta_{sc})}, \quad (6.13)$$

und  $E_H = E/27.2$  eV ist die Elektronenergie in atomaren Hartree-Einheiten. Für  $K \gg 1$  (große  $\theta_{sc}$ ) geht Gleichung (6.12) in

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_H^{el} \approx \frac{4}{K^4} a_0^2, \quad (6.14)$$

die Rutherfordsche Streuformel über, d.h., das Elektron streut praktisch am Kern. Für kleine  $K$  (kleine  $\theta_{sc}$ ) schirmt das Hüllenelektron die Kernladung ab, deshalb ist der differentielle Wirkungsquerschnitt endlich für  $K=0$  ( $\theta_{sc}=0$ ).

Für die Streuung am  $H_2$ -Molekül müssen folgende Modifikationen vorgenommen werden:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{H_2}^{el} = 2 \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_H^{el} \left( 1 + \frac{\sin(KD)}{KD} \right) (1 + C_{el}(K)). \quad (6.15)$$

Hier bezeichnet  $D = 1.4a_0$  den Kernabstand im  $H_2$ -Molekül, der Faktor 2 wird wegen der zwei H-Atome eingeführt, der Faktor  $1 + \frac{\sin(KD)}{KD}$  berücksichtigt die Diffraktion der Elektronstreuung an den zwei H-Atomen, und der letzte Faktor beinhaltet den Unterschied in der Elektronendichte zwischen  $H_2$ -Molekül und zwei unabhängigen Wasserstoffatomen. Die Korrelation zwischen Energieverlust und Streuwinkel ist durch

$$\Delta E = 2E \frac{m_e}{m_{H_2}} (1 - \cos\theta_{sc}) \quad (6.16)$$

gegeben, wobei  $E$  die Primärenergie des Elektrons und  $m_e$  und  $m_{H_2}$  die Elektron- bzw. Molekülmasse bezeichnen.

Bei der Molekülanregung ist der Endzustand  $\psi_f$  ein angeregter Zustand. Dieser gibt den Energieverlust vor. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird über die generalisierten Oszillatorstärken  $f$  oder äquivalent über das Quadrat des Betrages des Formfaktors ermittelt. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{const} \cdot \frac{f}{\Delta E \cdot K^2}, \quad (6.17)$$

wobei  $\Delta E$  der Energieverlust und  $K$  der Impulsübertrag sind.

Die generalisierten Oszillatorstärken  $f$  lassen sich ebenfalls mittels Gl.(6.1) bestimmen. Da die Bornsche Näherung aber nur für große Primärenergien gültig ist, muss man für Energien  $E < 100$  eV auf gemessene Werte zurückgreifen. [Arr80, Ch80, Zhi95] enthalten tabellierte Werte für die generalisierten Oszillatorstärken  $f$  für die Anregung bei Elektron- $H_2$ -Streuung.

Bei der Ionisation verlässt eines der Hüllenelektronen das Molekül.  $\psi_f$  hat dann zwei Komponenten, den Grundzustand des  $H_2^+$ -Ions und die Wellenfunktion des Sekundärelektrons. Gemäß Gl.(6.1) führt das auf ein sehr kompliziertes Integral. Für das Wasserstoffatom ist in [In71] für dieses Integral eine analytische Formel angegeben, die jedoch für molekularen Wasserstoff modifiziert werden muss. Für die Streuung am  $H_2$ -Molekül ist der Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Energieverlust leider nicht bekannt. Für Primärenergien  $E > 100$  eV und Streuwinkel  $\theta_{sc} > 20^\circ$  kann man das freie Elektron-Modell benutzen, d.h., man betrachtet das Hüllenelektron als freies Elektron und berechnet die freie Elektron-Elektron-Streuung. Damit erhält man wieder eine vollständige Korrelation zwischen Streuwinkel und Energieverlust:

$$\Delta E = E(1 - \cos^2 \theta_{sc}) \quad (6.18)$$

Für kleine Winkeländerungen ist dieses Modell jedoch nicht mehr gültig. In diesem Falle wird eine analytische Formel von Bethe in erster Bornscher Näherung für die Ionisation von atomarem Wasserstoff verwendet.

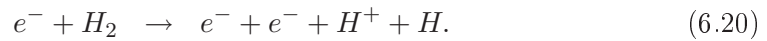
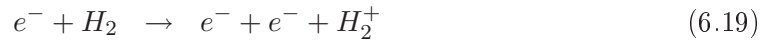
Zusammengefasst wird in **ADIPARK** für ein gespeichertes Teilchen also zunächst die mittlere freie Weglänge aus der Summe aller totalen Wirkungsquerschnitte berechnet und dann über einen Zufallsgenerator bestimmt, wann ein Stoß stattfindet. Nachdem mit Hilfe der Wirkungsquerschnitte  $\sigma_{tot_i}$  bei aktueller Teilchenenergie  $E$  die Art des Streuprozesses ermittelt worden ist, werden Energieverlust  $\Delta E$  und der zugehörige Streuwinkel  $\theta_{sc}$  bestimmt. Damit erhält man für das betrachtete Teilchen die kinetische Energie und Raumrichtung nach dem Stoß. Eine Vereinfachung von **ADIPARK** liegt darin, dass nicht die volle dreidimensionale Bahn des Teilchens simuliert, sondern nur die Bewegung des Führungszentrums berechnet wird (siehe Kapitel 4.2). Der Impuls ist in einen Anteil parallel und senkrecht zur Magnetfeldlinie zerlegt. Für die Simulation der Stöße muss deshalb der Impulsvektor im Raum rekonstruiert werden, wobei zufällig bestimmt wird, an welchem Punkt der nicht simulierten Zyklotronbahn sich das Teilchen zum Zeitpunkt des Stoßes befindet. Der Impulsvektor wird dann anhand der Werte für Energieverlust und Streuwinkel im Raum rotiert und skaliert und wieder in die zum Magnetfeld senkrechte bzw. parallele Komponente zerlegt.

### 6.1.1 Totale Wirkungsquerschnitte in ADIPARK

Die Elektronstreuung am Wasserstoffmolekül beinhaltet mehrere Prozesse, deren Wahrscheinlichkeit jeweils durch einen Wirkungsquerschnitt gegeben wird. In dieser Version von **ADIPARK** sind die totalen Wirkungsquerschnitte für elastische Streuung, Ionisation und Anregung des  $H_2$ -Moleküls implementiert worden.

Die elastische Streuung führt zu einer Winkeländerung des Elektrons und einem Energieübertrag in Form eines Rückstoßes an das Molekül, wobei dieses jedoch nicht angeregt wird.

Die Ionisation umfasst die beiden Prozesse



Dabei wird im ersten Fall ein Hüllenelektron frei, das Molekül als solches bleibt jedoch erhalten, wohingegen im zweiten Fall durch die Ionisation die kovalente Bindung des  $H_2$ -Moleküls aufgebrochen wird.

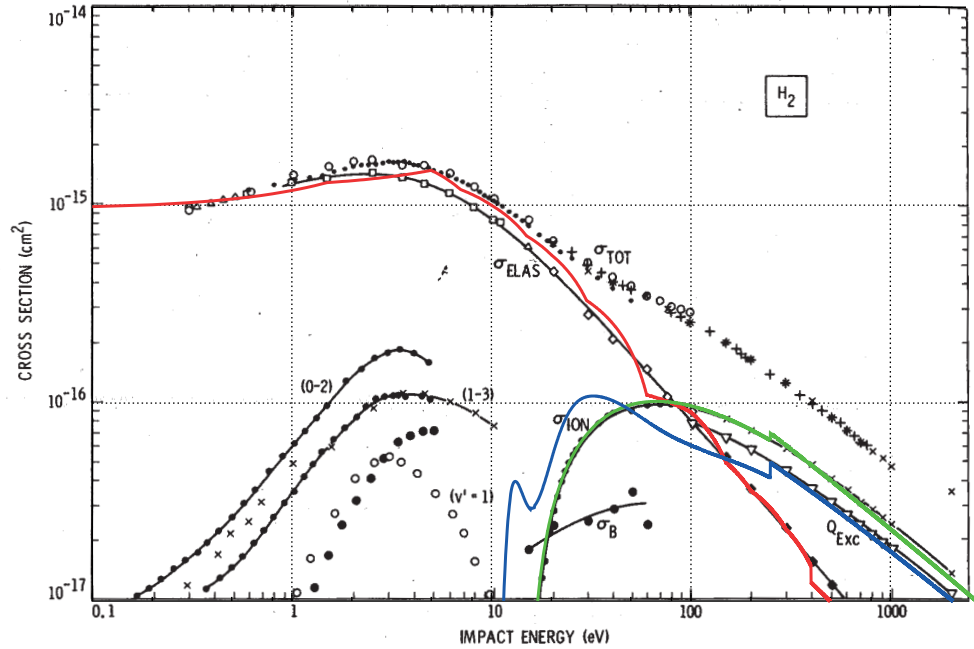
Bei der inelastischen Kollision eines Elektrons mit molekularem Wasserstoff, kann das Hüllenelektron zwar im Molekülverbund verbleiben, allerdings wird es in einen angeregten Zustand versetzt. Die hier berücksichtigten Anregungen sind Anregungen der B- und C-Vibrationsbanden sowie des Vibrationskontinuums mit anschließender Dissoziation in ein Wasserstoffatom im Grundzustand  $H(1s)$  und ein angeregtes  $H$ -Atom  $H(2s)$  oder  $H(2p)$ . Der totale Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung wurde gemäß [Tra83, Li87], für Ionisation gemäß [CP96, PR73] und für die Molekülanregung gemäß [Arr80, Zhi95] parametrisiert.

Abbildung 6.2 zeigt die implementierten totalen Wirkungsquerschnitte für elastische Streuung (rot), Ionisation (grün) und Anregung (blau) im Vergleich mit den experimentell ermittelten totalen Wirkungsquerschnitten [Tra83]. Während die simulierten totalen Wirkungsquerschnitte für elastische Streuung und Ionisation sehr gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen, ist der totale Wirkungsquerschnitt für die Anregung des  $H_2$ -Moleküls nur ab Energien  $E \gtrsim 110$  eV vermessen worden. Die größten Schwierigkeiten bei der experimentellen Bestimmung des totalen Anregungswirkungsquerschnitts liegen zum einen in der Auflösung der stark überlappenden Bandstruktur und der Messung des Streuwinkels unterhalb von  $10^\circ$ . Der in der Simulation implementierte Anregungswirkungsquerschnitt vergleicht sich gut mit den Messdaten oberhalb von  $E > 200$  eV. Die Wirkungsquerschnitte der Anregung der Rotationsfreiheitsgrade unterhalb einer Primärenergie von  $E = 10$  eV wurden nicht berücksichtigt.

### 6.1.2 Energieverlust und Streuwinkel in ADIPARK

Energieverlust und Streuwinkel sind nicht nur korreliert, ihre korrekte Berechnung ist, wegen der Synchrotronabstrahlung der Zyklotronenergie, wichtig für den weiteren Verlauf der betrachteten Teilchenbahn. Deshalb ist ein sorgfältiger Test der Bestimmung beider Größen und ihres Zusammenhangs notwendig.

Zunächst wird die Simulation des Streuwinkels  $\theta_{sc}$  überprüft, indem für Elektronen mit einer Primärenergie von 25 keV jeweils 100.000mal der Streuwinkel aus einer



**Abbildung 6.2:** Vergleich der in **ADIPARK** implementierten totalen Wirkungsquerschnitte mit experimentellen Daten [Tra83]. Die rote Kurve zeigt den in der Simulation implementierten totalen Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung, die grüne den der Ionisation und die blaue Kurve den totalen Anregungsquerschnitt.

den jeweiligen differentiellen Wirkungsquerschnitt repräsentierenden Zufallsverteilung berechnet wird. Die so für die einzelnen Streuprozesse erhaltenen simulierten Winkelverteilungen lassen sich dann mit experimentellen Daten vergleichen.

In [Gei64] wird die gemessene Winkelverteilung von an Wasserstoff elastisch und inelastisch gestreuten 25keV-Elektronen diskutiert und mit verschiedenen Modellrechnungen verglichen (siehe Abb. 6.3). (1a), (2) und (3) repräsentieren drei theoretische Vorhersagen des elastischen differentiellen Wirkungsquerschnitts. (1a) verwendet Moleküleigenfunktionen von [Wang28], (2) berechnet den differentiellen Wirkungsquerschnitt des  $H_2$ -Moleküls, indem das Molekül aus zwei Wasserstoffatomen unter Berücksichtigung der Bindungsenergie zusammengesetzt gedacht, aber die durch die Bindung veränderte Elektronendichteverteilung jedoch vernachlässigt wird, und (3) gibt die Summe der differentiellen Wirkungsquerschnitte zweier unabhängiger H-Atome wider. (4) ist die Summe der differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Anregung der B- und C-Vibrationsbanden.

Abbildung 6.3 zeigt außerdem den Vergleich der von **ADIPARK** simulierten differentiellen Wirkungsquerschnitte mit der in [Gei64] dargestellten Winkelverteilung. Die rote Kurve entspricht der elastischen Streuung. Sie stimmt mit den experimentell ermittelten Daten bis auf eine kleine Abweichung zu hohen Streuwinkeln sehr

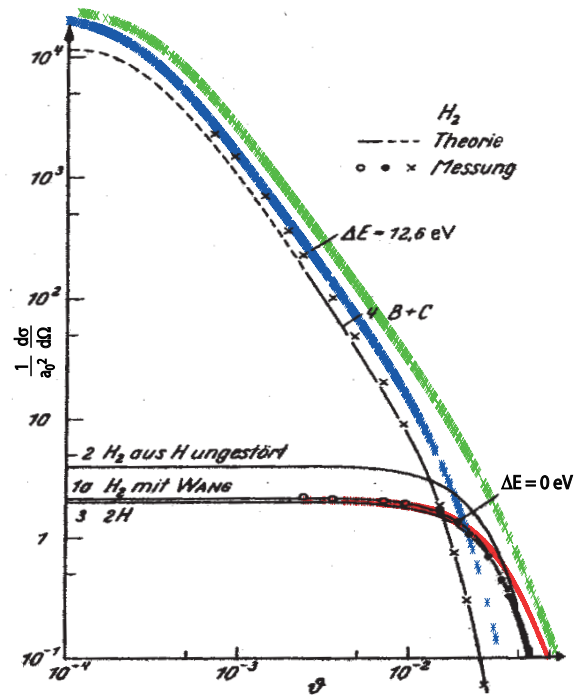
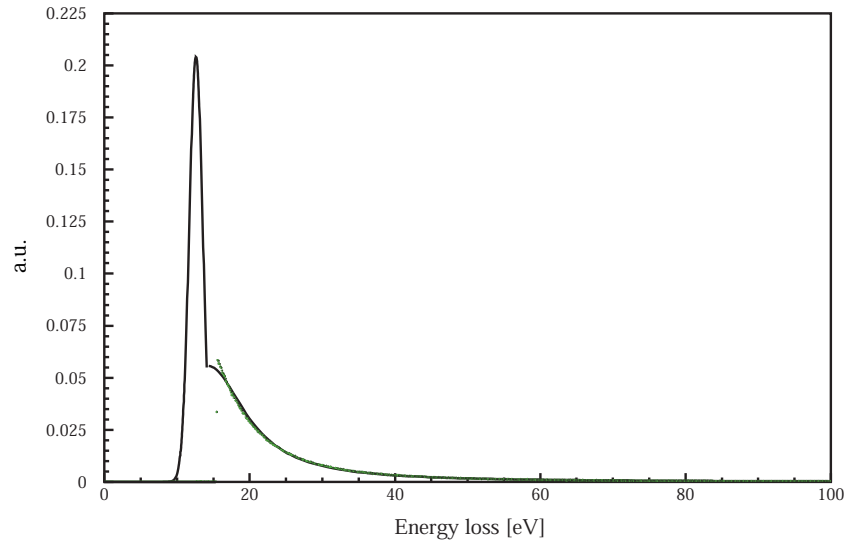


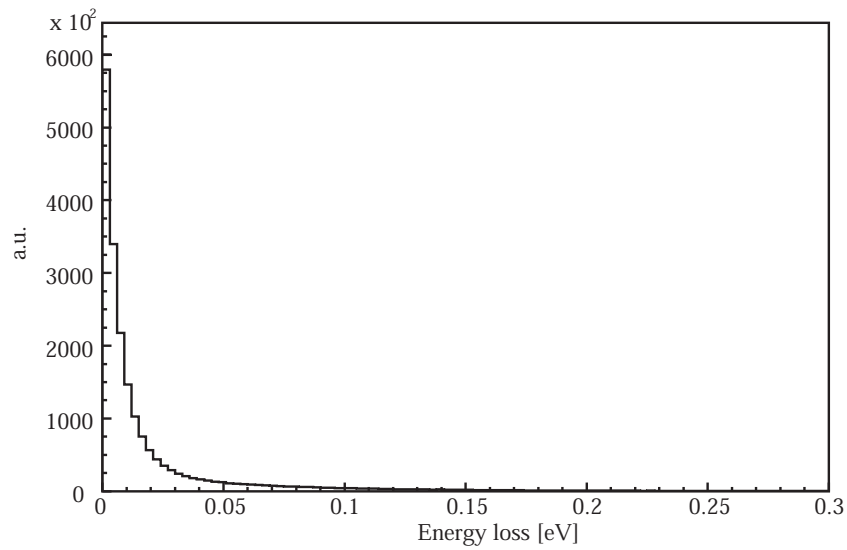
Abbildung 6.3: Vergleich der simulierten Winkelverteilungen von an Wasserstoff elastisch und inelastisch gestreuten 25keV-Elektronen mit experimentellen Daten [Gei64]. Die rote Kurve stellt die in **ADIPARK** simulierte elastische Streuung dar, die blaue Kurve zeigt die Anregung des  $H_2$ -Moleküls und die grüne Kurve zeigt die Ionisation.

gut überein und deckt sich mit den Modellen (1a) und (3). Abbildung 6.3 enthält Messdaten zur inelastischen Streuung für einen Energieverlust von  $\Delta E = 12.6 \text{ eV}$  (Kreuze). Ein derartiger Energieverlust liegt im Bereich der Anregung (vgl. Diskussion von Abb. 6.1). Der in **ADIPARK** berechnete differentielle Wirkungsquerschnitt für die Anregung, hier in Form der blauen Kurve dargestellt, ist etwas größer als die experimentellen Daten und die theoretische Kurve. Das liegt daran, dass in **ADIPARK** zusätzlich zu den Anregungen der B- und C-Vibrationsbanden noch die Zustände der dissoziativen Anregung berücksichtigt worden sind (vgl. Abschnitt 6.1.1). Ergänzend ist in grün der differentielle Wirkungsquerschnitt für Ionisationsprozesse eingezeichnet.

Ist der Streuwinkel den differentiellen Wirkungsquerschnitten entsprechend korrekt berechnet worden, so kann der Energieverlust aus diesem bestimmt werden. Für die inelastischen Streuprozesse sollte er das gemessene Spektrum aus Abbildung 6.1 reproduzieren. Für Elektronen in einem Primärenergiebereich von 0 bis 20 keV wurde in Schritten von 1 eV mit Hilfe der in **ADIPARK** implementierten Simulation der Streuprozesse für jeden Wert der Primärenergie der Energieverlust 100mal gewürfelt und histogrammiert. Für den Vergleich des in [As00] gemessenen Energieverlustspektrums mit dem in **ADIPARK** simulierten Spektrum wurde letzteres im Bereich der Ionisation ( $\Delta E \geq 15 \text{ eV}$ ) auf die Fläche des gemessenen Spektrums normiert (siehe Abb. 6.4 (a)). Beide Spektren stimmen in diesem Bereich bis auf eine kleine Ab-



(a) Inelastische Streuung



(b) Elastische Streuung

**Abbildung 6.4: Energieverlustspektren für elastische und inelastische Streuung** (a) Vergleich des simulierten Ionisations-Energieverlustspektrums (grüne Linie) mit experimentellen Daten (schwarze Linie). (b) Simuliertes Energieverlustspektrum für elastische Streuung.



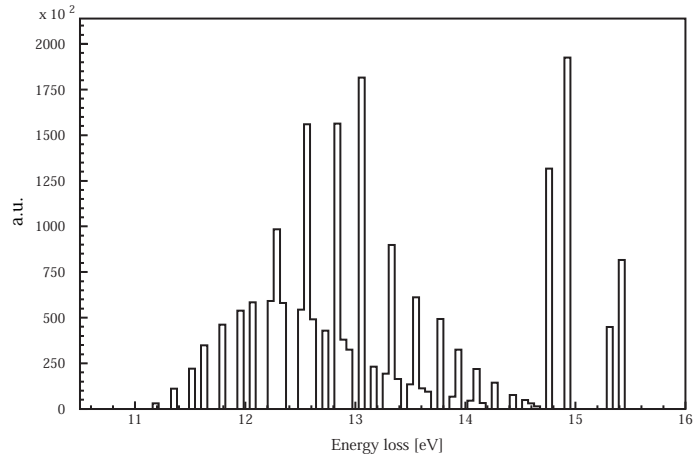
weichung im Bereich des Übergangs von Anregung zu Ionisation bei  $\Delta E \approx 15$  eV überein.

Aufgrund der Tatsache, dass im Anregungsfall die angeregten Zustände diskret in **ADIPARK** implementiert worden sind, kann für diesen Teil des Spektrums eine Flächennormierung nicht sinnvoll vorgenommen werden. Der Anregungspeak wurde stattdessen mit höherer Auflösung untersucht. In [Gei64] ist die Messung des Energieverlustspektrums mit einem Auflösungsvermögen von 0.04 eV beschrieben. Ein Vergleich des mit **ADIPARK** simulierten Anregungsspektrums mit dem gemessenen Spektrum (vgl. Abb. 6.5) zeigt, dass die Position der einzelnen Peaks gut wiedergegeben werden. Zusätzlich finden sich in der Simulation die dissoziativ angeregten Zustände.

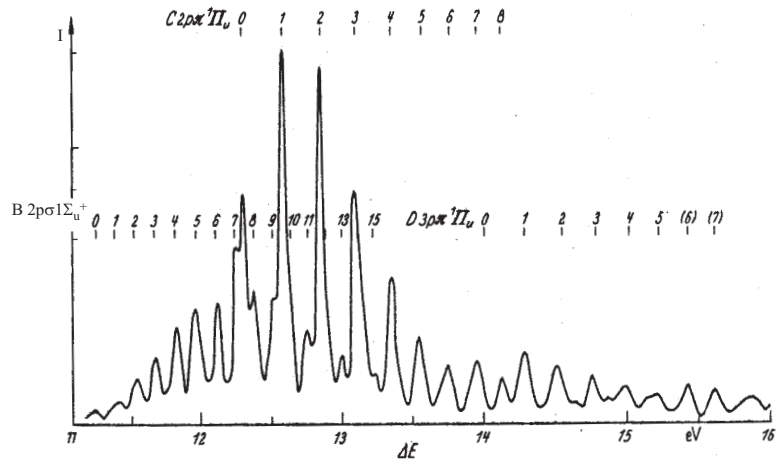
Abbildung 6.4 (b) zeigt das Energieverlustspektrum für elastische Streuung. Es wird deutlich, dass der Energieverlust bei elastischer Streuung im Vergleich zur inelastischen Streuung erwartungsgemäß sehr gering ist. Der Energieübertrag des gestreuten Elektrons an den Kern ist äußerst klein, da dessen Masse gegenüber der Elektronenmasse sehr groß ist. Trotzdem kann elastische Streuung in unserem Fall über die Transformation von Energie in die Zyklotronenergie und anschließende Abstrahlung über Synchrotronstrahlung indirekt zu großen Energieverlusten führen.

Wie bereits erwähnt, sind Energieverlust und Streuwinkel  $\theta_{sc}$  korreliert. Experimentell sind Energieverlust und Streuwinkel für die Streuung von 25 keV-Elektronen an molekularem Wasserstoff in einem Winkelbereich von  $\theta_{sc} = 1^\circ$  bis  $10^\circ$  bestimmt worden [U174]. Die Korrelation von Energieverlust und Streuwinkel wurde getestet, indem für Elektronen mit einer Primärenergie von  $E_P = 25$  keV der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt in einem schmalen Winkelbereich um die in [U174] gemessenen Streuwinkel simuliert wurde. In Abbildung 6.6 ist der gemessene doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von Energieverlust und Streuwinkel dargestellt. Abbildung 6.6 (a) umfasst Streuwinkel von  $\theta_{sc} = 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 7^\circ$  und  $10^\circ$ . Farbig ist der mit **ADIPARK** simulierte doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt aufgetragen. Bis auf kleine Abweichungen reproduzieren die simulierten Daten die gemessenen Spektren. Da die Anregung bei einem Energieverlust von  $\Delta E \sim 13$  eV bei  $\theta_{sc} = 3^\circ$  aufgrund der großen Intensität in dieser Darstellung nicht zu sehen ist, werden Resonanzanregung und Ionisationskontinuum separat in Abb. 6.6 (b) für  $\theta_{sc} = 1^\circ$  und  $2^\circ$  angegeben. Die Korrelation zwischen Streuwinkel und Energieverlust wird auch hier durch **ADIPARK** gut wiedergegeben, obwohl die Parametrisierung dieses Zusammenhangs unterhalb von  $\Delta E = 70$  eV außerordentlich schwierig ist.

Die hier durchgeführten Tests der in **ADIPARK** implementierten Streuprozesse zeigen, dass eine Untersuchung der mit den Streuprozessen verbundenen Kühlmechanismen mit Hilfe des von F. Glück entwickelten Moduls möglich ist.

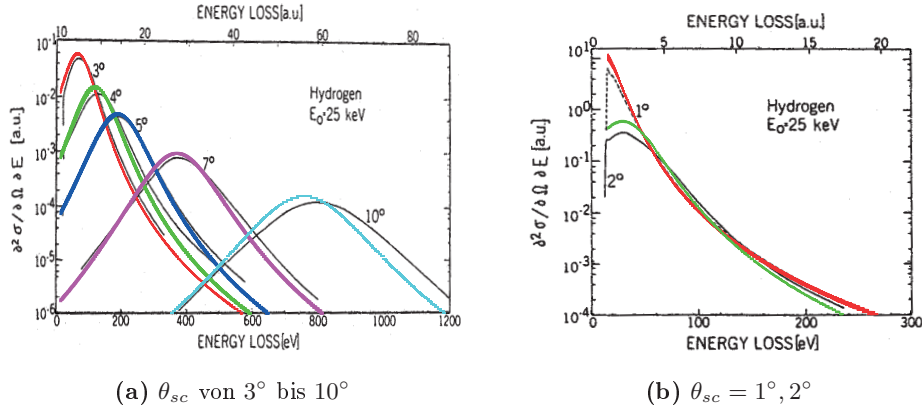


(a) Simuliertes Energieverlustspektrum



(b) Gemessenes Energieverlustspektrum [Gei64]

**Abbildung 6.5: Energieverlustspektrum von 25 keV-Elektronen nach dem Durchgang durch Wasserstoff.** (a) zeigt mit **ADIPARK** simulierte Daten der Molekülanregung. In (b) ist das mit einer Auflösung von ca. 0.04 eV gemessene Anregungsspektrum dargestellt.



**Abbildung 6.6:** Doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von Energieverlust und Streuwinkel für die Streuung von 25 keV-Elektronen an  $H_2$  [UI74]. Der Streuwinkelbereich von  $\theta_{sc} = 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 7^\circ$  und  $10^\circ$  ist in (a) aufgetragen. Farblich ist der mit **ADIPARK** simulierte doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt dargestellt. Die Intensität im Resonanzpeak ist unter  $\theta_{sc} = 3^\circ$  zu groß, um in diesem Graph dargestellt werden zu können. (b) zeigt die Resonanzanregung bei einem Energieverlust von  $\Delta E \sim 13$  eV und das Ionisationskontinuum unter  $\theta_{sc} = 1^\circ$  und  $2^\circ$ .



## Kapitel 7

# Simulationsergebnisse

Wie in Kapitel 5 ausführlich dargelegt worden ist, führt die Synchrotronstrahlung leider nicht zu einer vollständigen Kühlung der zwischen Vor- und Hauptspektrometer gespeicherten Elektronen. Eine weitere Möglichkeit, die kinetische Energie dieser Elektronen zu reduzieren, sind Stöße mit Restgasmolekülen, wobei die dabei auftretende Stoßionisation eine Erhöhung des Untergrundes am Detektor zur Folge haben kann. Um diesen zweiten Kühlmechanismus untersuchen zu können, ist **ADIPARK** um einen Programmteil erweitert worden, welcher die Simulation von an  $\text{H}_2$ -Molekülen streuenden Elektronen erlaubt. Dieses Programmmodul wurde im vorigen Kapitel vorgestellt. Mit dessen Hilfe ist der Zusammenhang zwischen der Zeitkonstanten der Elektronenkühlung und den gewählten Startparametern, wie Startposition und Startwinkel untersucht worden. Eine weitere wichtige Frage ist, wo die durch Ionisation erzeugten Sekundärelektronen entstehen, da ihr Entstehungsort über das dort vorherrschende elektrische Potential ihre kinetische Energie und damit ihr weiteres Ionisationsverhalten maßgeblich beeinflusst.

In diesem Kapitel sollen nun die mit der erweiterten **ADIPARK**-Version erstellten Simulationsergebnisse präsentiert und diskutiert werden.

Simuliert wurden die Elektronen ausgehend von einem Vakuumdruck  $p = 1 \cdot 10^{-10}$  mbar. Aufgrund der enormen Rechenzeit sind Synchrotronstrahlung und Elektronstreuung verstärkt worden, indem sowohl der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung als auch der Druck  $p$  um einen Faktor  $10^5$  erhöht worden sind. Eine Verstärkung beider Effekte um den gleichen Faktor ist wichtig, da somit nur eine Skalierung der Zeitachse vorgenommen wird. Bei einer Verstärkung um verschiedene Faktoren, ist der zeitliche Verlauf der einzelnen Vorgänge nicht mehr nachvollziehbar. Bei KATRIN soll letztlich ein Enddruck von  $p = 1 \cdot 10^{-11}$  mbar erreicht werden. Dieser Wert verlangt eine Verstärkung um eine Größenordnung mehr. In diesem Fall wird die Synchrotronstrahlung allerdings so stark erhöht, dass bestimmte Phänomene, wie die Speicherung von Elektronen in lokalen Fallen, nicht sichtbar werden, da die Zeitkonstante der Synchrotronstrahlung dann kleiner als die Flugzeit durch die Falle ist.

Um der statistischen Natur der Streuprozesse gerecht zu werden, ist jedes Teilchen mehrfach simuliert worden. Da eine einzelne Berechnung mehrere Stunden in Anspruch nimmt, konnte aus Zeitgründen jedes Teilchen lediglich 10 mal berechnet

werden. Der Zufallsgenerator war so konfiguriert, dass bei einem Neustart des Programms immer die gleiche Sequenz von Zufallszahlen reproduziert wurde. Somit konnte die gleiche Stoßabfolge unter veränderten Bedingungen betrachtet werden.

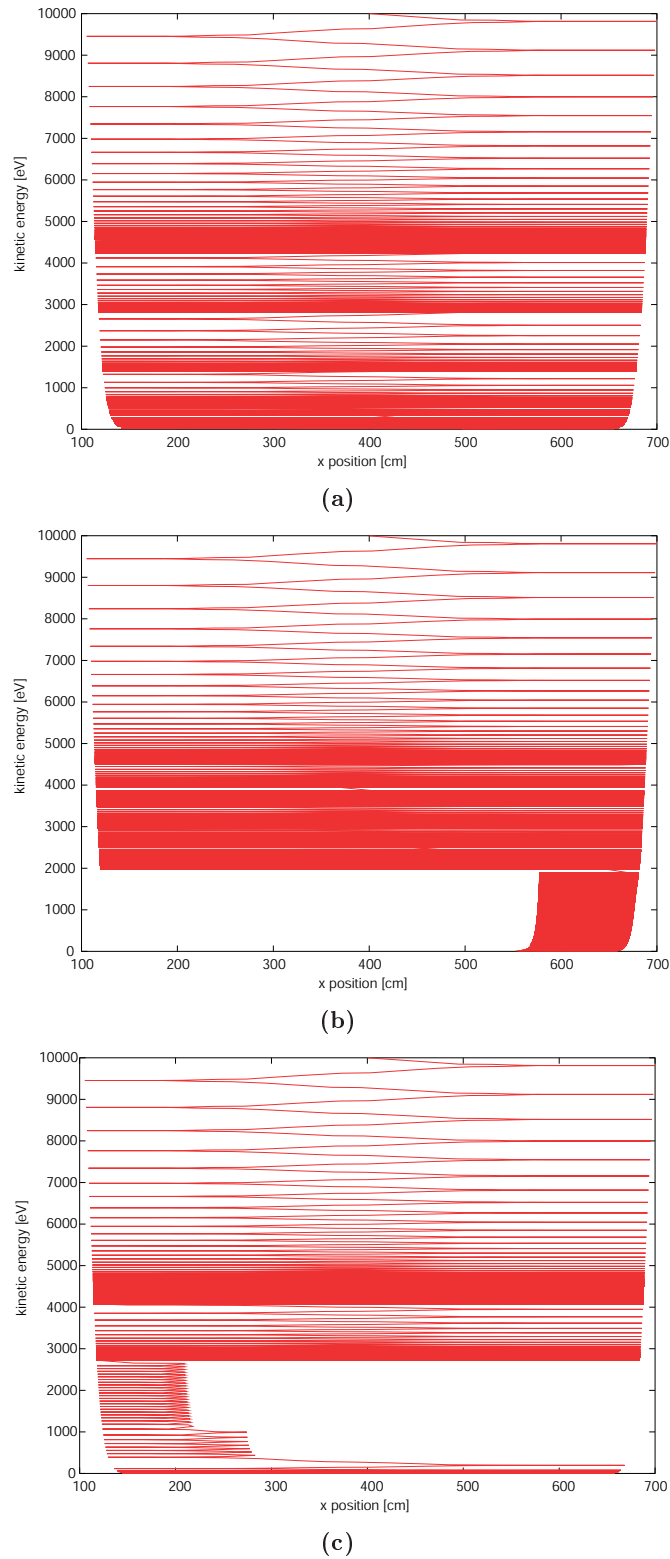
Den beiden beteiligten Prozessen entsprechend, kann man den Kühlmechanismus in zwei Komponenten zerlegen: Die Synchrotronabstrahlung und die Stöße. Besonders deutlich wird dieser Sachverhalt, wenn man den Verlauf der kinetischen Energie der simulierten Elektronen mit dem Ort  $x$  entlang der Symmetrieachse betrachtet (siehe Abb. 7.1). Am Anfang erkennt man die gleichmäßige Abstrahlung der kinetischen Energie aufgrund von Synchrotronstrahlung. Dieser Prozess geht dann in Sättigung, wenn die Energie aus der Zyklotronbewegung vollständig abgestrahlt worden ist. Das Teilchen kann dann viele Reflexionen durchlaufen ohne nennenswert Energie zu verlieren. Dies ändert sich nach einem Stoß. Da bei einem Stoß der Winkel des Teilchens zur Magnetfeldlinie verändert wird, ist die Energie in der Zyklotronbewegung nun nicht mehr Null. Dieser Energiebetrag wird nun wiederum komplett abgestrahlt. Bis zum nächsten Stoß geschieht dann wieder fast nichts usw. Hat ein gespeichertes Elektron den Großteil seiner kinetischen Energie verloren, so kann es zum einen weiterhin das komplette System aus Spektrometern und Transportsystem durchlaufen bis es vollständig gekühlt ist (siehe Abb. 7.1 (a)). Es kann aber auch über magnetische Spiegel in lokalen Fallen gefangen werden (vgl. Abb. 7.1 (b) und (c)). Da sich das Magnetfeld über das gesamte System um mehrere Größenordnungen ändert, beeinflusst der Ort, an dem sich das Teilchen befindet, maßgeblich den Betrag der über Synchrotronstrahlung abgegebenen Energie. Ein Elektron, welches das hohe Magnetfeld des Transportsystem von Anfang bis Ende durchläuft, wird über Synchrotronstrahlung schneller gekühlt als Teilchen, die sich die meiste Zeit im niedrigen Magnetfeld der Spektrometer aufhalten. Auch für den Entstehungsort der Ionisationsprodukte ist es wichtig, wo sich die sie erzeugenden Teilchen zum Zeitpunkt der Ionisation befinden (siehe Abschnitt 7.4).

Die einzelnen Bilder in Abbildung 7.1 stammen von drei verschiedenen Simulationen, wobei die Startparameter des Teilchens identisch waren. Die statistische Natur der Stoßprozesse führt also dazu, dass der Kühlmechanismus ein und desselben Teilchens durchaus unterschiedlich in seiner Charakteristik sein kann.

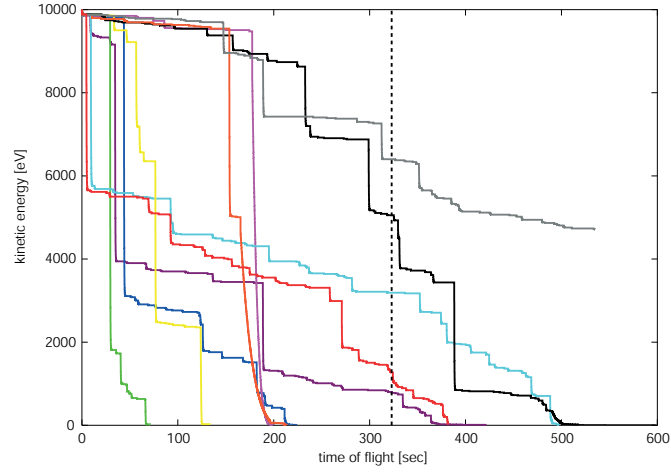
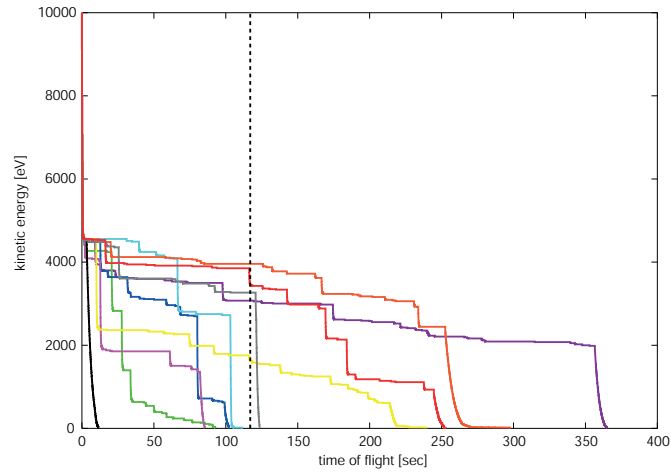
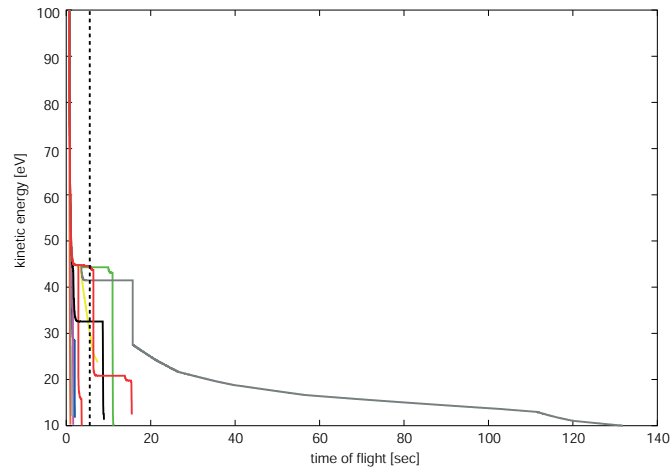
## 7.1 Untersuchung der Winkelabhängigkeit des Kühlmechanismus

Zunächst soll überprüft werden, wie die Kühlung der gespeicherten Elektronen vom Startwinkel  $\theta_S$  abhängt. Dazu ist die in Kapitel 5.3 ausschließlich mit Synchrotronabstrahlung durchgeführte Berechnung unter Einbeziehung der Streuprozesse wiederholt worden. Da es sich bei der Streuung von Elektronen um einen statistischen Prozess handelt, ist jedes Teilchen 10 mal simuliert worden. Eine Beschränkung auf die Startwinkel  $\theta_S = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$  war leider nicht vermeidbar, da eine Untersuchung des gesamten Startwinkelbereichs analog zu Kapitel 5.3 im zeitlichen Rahmen dieser Arbeit nicht mehr möglich war.

Wichtige Informationen bezüglich des Kühlverhaltens erhält man, wenn man die Abnahme der kinetischen Energie über die Flugzeit der Teilchen aufträgt (siehe Ab-



**Abbildung 7.1:** Verlauf der kinetischen Energie mit dem Ort  $x$  entlang der Symmetriachse. Aufgrund der Winkeländerung bei einem Stoßprozess können die Elektronen auch lokal innerhalb des kompletten Systems gespeichert werden. In Kombination mit der Änderung des Magnetfeldes entlang der  $x$ -Achse um mehrere Größenordnungen, führt das für ein und dasselbe Teilchen auf unterschiedliche Kühlzeiten.

(a)  $\theta_S = 5^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ (b)  $\theta_S = 45^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ (c)  $\theta_S = 85^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ 

**Abbildung 7.2: Zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie für drei verschiedene Startwinkel  $\theta_S$  mit jeweils  $E_{kin} = 10$  keV und  $B(P_1) = 4.5$  T. Die Zeitachse ist wieder um den Faktor  $10^5$  gestreckt worden, um die Verhältnisse bei  $p = 1 \cdot 10^{-10}$  mbar wiederzugeben.**



bildung 7.2). Aus Gründen der Darstellung ist in Abbildung 7.2 (c) der Energiebereich auf Werte bis  $E_{kin} = 100$  eV beschränkt worden.

Auf den ersten Blick erkennt man die durch die Statistik erzeugte Streuung der Kühlzeiten von wenigen Sekunden bis zu einigen hundert Sekunden. Als Mittelwert der erhaltenen Verteilung wird der Median bestimmt. Der Median ist eigentlich nicht der Mittelwert, sondern der mittlere Wert einer geordneten Zahlenmenge, d.h., die Hälfte der Zahlen liegt oberhalb des Medians, die andere Hälfte darunter. Hat die betreffende Verteilung eine ungerade Anzahl von Einträgen, so ist der Median gerade der mittlere Eintrag nach aufsteigender Sortierung der Einträge. Bei einer geraden Anzahl von Einträgen ist der Median gleich dem Mittelwert der beiden mittleren Einträge. Er ist weniger empfindlich auf extreme Werte, als der Mittelwert, was ihn somit zu einem besseren Maß für Verteilungen mit großer Streuung macht. Für symmetrische Verteilungen sind Mittelwert und Median identisch. In Abbildung 7.2 ist der Median jeweils als gestrichelte Linie eingezeichnet.

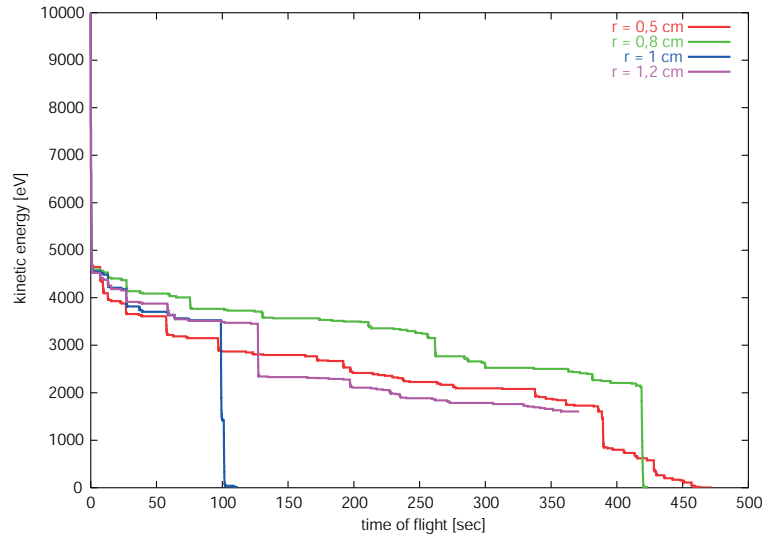
Wie schon im vorherigen Abschnitt ist auch hier die Trennung der beiden beteiligten Kühlmechanismen klar zu erkennen, und zwar nicht nur am steilen Abfall zu Beginn der Simulation, sondern auch an den Stufen im weiteren Verlauf der Berechnung. Zunächst wird die Energie aus der Zyklotronbewegung vollständig abgestrahlt, dann überwiegt die Streuung. Aus Kapitel 5.3 wissen wir, dass unabhängig vom Startwinkel die Zyklotronenergie in weniger als einer Sekunde praktisch vollständig abgestrahlt wird. Da höchstens jede Sekunde ein Stoß stattfindet (siehe Kapitel 6.1), ist dieser Abstrahlungsprozess schon vor dem ersten Stoß beendet. Unter höherem Winkel gestartete Elektronen haben dann weniger Energie, die noch abgegeben werden muss. Deshalb werden diese Teilchen am schnellsten gekühlt.

Ein mit hoher (10 keV) Energie im Transportsystem gestartetes Teilchen benötigt, wenn es einen Startwinkel  $\theta_{sc} = 5^\circ$  hat, im Mittel 320 Sekunden, um vollständig gekühlt zu werden. Bei einem mittleren Startwinkel beträgt die Speicherzeit ca. 120 Sekunden, startet es fast senkrecht zum Magnetfeld reduziert sie sich auf etwa 5 Sekunden. Alle bisher ermittelten Werte müssen um eine Größenordnung erhöht werden, weil der bei KATRIN angestrebte Druck nicht  $p = 10^{-10}$  mbar, sondern  $p = 10^{-11}$  mbar betragen soll.

## 7.2 Zusammenhang zwischen Speicherzeit und dem radialen Abstand zur x-Achse am Startpunkt des Teilchens

Wie in Kapitel 5.3 ist auch für die Kombination aus Synchrotronstrahlung und Streuung die Abhängigkeit der Speicherzeit von der radialen Startposition des Teilchens untersucht worden. Im Gegensatz zur Untersuchung der Winkelabhängigkeit ist hier für jede radiale Startposition das Teilchen nur einmal simuliert worden. Allerdings sind die verschiedenen Teilchen jeweils mit der selben Sequenz von Zufallszahlen berechnet worden.

Anders als bei der Untersuchung ohne Stoßprozesse, ist hier eine Abhängigkeit vom Radius erkennbar. Das liegt zum einen daran, dass für zunehmenden Abstand von der Symmetrieachse, ein wenig mehr Energie durch Synchrotronstrahlung abgestrahlt

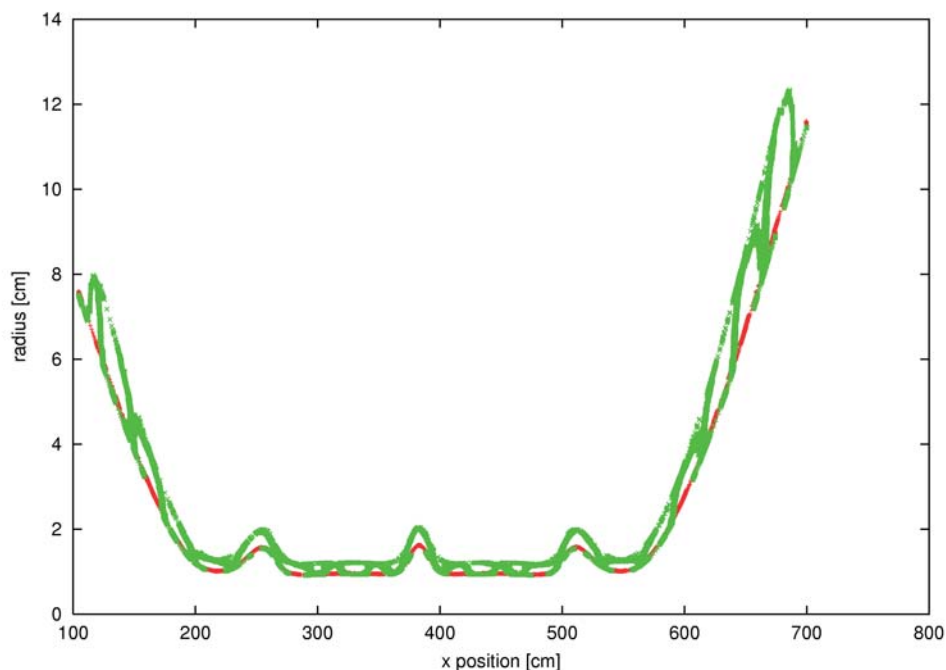


**Abbildung 7.3:** Zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie für verschiedene radiale Startpositionen.

wird (vgl. Abb. 5.8). Desweiteren führt schon eine Änderung des Radius im Transportsystem um einige Millimeter zu einer Radiusänderung im Zentimeterbereich im Spektrometer. Die für die Stöße relevanten Ausgangsparameter unterscheiden sich also für die verschiedenen Radien, so dass auch bei gleicher Abfolge von Zufallszahlen, die Stoßprozesse nicht gleich verlaufen. Es ist aber zu erwarten, dass bei der Simulation von mehr als einem Teilchen pro Radius die Unterschiede wieder auswaschen würden.

### 7.3 Test der Numerik

Die Qualität der Simulation lässt sich anhand der numerischen Fehler beurteilen. Ein wichtiger Test der Numerik ist die Abweichung des Elektrons von der führenden Magnetfeldlinie. In **ADIPARK** sind keinerlei Effekte implementiert, die es einem Teilchen erlauben, die Führungslinie zu verlassen. Somit ist jegliche Abweichung von der Sollbahn auf numerische Fehler zurückzuführen. Aus Abbildung 7.2 wird deutlich, dass die  $5^\circ$ -Elektronen am längsten simuliert werden. Ungenauigkeiten in der Numerik werden sich also dort am deutlichsten auswirken. Trägt man den radialen Abstand  $r$  von der Symmetrieachse  $x$  gegen  $x$  auf, so wird die Magnetfeldlinie nachgezeichnet, die das gespeicherte Elektron führt. In Abbildung 7.4 ist in rot die Bahn eines Teilchens zu sehen, die ausgezeichnet mit der Sollbahn übereinstimmt, wohingegen bei der grünen Bahn deutliche Abweichungen zu erkennen sind. Im ersten Fall ist das gespeicherte Teilchen nach 70 Sekunden gekühlt, das zweite Elektron benötigt dazu 500 Sekunden. Bei langen Simulationen wachsen die numerischen Fehler also auf ein beträchtliches Maß an, ist die Rechenzeit gering, sind sie vernachlässigbar klein. Besonders bei der Beurteilung von Bahnen lange gespeicherter Teilchen sollte man diese Tatsache berücksichtigen. Wenn man in Zukunft sehr lange Speicherzeiten berechnen will, sollte die Bahnverfolgung von Runge–Kutta 2. Ordnung auf die ge-



**Abbildung 7.4: Radialer Abstand von der Symmetrieachse  $x$  für ein  $5^\circ$ -Elektron.** Die rote Bahn stammt von einem Elektron mit relativ kurzer Speicherzeit (ca. 70 Sekunden), die grüne von einem lange gespeicherten Teilchen (500 Sekunden). Die numerischen Fehler wirken sich erst nach langer Rechenzeit aus.

nauere 4. Ordnung umgestellt werden, die sich schon bei dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Programm **Lorentz3D** (siehe Abschnitt 4.3) bewährt hat.

## 7.4 Lokalisierung der Ionisationsprozesse

Mit Bestimmung der Speicherzeiten und Simulation der Elektronstreuung an den Restgasmolekülen ist das Verhalten der in der Penningfalle gespeicherten primären Elektronen verstanden. Der nächste Schritt ist nun die Untersuchung des Verhaltens der bei der Ionisation eines  $H_2$ -Moleküls entstehenden sekundären Teilchen und damit ihre Auswirkungen auf den Untergrund. Jedes Mal, wenn ein Stoß stattfindet, wird in **ADIPARK** die Art des Stoßprozesses, Ort und Zeitpunkt, an dem der Stoß stattfindet und Energieverlust und Streuwinkel des Primärelektrons protokolliert. Die Sekundärelektronen werden mehrheitlich mit geringer kinetischer Energie erzeugt (siehe Abb. 6.5). Werden diese im niedrigen Potential des Transportsystems „geboren“, so bleiben sie niederenergetisch. Die Chance für eine weitere Ionisation ist dann äußerst gering, da der Ionisationswirkungsquerschnitt für niedrige Energien sehr klein ist (vgl. Abb. 6.2), beträgt die kinetische Energie der Sekundärelektronen weniger als die Ionisationsenergie des  $H_2$ -Moleküls, ist keine Ionisation mehr mög-

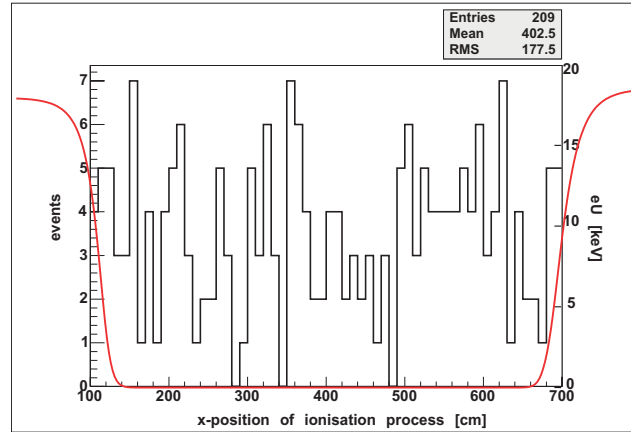
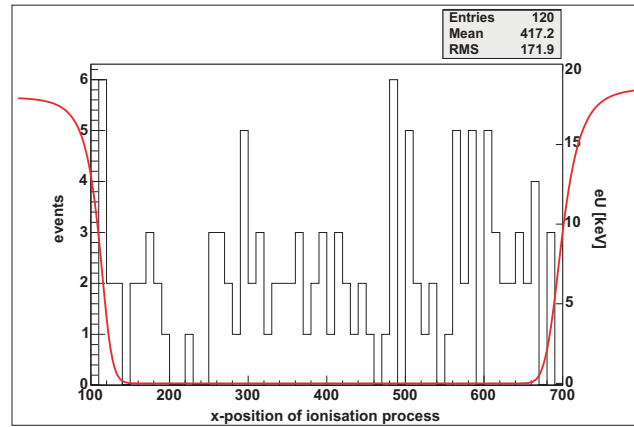
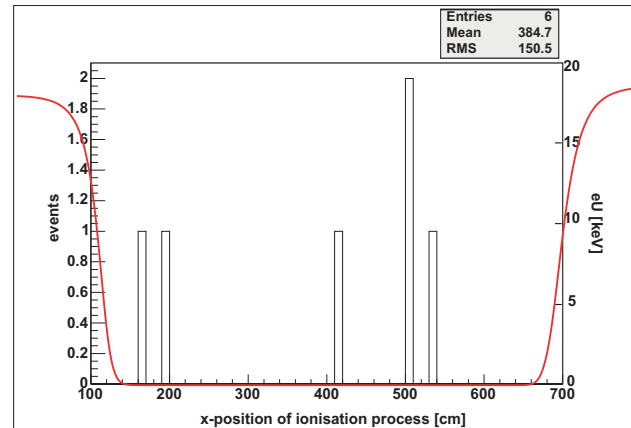
lich. Die elastische Streuung ist hier die dominierende Wechselwirkung, sorgt aber lediglich für eine Winkeländerung der Primärelektronen. Entstehen die Sekundärelektronen jedoch im hohen Potential der Spektrometer, gewinnen sie durch Hinablaufen des Potentialberges zusätzlich Energie von maximal  $E_{kin} = eU_{ret}$ , mit  $U_{ret}$  dem Retardierungspotential. Weitere Ionisationsprozesse sind dann sogar mehrfach möglich, so dass diese Kettenreaktion zu einer Aufladung der Penningfalle führen kann.

Um beurteilen zu können, wie schwerwiegend sich die Sekundärelektronen auf die Erhöhung des Untergrundes auswirken, ist es also wichtig, ihre Entstehungsorte, insbesondere ihr Entstehungspotential, zu kennen. Für die in Abschnitt 7.1 berechneten je 10 Teilchen ist die Position entlang der Symmetrieachse, an der Ionisation stattgefunden hat, histogrammiert worden. Diese Häufigkeitsverteilung (siehe Abb. 7.5) zeigt, dass die Ionisationsprozesse nahezu gleichverteilt innerhalb der Penningfalle stattfinden. Das bedeutet gleichzeitig, dass die meisten Sekundärelektronen im Transportsystem erzeugt werden, da die Strecke, die die Primärelektronen innerhalb der Spektrometer zurücklegen deutlich kürzer ist, als die dazwischen. Die Gesamtzahl der Ionisationen nimmt mit zunehmenden Winkel ab, weil wie in Abb. 7.2 gezeigt ist, die Speicherzeit dann um einiges geringer ist. Da jedes Histogramm mit der kompletten Stichprobe von 10 Teilchen erstellt worden ist, muss die Gesamtzahl der Ionisationsprozesse um diesen Faktor reduziert werden. Nach Abbildung 7.5 (a) und Abbildung 7.2 (a) erzeugt dann ein  $5^\circ$ -Elektron im Mittel 21 Sekundärelektronen in 320 Sekunden, d.h. 4 Sekundärelektronen pro Minute. Umgerechnet auf die realen Druckverhältnisse von  $p = 1 \cdot 10^{-11}$  mbar ergibt sich die Rate der Sekundärelektronen zu 0.4 pro Minute. Die rote Kurve in Abb. 7.5 stellt das elektrische Potential entlang der Teilchenbahn dar. Es lässt sich damit schon abschätzen, wo und wie viele Sekundärelektronen entstehen, die im weiteren Verlauf genug Energie besitzen, um ihrerseits wieder ionisieren zu können.

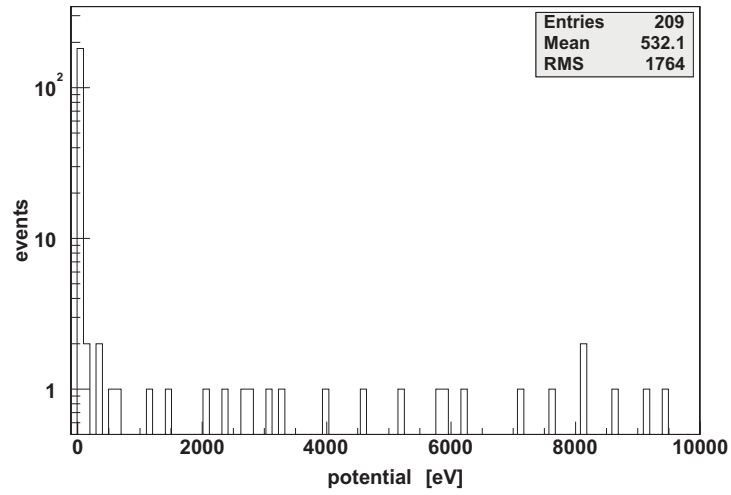
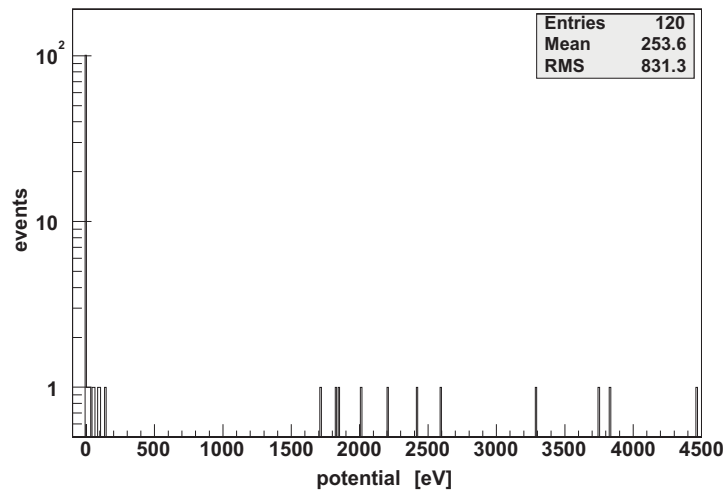
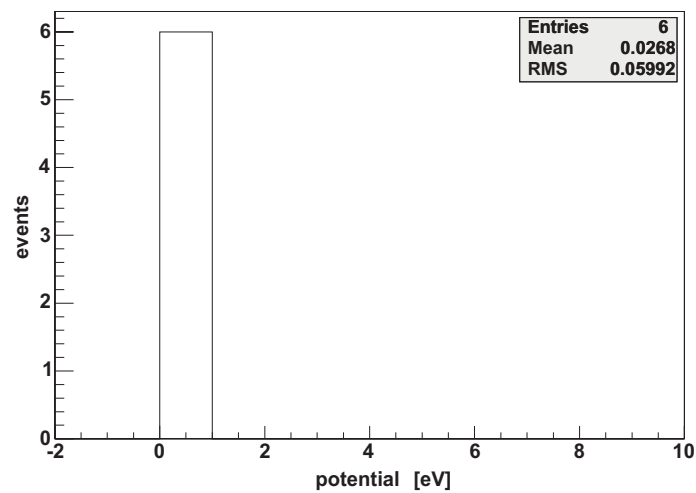
Die Anzahl der erzeugten Sekundärelektronen im hohen Potential ist eine kritische Größe für die Einordnung der Penningfalle in die Untergrundproblematik. Wenn jedes Elektron mehr als ein weiteres Sekundärelektron produziert, wird sich die Penningfalle in einer Kettenreaktion mit gespeicherten Teilchen füllen, da jedes dieser Sekundärelektronen genug Energie besitzt, um seinerseits wieder ionisieren zu können usw. Nur wenn die Zahl unterhalb von Eins liegt, wird die Teilchenerzeugung irgendwann zum Stillstand kommen. In Abbildung 7.6 ist die Anzahl der Ionisationen für obige Teilchen über das im System vorherrschende Potential histogrammiert worden. Das  $5^\circ$ -Elektron erzeugt ca. 2 bis 3 ionisationsfähige Sekundärelektronen, das  $45^\circ$ -Elektron ungefähr eins. Nur Elektronen mit hohem Startwinkel produzieren ausschließlich Elektronen, deren Energie unterhalb der Ionisationsenergie des Wasserstoffmoleküls ( $E_{ion} = 15.4$  eV) liegt.

Die Sekundärelektronen werden selbst nicht direkt zum Untergrund beitragen, da sie dazu das Retardierungspotential des Hauptspektrometers überwinden müssten. Da Ionisation nach Abbildung 5.3 stattfindet, nachdem die Zyklotronenergie vollständig abgestrahlt worden ist, ist es so gut wie unmöglich, Sekundärelektronen mit Energien  $E_{kin} > \text{einige keV}$  zu erzeugen (siehe auch Abb. 7.6).

Allerdings wird die Teilchenfalle in der oben beschriebenen Kettenreaktion nicht nur mit Elektronen, sondern auch mit Ionen angereichert. Deren positive Ladung beschleunigt ungefähr die Hälfte von ihnen ins Hauptspektrometer. Aufgrund des großen Zyklotronradius der Ionen und des elektrischen Felddurchgriffs werden sie

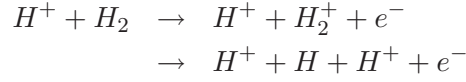
(a)  $\theta_S = 5^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ (b)  $\theta_S = 45^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ (c)  $\theta_S = 85^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ 

**Abbildung 7.5: Häufigkeitsverteilung der Ionisationsorte entlang der x-Achse.** Aufgrund der gleichverteilten Ionisationsorte entstehen die meisten Sekundärelektronen im elektrisch feldfreien Raum innerhalb des Transportsystems. Die Histogramme sind jeweils mit allen 10 Teilchen einer Probe erstellt worden. Deshalb muss die Anzahl der Ionisationen dementsprechend reduziert werden. Ein  $5^\circ$ -Elektron erzeugt im Mittel 21 Sekundärelektronen (siehe Text), für die höheren Winkel sind es entsprechend weniger. Zusätzlich ist das elektrische Potential entlang der x-Achse aufgetragen.

(a)  $\theta_S = 5^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ (b)  $\theta_S = 45^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ (c)  $\theta_S = 85^\circ$  bei  $P_1 = (400\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$ 

**Abbildung 7.6:** Anzahl der Ionisationen bei gegebenem Potential eU. Die meisten Sekundärelektronen entstehen auf Nullpotential. Ein  $5^\circ$ -Elektron erzeugt aber zwischen 2 und 3 Sekundärelektronen in hohem Potential, ein  $45^\circ$ -Elektron immerhin noch ungefähr eins.

nicht gespeichert, sondern auf eine Spektrometerwand gelenkt [Fla03]. Trotzdem besteht eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass die Ionen bis dahin sekundäre Elektronen durch einen Stoßprozess erzeugen. Diese Streuwahrscheinlichkeit lässt sich leicht abschätzen: Der Wirkungsquerschnitt für die Reaktionen



ist  $\sigma \approx 10^{-17} \text{cm}^2$ . Mit einer Teilchenzahldichte  $N$  von  $N = 3 \cdot 10^5 \text{cm}^3$  bei einem Druck von  $p = 10^{-11} \text{mbar}$  und einer Gesamtlänge  $l$  des Hauptspektrometers von  $l = 2000 \text{cm}$  ergibt sich die Streuwahrscheinlichkeit  $P$  zu

$$P = l \cdot \sigma \cdot N = 6 \cdot 10^{-9}. \quad (7.1)$$

Dieser Prozess wird also nur kritisch, wenn das Hauptspektrometer in einer Kettenreaktion mit Ionen gefüllt wird. Eine weitere detaillierte Untersuchung dieses Sachverhaltes ist dringend erforderlich. Der Impuls der Sekundärelektronen ist zunächst beliebig im Raum orientiert, allerdings führt die Synchrotronabstrahlung dazu, dass nach ca. einer Sekunde ausschließlich Energie in der Bewegung des Führungszentrums vorhanden ist (vgl. Abschnitt 5.3). Nach Abbildung 7.6 lassen sich die im hohen Potential erzeugten Sekundärelektronen anhand ihrer kinetischen Energie  $E_{kin}$  in drei Kategorien einordnen: Elektronen mit einer Energie von einigen hundert eV,  $E_{kin} \approx 1 \text{keV}$  und  $E_{kin}$  einige keV. Um ihr Ionisationspotential zu untersuchen, können diese verschiedenen Arten von Sekundärelektronen mit **ADIPARK** simuliert werden, indem man Elektronen mit entsprechenden Energien und flachem Startwinkel im Transportsystem startet und verfolgt. Ebenso sind Simulationen zum Verhalten der bei der Ionisation entstehenden Ionen nötig. Dazu müssten in **ADIPARK** allerdings zunächst die relevanten Wechselwirkungen implementiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit ist das leider aus Zeitgründen nicht mehr möglich.

## 7.5 Aktives Entfernen der gespeicherten Elektronen mittels $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift

Wie die vorherigen Abschnitte zeigen, benötigen die in der Penningfalle gespeicherten Teilchen eine Zeitspanne in der Größenordnung von 1000 Sekunden, um vollständig zu kühlen. Innerhalb dieser Zeitspanne kann ein einzelnes Elektron oft genug mit dem Restgas wechselwirken, um zu ionisieren und die damit zusammenhängenden Untergrundprozesse auszulösen. Die Hoffnung, die Speicherzeiten mittels des passiven Kühlmechanismus zu verringern, hat sich leider nicht erfüllt. Zusätzlich sind die Ionisationsprozesse derart, dass in einer Kettenreaktion Teilchen in die Penningfalle eingefüllt werden. In einem ersten Schritt kann man versuchen, die Anzahl der zwischen den Spektrometern gespeicherten Elektronen aktiv zu entfernen. Schlägt dies fehl, muss man die Ionen selbst beseitigen, und zwar möglichst bevor sie ionisieren. Die gekoppelte Bewegung aus axialer, Magnetron- und Zyklotronbewegung kann durch ein senkrecht zur Symmetrieachse angelegtes elektrisches Dipolfeld angeregt werden. Ein solches Dipolfeld bewirkt eine zusätzliche  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift und diese letztlich

eine Vergrößerung des Radius der Magnetronbewegung. Dadurch wird die Bewegung des Teilchens so gestört, dass es gegen eine Elektrode oder Wand fliegt und aus dem Speichervolumen verschwindet.

Das KATRIN-Vorspektrometer ist mit Dipolelektroden ausgestattet, um im Vorspektrometer gespeicherte Elektronen und Ionen zu entfernen. Die  $\beta$ -Zerfallselektronen aus der Tritiumquelle, die in das Vorspektrometer eindringen, erzeugen einige Elektron-Ionen-Paare pro Sekunde aufgrund von Stößen mit dem Restgas. Während die sekundären Elektronen mit hoher Wahrscheinlichkeit aus dem Vorspektrometer in Richtung Quelle herausbeschleunigt werden, werden die so entstandenen Ionen im Magnetfeld gefangen und oszillieren im attraktiven Potential der Mittelebene. Mit der Zeit verlieren sie kinetische Energie durch Ionisation oder Ladungsaustausch und sammeln sich im Zentrum des Vorspektrometers. Im Gegensatz zu den bisherigen Spektrometern in Mainz und Troitsk und zum KATRIN Hauptspektrometer können, aufgrund des hohen Magnetfeldes von  $B = 250$  Gauss in der Analysierebene, Ionen im Vorspektrometer gespeichert werden. Die Sekundärelektronen tragen nicht direkt zum Untergrund bei, da sie das Hauptspektrometer nicht passieren können. Allerdings reichern sie die Penningfalle zwischen Vor- und Hauptspektrometer an. Deshalb wird das Vorspektrometer periodisch mittels Dipolen von diesen Teilchen gereinigt.

Es wurde nun untersucht, ob man mit den Dipolen im Vorspektrometer auch die zwischen den Spektrometern gespeicherten Teilchen entfernen kann. Da die Einführung von Dipolen die Zylindersymmetrie der elektrischen Potentialkarten aufbricht, ist zu diesem Zweck eine neue dreidimensionale Potentialkarte erstellt worden. Um die maximal erlaubte Größe von 500 MB nicht zu überschreiten, wird das Hauptspektrometer durch eine einzige Elektrode simuliert, die die Reflexion der Elektronen garantiert. Desweiteren wird ein vereinfachtes Transportsystem bestehend aus nur zwei Spektrometermagneten verwendet. Als Dipol wurden die beiden hinteren konisch zulaufenden Elektroden E2 des Vorspektrometers gewählt (siehe Abb. 7.7). Simuliert wurden im Transportsystem bei  $x = 230\text{ cm}$  mit  $B = 5.6\text{ T}$  und im Vorspektrometer bei  $x = 100\text{ cm}$  mit  $B = 910$  Gauss erzeugte Elektronen (siehe Abb. 7.8). Letztere wurden in Abhängigkeit vom Radius in einem Potential  $U$  zwischen  $-17616\text{ V}$  und  $-17785\text{ V}$  gestartet. Alle Teilchen sind jeweils unter drei Startwinkeln  $\theta_S = 5^\circ, 45^\circ, 85^\circ$  mit zunehmendem Abstand von der x-Achse und verschiedenen Startenergien  $E_S$  berechnet worden.

Zunächst wurde ein Dipol mit einer Potentialdifferenz  $U_{dipol} = 2\text{ kV}$  angenommen. Mit dieser Dipolkonfiguration konnte kein einziges der simulierten Teilchen aus der Penningfalle entfernt werden. Auch eine Erhöhung auf  $U_{dipol} = 10\text{ kV}$  brachte kein positives Ergebnis. Erst bei einer Verstärkung des Dipols auf  $U_{dipol} = 20\text{ kV}$  wurden im Vorspektrometer entstandene Elektronen beseitigt.

Betrachtet man die simulierten Teilchenbahnen, so stellt man fest, dass für in der Mitte des Transportsystems bei  $P = (230\text{ cm}, 1\text{ cm}, 0\text{ cm})$  gestartete Elektronen eine Energie von  $E_S = 1\text{ keV}$  nicht ausreicht, um weit genug ins Vorspektrometer eindringen zu können (siehe Abb. 7.8 (a)). Somit merken diese Teilchen gar nichts vom eingeschalteten Dipolfeld. Auch eine Erhöhung der Dipolspannung  $U_{dipol}$  ändert nichts an dieser Tatsache, da die Elektronen durch die Erdblende, in Abb. 7.8 in schwarz zu sehen, abgeschirmt werden. Somit lässt sich festhalten, dass alle niederenergetischen Elektronen unabhängig von der Stärke des Dipolfeldes nicht aus dem



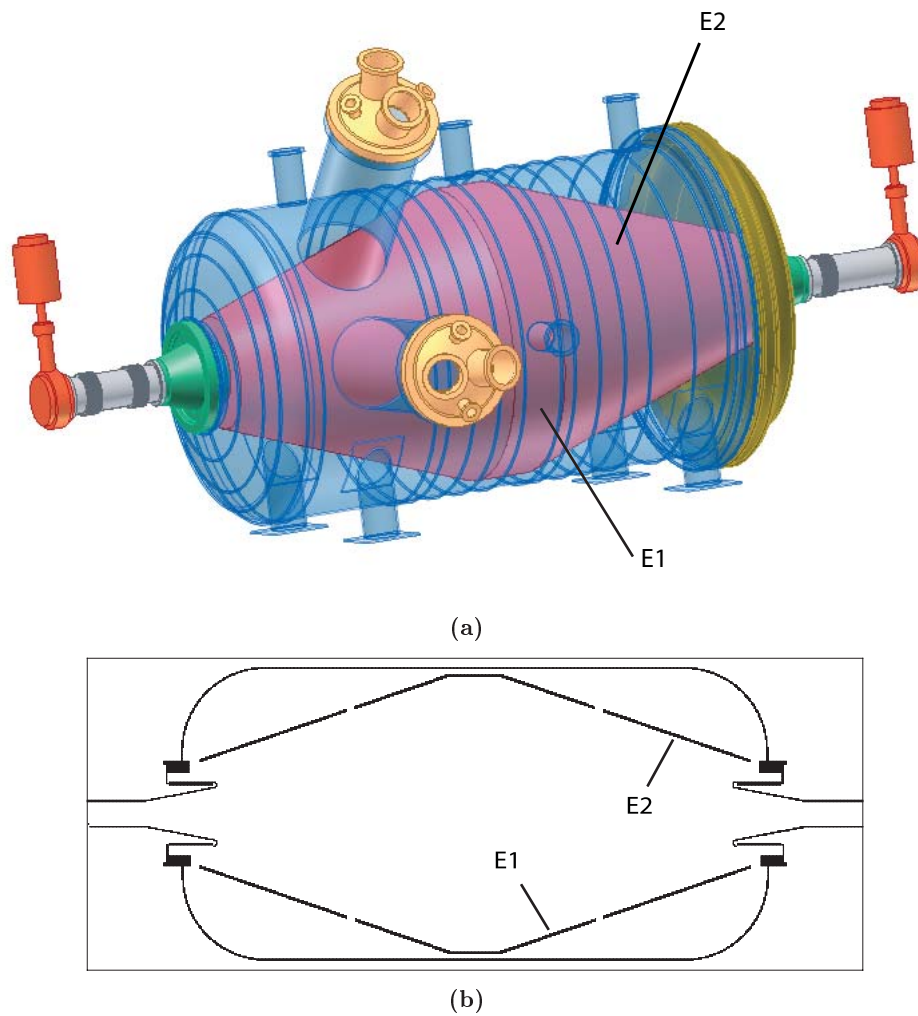
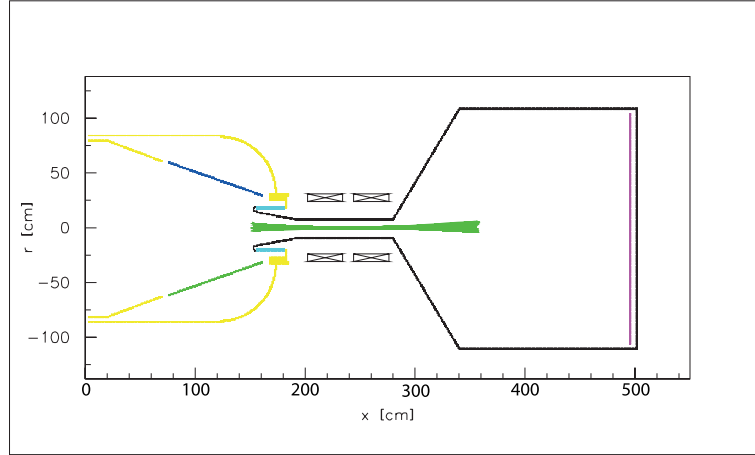
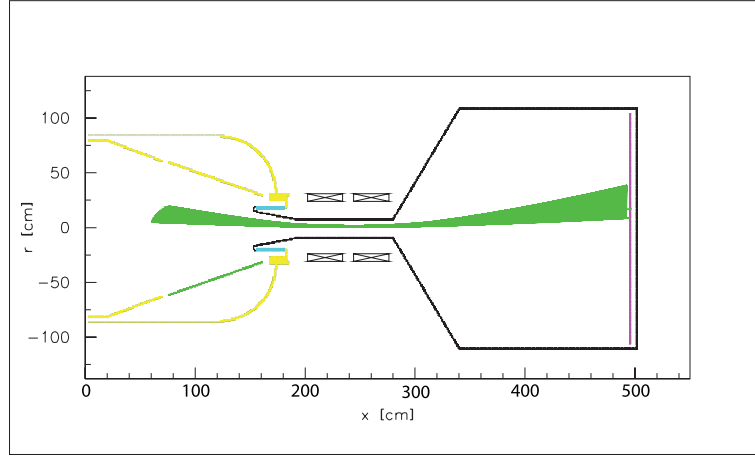


Abbildung 7.7: Dreidimensionale Zeichnung und Querschnitt des Vorspektrometertanks inklusive Dipolelektroden E1 und E2.



(a)  $P = (230\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$  unter  $\theta_S = 5^\circ$  bei  $E_S = 1\text{keV}$

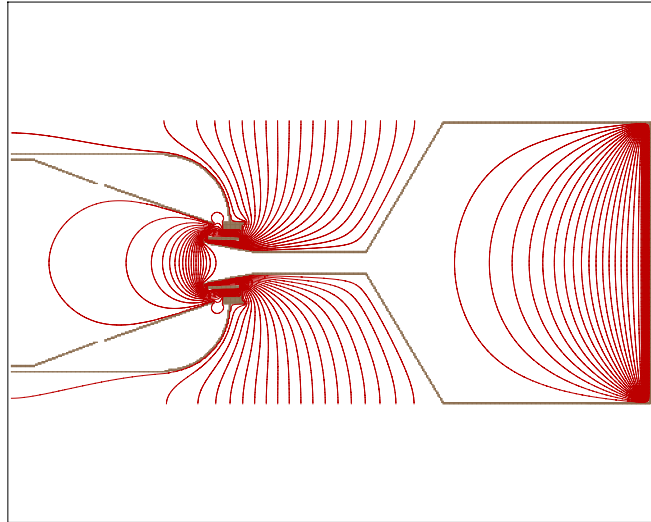


(b)  $P = (230\text{cm}, 1\text{cm}, 0\text{cm})$  unter  $\theta_S = 5^\circ$  bei  $E_S = 18\text{keV}$

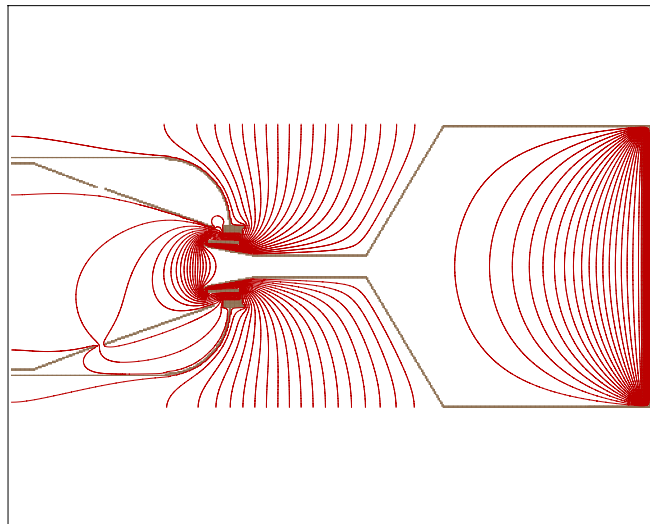
**Abbildung 7.8: Teilchenbahnen von in der Mitte des Transportsystems gestarteteten Elektronen.** Elektronen mit wenig Startenergie können nicht tief genug ins Spektrometer eindringen (a), während hochenergetische Teilchen bis in das Dipolfeld fliegen.

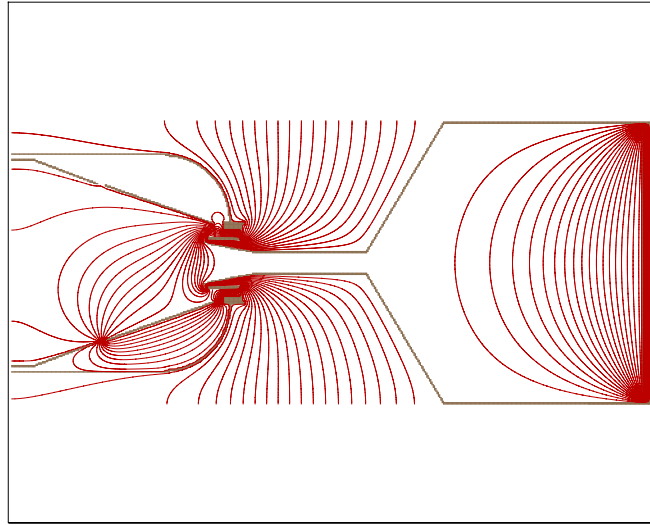
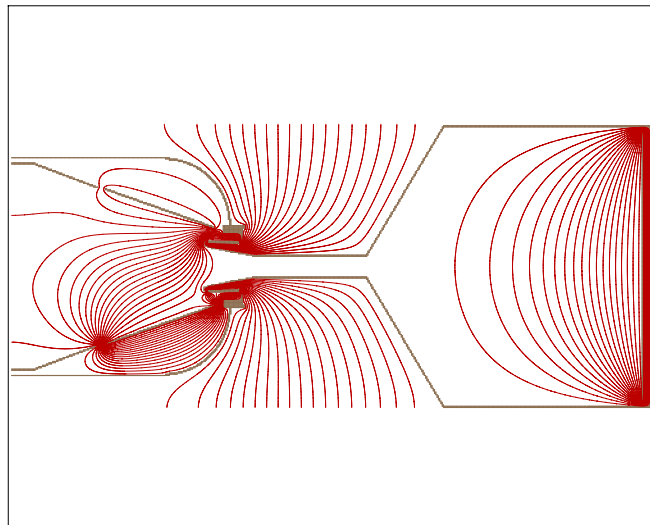
Transportsystem beseitigt werden können.

Hochenergetische Elektronen mit  $E_S = 18\text{keV}$  können durchaus weit in das Vorspektrometer eindringen (siehe Abb. 7.8 (b)), werden aber bei  $U_{dipol} = 2\text{kV}$  dennoch nicht entfernt. Ebenso ist es mit allen im Spektrometer erzeugten Teilchen. Der Grund ist, dass die Stärke des Dipolfeldes nicht ausreicht. Der Dipol verzerrt das zylindersymmetrische elektrische Feld im Vorspektrometer (siehe Abb. 7.9). Dadurch entsteht die zusätzliche  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift, die die Elektronen Richtung Elektrode beschleunigt. Das elektrische Feld entspricht dem Gradienten des Potentials, deshalb ist in Abbildung 7.9 das Feld umso größer, je enger die Äquipotentiallinien beieinander liegen. Man erkennt, dass in Abb. 7.9 (b) und (c) das elektrische Feld entlang der Symmetrieachse größer ist, als das in Richtung Dipolelektrode. Deshalb können die Elektronen hier nicht entfernt werden. Erst in Abb. 7.9 (d) ist das elektrische Feld senkrecht zur Symmetrieachse groß genug, um eine ausreichende Störung der



(a) kein Dipol

(b)  $U_{\text{dipol}} = 2 \text{ kV}$

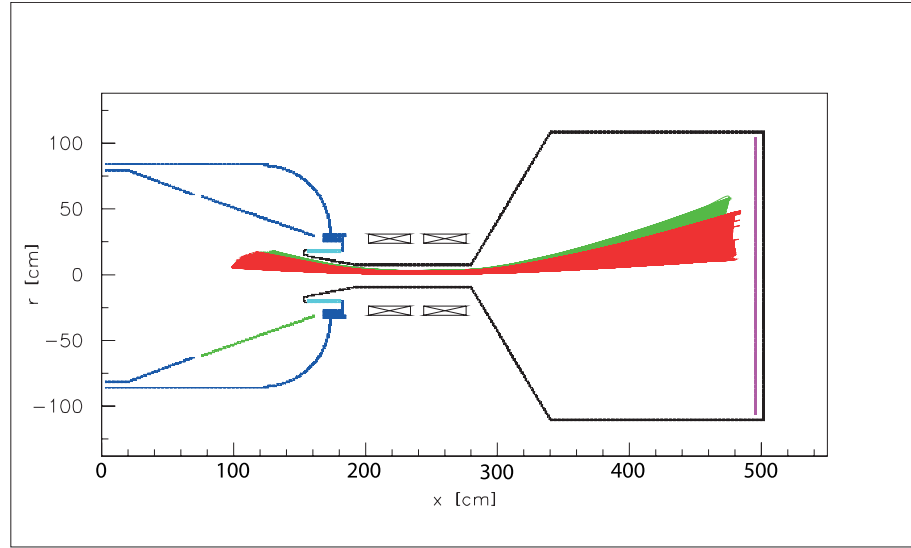
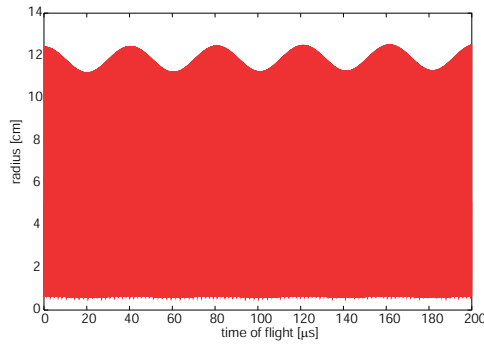
(c)  $U_{\text{dipol}} = 10 \text{ kV}$ (d)  $U_{\text{dipol}} = 20 \text{ kV}$ 

**Abbildung 7.9: Äquipotentiallinien im KATRIN–Vorspektrometer mit und ohne Dipol.** Man erkennt deutlich die Deformation des elektrischen Feldes durch den Dipol ((b) bis (d)) im Vergleich zum Feld ohne Dipol (a). Der hohe Feldgradient am Ausgang des Vorspektrometers bewirkt, dass eine Spannung von  $U_{\text{dipol}} = 20 \text{ kV}$  erforderlich ist, um gespeicherte Elektronen entfernen zu können.

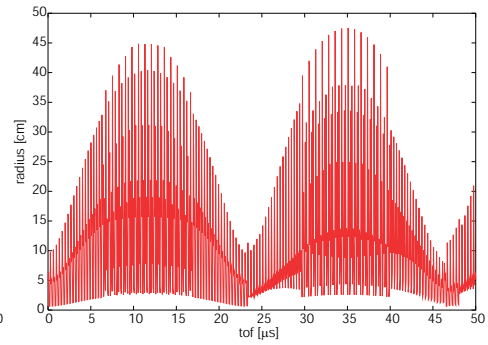
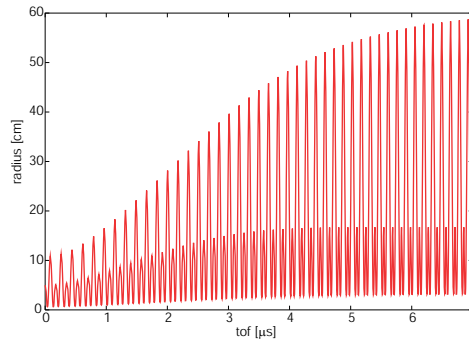
Teilchenbahn bewirken zu können.

Für innerhalb des Vorspektrometers gestartete Elektronen ist die Voraussetzung bis in das Dipolfeld einzudringen per se erfüllt. Das bedeutet, dass das Kriterium für eine Beseitigung dieser Elektronen allein die Stärke des Dipolfeldes ist. Abbildung 7.10 (a) zeigt die Flugbahn zweier Vorspektrometer-Elektronen, wobei eines (rot) in einem Dipolfeld von  $U_{dipol} = 10\text{ kV}$  und das andere (grün) von  $U_{dipol} = 20\text{ kV}$  simuliert worden ist. Das Elektron im 20 kV-Dipolfeld stößt auf die Erdblende und ist aus dem Speichervolumen verschwunden, das Elektron im niedrigeren Dipolfeld wird nicht bis zur Wand abgelenkt. Besser zeigen dieses Verhalten Abbildungen 7.10 (c) und (d). Hier ist der Radius der Teilchenbahn gegen die Flugzeit aufgetragen. Im hohen Dipolfeld (d) ist der Radius innerhalb von  $7\text{ }\mu\text{s}$  auf ca. 60 cm angewachsen, während für  $U_{dipol} = 10\text{ kV}$  der Radius periodisch schnell auf ca. 50 cm steigt, sich dann allerdings wieder verringert. Ohne Dipol (Abb. 7.10 (b)) bleibt der Radius weitgehend konstant. Die hochfrequente Änderung des Radius kommt hierbei durch die Änderung der Flussschlauchbreite während eines Durchlaufs durch das komplette System aus Vorspektrometer, Transportsystem und Hauptspektrometer zustande. Es existiert also ein Effekt, der die Ablenkung des Elektrons durch den Dipol bis zu einem gewissen Grad kompensiert. Die Stabilisierung der Teilchenbahn kann man sich ähnlich wie bei der Präzession eines Kreisel vorstellen: Das Führungszentrum einer Teilchenbahn vollführt eine Magnetronbewegung um die Symmetrieachse (vgl. Abb. 3.1). Im zylindersymmetrischen elektrischen Feld ohne Dipol ist diese Bewegung stabil. Schaltet man einen Dipol dazu, so wirkt eine Kraft senkrecht zur Symmetrieachse (= Drehachse). Diese Kraft bewirkt ein Drehmoment und somit eine Drehung der Symmetrieachse. Das Vorhandensein der Magnetronbewegung führt also dazu, dass das Elektron trotz des Dipols weiterhin auf einer stabilen Bahn läuft. Die Stabilisierung gelingt aber nur, solange die durch das Dipolfeld erzeugte Drehimpulsänderung klein ist gegenüber dem Drehimpuls in der Magnetronbewegung. Das bedeutet, dass ab einer gewissen Stärke des Dipolfeldes die Magnetronbewegung nicht mehr schnell genug ist, um die  $\vec{E} \times \vec{B}$ -Drift zu kompensieren.

Ein Dipol mit einer Spannung in der Größenordnung  $U_{dipol} = 20\text{ kV}$  ist im KATRIN Experiment nicht einsetzbar, weil er zu heftigen Entladungen innerhalb des Vorspektrometers führen würde. Eine Reinigung des Vorspektrometers von den Elektronen aus der Penningfalle ist auf diese Weise also nicht möglich. In diesem Zusammenhang müssen alternative Konzepte entwickelt werden. Was die Ionen betrifft, so zeigen Simulationen [Fla03], dass diese beseitigt werden können, wenn man die Vorspektrometerelektroden E1 und E2 als Dipol schaltet und mit einer Dipolspannung von  $U_{dipol} = 4\text{ kV}$  belegt.

(a)  $P = (100\text{cm}, 5\text{cm}, 0\text{cm})$  unter  $\theta_S = 45^\circ$  bei  $E_S = 100\text{ eV}$ 

(b) kein Dipol

(c)  $U_{\text{dipol}} = 10\text{ kV}$ (d)  $U_{\text{dipol}} = 20\text{ kV}$ 

**Abbildung 7.10: Bahn und Radius zweier Vorspektrometer-Elektronen.** Im Gegensatz zum Dipol mit einer Dipolspannung von  $U_{\text{dipol}} = 20\text{ kV}$  (grün) wird das bei  $U_{\text{dipol}} = 10\text{ kV}$  gestartete Elektron (rot) nicht über den Dipol entfernt (a). Die vom Dipol erzeugte Verzerrung des elektrischen Feldes bewirkt eine Vergrößerung des Radius der Magnetronbewegung (c) und (d), wobei erst ab einer gewissen Größe der Dipolspannung ( $U_{\text{dipol}} = 20\text{ kV}$ ) die Stabilisierung der Störung der Teilchenbahn aufgehoben wird.

## Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Für eine hoch präzise Bestimmung der Neutrinomasse mit einer Sensitivität im Sub-eV-Bereich ist die Kenntnis aller Untergrundprozesse von ausschlaggebender Bedeutung. Die hintereinander geschalteten MAC-E-Filter, die zur Analyse des Tritium- $\beta$ -Spektrums verwendet werden, bieten ideale Bedingungen für die Speicherung von Elektronen. Ein Beitrag zum Untergrund sind folglich Elektronen, die durch diese Penningfalle eingefangen werden. Die Erhöhung des Untergrunds geschieht dabei nicht durch die gespeicherten Elektronen selbst, sondern durch die in Ionisationsprozessen mit Restgasmolekülen erzeugten Elektronen und Ionen. Der Entstehungsort der Ionisationsprodukte ist wegen der Potentialverhältnisse innerhalb und zwischen den Spektrometern das entscheidende Kriterium dafür, ob die Sekundärteilchen entscheidend zum Untergrund beitragen oder als eher harmlos eingestuft werden können. Die Energie der erzeugten Elektronen aus der Ionisation selbst beträgt in der Regel nur einige eV, kann sich aber auf einige keV erhöhen, falls sie im hohen Potential der Spektrometer entstehen. Sie können dann ihrerseits wieder Ionisationen auslösen, in denen wiederum Sekundärteilchen erzeugt werden. Die bei der Ionisation freigesetzten Ionen werden aufgrund ihrer positiven Ladung zum Teil ins Hauptspektrometer beschleunigt, und dort zur Wand gelenkt. Kommt es in dieser kurzen Zeit zu einem Ionisationsprozess, so entstehen Elektronen, die den Potentialwall des Hauptspektrometers leicht Richtung Detektor überwinden und praktisch nicht von den primär im  $\beta$ -Zerfall erzeugten Elektronen unterschieden werden können und somit den Untergrund erhöhen. Die elastische Streuung der Elektronen sowie die Stoßanregung der  $H_2$ -Moleküle haben lediglich einen Energieverlust und eine Richtungsänderung der gespeicherten Teilchen zur Folge und tragen somit nicht zum Untergrund, wohl aber zur Kühlung der generierten Elektronen bei.

Die Charakteristik einer Penningfalle ist eine inhärente Eigenschaft derart angeordneter MAC-E-Filter, und folglich lässt sich die Speicherung negativ geladener Teilchen zwischen den Spektrometern nicht vermeiden. Deshalb liegt das Hauptaugenmerk darauf, die Ionisation des Restgases durch gespeicherte Teilchen zu minimieren, wenn nicht gar zu vermeiden. Dies kann nur gelingen, wenn man entweder die kinetische Energie schnell durch Kühleffekte wie Synchrotronstrahlung oder Stöße auf ein Maß reduziert, welches keine Ionisation mehr zulässt, oder die Teilchen aktiv entfernt.

Im Rahmen dieser Arbeit ist zunächst eine Routine zur Berechnung der Synchrotronstrahlung in die Computerprogramme **SIMION** und **ADIPARK** eingebaut worden. Testsimulationen liefern übereinstimmende Ergebnisse von beiden Programmen. Das kommerzielle **SIMION** berechnet zwar die volle dreidimensionale Teilchenbewegung, wird aber durch das Hinzufügen eines Synchrotron-Benutzerprogramms sehr langsam. Die systematische Bahnverfolgung einer großen Menge an Teilchen ist deshalb nicht möglich, so dass nur für ausgewählte Vergleiche mit **ADIPARK** komplette Teilchenbahnen verfolgt worden sind. Der mit **SIMION** mitgelieferte Editor wurde allerdings zur Erstellung der elektrischen Potentialkarten verwendet.

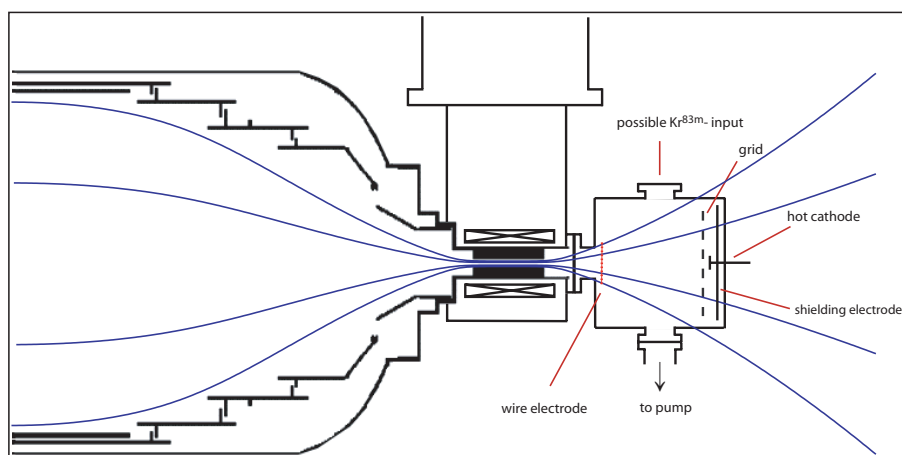
**ADIPARK** berechnet Teilchenbahnen auf der Grundlage der adiabatischen Näherung inklusive Driftterme 1. Ordnung und wird auch durch die Implementation der Synchrotronstrahlung kaum in seiner Rechenzeit beeinflusst. Dieses Programm wurde somit zur Simulation der gespeicherten Elektronen verwendet.

Die Synchrotronstrahlung kann man in zwei Komponenten aufteilen: Die eine Komponente strahlt Energie aus der Zyklotronbewegung, die andere aus der Bewegung des Führungszentrums. Dabei überwiegt erstere um mehrere Größenordnungen. Wie erwartet findet eine Kühlung der Elektronen statt, bis die komplette Zyklotronenergie abgestrahlt wurde. Dies geschieht unabhängig von den gewählten Startparametern innerhalb einer Sekunde, danach besitzt ein gespeichertes Elektron nur noch kinetische Energie in der Bewegung des Führungszentrums. Wegen der Kleinheit der zu dieser Bewegung gehörenden Abstrahlungskomponente findet dann praktisch keine Kühlung durch Synchrotronstrahlung mehr statt.

Um die Stoßprozesse und deren Auswirkungen auf den zu erwartenden Untergrund bzw. die Kühlung der gespeicherten Elektronen untersuchen zu können, wurde ein von F. Glück entwickeltes Modul in **ADIPARK** implementiert und ausführlich getestet. Dieses berechnet in erster Bornscher Näherung die elastische Streuung der Elektronen, die dissoziative Anregung und die Anregung der B- und C-Vibrationsbanden des  $\text{H}_2$ -Moleküls, sowie den Ionisationsprozess. Als Test dieser Routine sind die totalen Wirkungsquerschnitte, die Winkelverteilungen und die Energieverlustspektren der einzelnen Streuprozesse simuliert und, falls vorhanden, mit experimentellen Daten verglichen worden. Bis auf kleine Abweichungen wegen der Komplexität der zur Beschreibung der Streuung von Elektronen an  $\text{H}_2$ -Molekülen notwendigen Beziehungen, werden die experimentellen Daten gut reproduziert. Eine Richtungsänderung durch elastische Stöße führt zu einer vernachlässigbaren Energieänderung, es kann aber die durch die Richtungsänderung hinzugewonnene Zyklotronenergie über Synchrotronstrahlung abgestrahlt werden, so dass es auf einer Zeitskala von Sekunden indirekt doch zu einem Energieverlust kommt.

Die Simulationen der gespeicherten Elektronen inklusive Streuung führt im Mittel auf Speicherzeiten im Bereich von 1000 Sekunden für einen angenommenen Restgasdruck von  $p = 10^{-11}$  mbar. Die Ionisationsprozesse sind dabei gleichmäßig über die Teilchenbahn verteilt, so dass die meisten Sekundärelektronen im elektrisch feldfreien Raum des Transportsystems mit einer kinetischen Energie von wenigen eV entstehen und folglich keine weiteren Ionisationsprozesse auslösen. Sekundärelektronen, die im hohen elektrischen Feld der Spektrometer gebildet werden, gewinnen durch Hinablaufen des Potentialberges genug kinetische Energie, um ihrerseits Resgasmoleküle ionisieren zu können. Im Falle eines mehrere tausend Sekunden gespeicherten Elektrons erzeugt dieses 2 bis 3 solcher Sekundärelektronen. Für dieses Beispiel verläuft





**Abbildung 8.1: Vorschlag eines Testaufbaus am Mainzer Tritium- $\beta$ -Experiment** Ein speziell entwickelter evakuierbarer Tank ersetzt das KATRIN-Vorspektrometer. Gezielt eingelassene Elektronen werden über eine Drahtelektrode am Tankausgang abgeführt.

der Vervielfältigungsprozess also in einer Kettenreaktion und reichert die Penningfalle mit Teilchen an. Das bedeutet, dass die Ionisationsprozesse nicht, wie man vermuten könnte, mit der Zeit „aussterben“, sondern sogar zunehmen. Dann werden auch immer mehr Ionen gebildet, welche die eigentlich für den Untergrund relevanten Prozesse auslösen. Genaue Untersuchungen, ob tatsächlich eine Kettenreaktion und damit eine Aufladung der Penningfalle einsetzt, konnten im Rahmen dieser Arbeit wegen des Umfangs der dazu notwendigen Simulationen nicht mehr durchgeführt werden.

Um die langen Speicherzeiten zu reduzieren und das System aus Vorspektrometer, Transportsystem und Hauptspektrometer von gespeicherten Teilchen zu reinigen, bietet sich der Einsatz von Dipolelektroden innerhalb der Spektrometer an. Deshalb wurden Elektronen in einer Elektrodenkonfiguration simuliert, in der die vom Transportsystem aus gesehen erste Vorspektrometerelektrode als Dipol geschaltet war. Elektronen aus dem Transportsystem benötigen viel kinetische Energie, um weit genug in das Vorspektrometer und damit das Dipolfeld einzudringen, d.h., erst ab einer bestimmten kinetischen Energie besteht überhaupt die Chance, Elektronen aus dem Transportsystem über den Dipol zu beseitigen. Im Vorspektrometer gestartete Teilchen werden praktisch im Dipolfeld „geboren“. Dennoch zeigen die Simulationen, dass eine Dipolspannung in der Größenordnung  $U_{dipol} = 20 \text{ kV}$  nötig ist, um diese und einige Elektronen aus dem Transportsystem zu entfernen. Wegen der starken Entladungen bei so hohen Spannungen, ist der Einsatz von Dipolelektroden zur Beseitigung der gespeicherten Elektronen zwar prinzipiell möglich, aber praktisch nicht realisierbar.

Ein zum Dipol alternatives Konzept ist die mechanische Beseitigung der gespeicherten Teilchen mittels einer Drahtkonstruktion, die periodisch durch den Flussschlauch fährt. Testmessungen zur Anwendung dieser Technik könnten am Spektrometer des ehemaligen Mainzer Tritium- $\beta$ -Experiment bzw. am momentan im Aufbau befind-

lichen KATRIN Vorspektrometer durchgeführt werden. Abbildung 8.1 zeigt einen möglichen Aufbau: An der dem Detektor abgewandten Seite des Spektrometers wird ein zusätzlicher Tank angebracht, der das Vorspektrometer simuliert. Mittels einer Turbopumpe wird dieser evakuiert. Über eine Glühkathode werden Elektronen in das System eingebracht und über eine Gitterelektrode Richtung Magnet beschleunigt. Eine zusätzliche Elektrode reflektiert die aus dem Spektrometer kommenden Teilchen. Eine am Ausgang des Tanks angebrachte Drahtelektrode wird periodisch durch den Flussschlauch gefahren und sammelt die gespeicherten Elektronen auf. Der Mechanismus, mit dem diese Elektrode bewegt wird, muss sorgfältig durchdacht sein. Da innerhalb des Tanks Hochvakuum herrscht, sind Mechanismen, die den Einsatz von Schmierölen erfordern, nicht geeignet. Man könnte aber beispielsweise die Tatsache ausnutzen, dass sich die Drahtelektrode im Magnetfeld befindet und sie als stromdurchflossene Leiterschleife bewegen. Der Vergleich der vom Detektor registrierten Zählraten mit und ohne Drahtelektrode gibt Aufschluss darüber, wie effektiv die Elektrode gespeicherte Teilchen entfernen kann. Bei der Konzeption des Tanks sollte ein zusätzliches Ventil eingeplant werden, über das eventuell  $\text{Kr}^{83\text{m}}$  eingelassen werden kann.

Am Mainzer Tritium- $\beta$ -Spektrometer sind Messungen durchgeführt worden, um die Charakteristik von im Spektrometer „geborenen“ und gespeicherten Elektronen zu untersuchen. Dazu wurde das Kryptonisotop  $\text{Kr}^{83\text{m}}$  unter verschiedenen hohen Drücken in das Spektrometer eingelassen.  $\text{Kr}^{83\text{m}}$  zerfällt mit einer Halbwertszeit von 1.86 Stunden durch innere Konversion in das stabile  $\text{Kr}^{83}$ . Die freigesetzten Konversionselektronen wurden mit dem Detektor aufgezeichnet, die Daten befinden sich momentan in der Auswertung. Wenn man es schafft, die Messergebnisse mit **ADIPARK** zu reproduzieren, so erhöht das die Glaubwürdigkeit der bisherigen Simulationen. Allerdings müsste zu diesem Zwecke das Stoßmodul um Stöße von Konversionselektronen mit Heliumatomen erweitert werden, da der Druck künstlich durch den Einlass von Heliumgas verschlechtert wurde.

Eine wichtige, im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführte Erweiterung von **ADIPARK** wäre die Implementierung der Sekundärprozesse, welche letztendlich zu einer Erhöhung des Untergrunds führen. Die Berechnung dieser Phänomene könnte wichtige Erkenntnisse liefern, die eine bessere Einschätzung des tatsächlichen Beitrags zum Untergrund erlauben. Die Kenntnis der Entstehungsorte sowohl der Restgasionen, als auch der Sekundärelektronen könnte wichtige Impulse geben, die die Entwicklung neuer Konzepte zur Teilchenentfernung fördern.

Spätestens mit der Berechnung der Elektronstreuung am Wasserstoffmolekül stößt **ADIPARK** an die Grenzen der Rechengenauigkeit. Die Methode der adiabatischen Näherung ist für Simulationen diesen Umfangs und dieser Präzision nicht ausgelegt. Ein Ausweg ist die Entwicklung eines neuen Programms, aufbauend aus den mit **ADIPARK** gewonnenen Erfahrungen. Dieses Programm sollte die volle dreidimensionale Teilchenbewegung berechnen, basierend auf einer Integrationsroutine, die deutlich genauer arbeitet als das Runge-Kutta-Verfahren in zweiter Ordnung, welches bei **ADIPARK** eingesetzt wird. Das im Rahmen dieser Arbeit zu Testzwecken erstellte Programm **Lorentz3D** könnte hierfür als Grundlage dienen. **Lorentz3D** berechnet schon jetzt die Teilchenbahn als Lösung der vollständigen Bewegungsgleichung in drei Dimensionen unter Verwendung der Runge-Kutta-Methode 4. Ordnung. Ein Übergang zu besseren Routinen, wie Runge-Kutta 8. Ordnung,

ist problemlos möglich. Der momentane Zustand des Programms ist derart, dass durch die Verwendung der Routinen zum Einlesen der Potentialkarten, die bereits in **ADIPARK** zum Einsatz kommen, Teilchenbahnen sowohl in magnetischen, als auch elektrischen Felder berechnet werden können. Allerdings ist nach dem Einbau der elektrischen Potentialkarten die Energieerhaltung durch das Programm nicht mehr exakt gewährleistet. Grund hierfür ist die wegen des endlichen Arbeitsspeicherplatzes und der räumlichen Größe der elektromagnetostatischen Felder im KATRIN Experiment notwendigen Reglementierung der Potentialkartenstützpunkte auf Ortsabstände von mehr als einem Zentimeter. Die Feldauflösung ist angesichts der großen Feldinhomogenität viel zu grob, da letztere eine genaue Bahnverfolgung mit Abstandsintervallen im Sub-Millimeterbereich nötig machen. Dieses Problem könnte durch eine Verbesserung der Einleseroutinen, z.B. durch Glättung der Felder mittels Polynomfits, behoben werden. Danach kann man die Synchrotronstrahlung als einfachen Dämpfungsprozess in die Bewegungsgleichung integrieren. Das Stoßmodul kann aus **ADIPARK** übernommen werden. Damit stünde mit **Lorentz3D** ein auch für weitere Zwecke beliebig ausbaufähiges Präzisionsprogramm für die Bahnverfolgung geladener Teilchen im KATRIN Experiment zur Verfügung.



# Anhang A

## User Program zur Synchrotronabstrahlung

```
;Dieses Programm berechnet die Synchrotronabstrahlung relativistisch korrekt

Define_Adjustable Daempfung 1.93e-7 ;Daempfungskonstante Gamma = 0.2 Hz
Define_Static c 2.99792458e5 ;Lichtgeschwindigkeit

Begin_Segment Accel_Adjust ;Anfang des Accel_Adjust Programmsegments

;Umrechnung von Gauss nach Tesla
Recall Ion_BfieldX_mm ;Aufruf des momentanen B-Feldes in x-Richtung (Gauss)
10000 Divide ;Division durch 10000
Store Ion_BfieldX_T ;Speichern als Ion_BfieldX_T

Recall Ion_BfieldY_mm ;Aufruf des momentanen B-Feldes in y-Richtung (Gauss)
10000 Divide ;Division durch 10000
Store Ion_BfieldY_T ;Speichern als Ion_BfieldY_T

Recall Ion_BfieldZ_mm ;Aufruf des momentanen B-Feldes in z-Richtung (Gauss)
10000 Divide ;Division durch 10000
Store Ion_BfieldZ_T ;Speichern als Ion_BfieldZ_T

;Berechnung des Betrages von B
Recall Ion_BfieldX_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in x-Richtung (Tesla)
Recall Ion_BfieldX_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in x-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere beide Felder
Recall Ion_BfieldY_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in y-Richtung (Tesla)
Recall Ion_BfieldY_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in y-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere beide Felder
Add ;und addiere zum Quadrat von BfieldX_T
Recall Ion_BfieldZ_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in z-Richtung (Tesla)
Recall Ion_BfieldZ_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in z-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere beide Felder
Add ;und addiere zum Quadrat von BfieldX_T und BfieldY_T
Square_Root ;Wurzel aus der Summe der Quadrate
Store B_Betrag ;Speichern als B_Betrag

;Berechnung des Betrages von v_parallel
Recall Ion_Vx_mm ;Aufruf der momentanen x Geschwindigkeit (mm/musec)
Recall Ion_BfieldX_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in x-Richtung (Tesla)
```

```

Multiply ;Multipliziere mit momentaner x Geschwindigkeit
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Divide ;Dividiere durch B_Betrag
Recall Ion_Vy_mm ;Aufruf der momentanen y Geschwindigkeit (mm/musec)
Recall Ion_BfieldY_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in y-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere mit momentaner y Geschwindigkeit
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Divide ;Dividiere durch B_Betrag
Add ;Addiere beide Quotienten
Recall Ion_Vz_mm ;Aufruf der momentanen z Geschwindigkeit (mm/musec)
Recall Ion_BfieldZ_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in z-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere mit momentaner z Geschwindigkeit
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Divide ;Dividiere durch B_Betrag
Add ;Addiere alle drei Quotienten
Store v_par_Betrag ;Speichern als v_par_Betrag

```

```

;Berechnung der Komponenten von v_senkrecht
Recall Ion_Vx_mm ;Aufruf der momentanen x Geschwindigkeit (mm/musec)
Recall v_par_Betrag ;Aufruf von v_par_Betrag
Recall Ion_BfieldX_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in x-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere mit v_par_Betrag
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Divide ;Dividiere durch B_Betrag
Subtract ;und subtrahiere von momentaner x Geschwindigkeit
Store Vx_senk ;Speichern als Vx_senk

```

```

Recall Ion_Vy_mm ;Aufruf der momentanen y Geschwindigkeit (mm/musec)
Recall v_par_Betrag ;Aufruf von v_par_Betrag
Recall Ion_BfieldY_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in y-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere mit v_par_Betrag
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Divide ;Dividiere durch B_Betrag
Subtract ;und subtrahiere von momentaner y Geschwindigkeit
Store Vy_senk ;Speichern als Vy_senk

```

```

Recall Ion_Vz_mm ;Aufruf der momentanen z Geschwindigkeit (mm/musec)
Recall v_par_Betrag ;Aufruf von v_par_Betrag
Recall Ion_BfieldZ_T ;Aufruf des momentanen B-Feldes in z-Richtung (Tesla)
Multiply ;Multipliziere mit v_par_Betrag
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Divide ;Dividiere durch B_Betrag
Subtract ;und subtrahiere von momentaner z Geschwindigkeit
Store Vz_senk ;Speichern als Vz_senk

```

```

;Berechnung von v_senkrecht
Recall Vx_senk ;Aufruf von Vx_senk
Recall Vy_senk ;Aufruf von Vy_senk
Multiply ;Multipliziere beide Geschwindigkeitskomponenten
Recall Vz_senk ;Aufruf von Vz_senk
Recall Vx_senk ;Aufruf von Vx_senk
Multiply ;Multipliziere beide Geschwindigkeitskomponenten
Add ;und addiere sie zum Quadrat von Vx_senk
Recall Vz_senk ;Aufruf von Vz_senk
Recall Vy_senk ;Aufruf von Vy_senk
Multiply ;Multipliziere beide Geschwindigkeitskomponenten
Add ;und addiere sie zum Quadrat von Vx_senk und Vy_senk

```

```

Square_Root ;Wurzel aus der Summe der Quadrate
Store v_senk_Betrag ;Speichern als v_senk_Betrag

;Berechnung von des relativistischen Gamma_Faktors
Recall v_senk_Betrag ;Aufruf von v_senk_Betrag
Recall v_senk_Betrag ;Aufruf von v_senk_Betrag
Multiply ;Multipliziere beide Betraege
Recall c ;Aufruf der Lichtgeschwindigkeit (mm/musec)
Recall c ;Aufruf der Lichtgeschwindigkeit (mm/musec)
Multiply ;Multipliziere beide Geschwindigkeiten
Divide ;und dividiere durch das Quadrat von c
1 Swap_XY Subtract ; $(1 - (v\_senk\_Betrag/c)^2)$ 
Square_Root ;Wurzel aus vorherigem Ausdruck
Reciprocal_of_X ;und Kehrwert
Store gamma ;Speichern als gamma

; Berechnung der neuen Beschleunigung
Recall Vx_senk ;Aufruf Vx_senk
Recall Daempfung ;Aufruf der Daempfungskonstante
Multiply ;Multipliziere mit Vx_senk
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Multiply ;Multipliziere zum vorherigen Produkt
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Multiply ;Multipliziere zum vorherigen Produkt
Recall gamma ;Aufruf von gamma
Divide ;Dividiere durch gamma
Store facx ;Speichern als facx

Recall Ion_Ax_mm ;Aufruf der momentanen x Beschleunigung (mm/musec2)
Recall facx ;Aufruf von facx
Subtract ;Subtrahiere von momentaner x Beschleunigung
Store Ion_Ax_mm ;Speichern als momentane x Beschleunigung

Recall Vy_senk ;Aufruf Vy_senk
Recall Daempfung ;Aufruf der Daempfungskonstante
Multiply ;Multipliziere mit Vy_senk
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Multiply ;Multipliziere zum vorherigen Produkt
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Multiply ;Multipliziere zum vorherigen Produkt
Recall gamma ;Aufruf von gamma
Divide ;Dividiere durch gamma
Store facy ;Speichern als facy

Recall Ion_Ay_mm ;Aufruf der momentanen y Beschleunigung (mm/musec2)
Recall facy ;Aufruf von facy
Subtract ;Subtrahiere von momentaner y Beschleunigung
Store Ion_Ay_mm ;Speichern als momentane y Beschleunigung

Recall Vz_senk ;Aufruf Vz_senk
Recall Daempfung ;Aufruf der Daempfungskonstante
Multiply ;Multipliziere mit Vz_senk
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Multiply ;Multipliziere zum vorherigen Produkt
Recall B_Betrag ;Aufruf von B_Betrag
Multiply ;Multipliziere zum vorherigen Produkt
Recall gamma ;Aufruf von gamma

```

```
Divide ;Dividiere durch gamma  
Store facz ;Speichern als facz
```

```
Recall Ion_Az_mm ;Aufruf der momentanen z Beschleunigung (mm/musecý)  
Recall facz ;Aufruf von facz  
Subtract ;Subtrahiere von momentaner z Beschleunigung  
Store Ion_Az_mm ;Speichern als momentane z Beschleunigung
```

```
Exit ;Ende des User Programs
```



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Parameterraum $(\Omega_{m_0}, \Omega_{\Lambda_0})$ . . . . .	10
1.2	Zusammensetzung des heutigen Universums . . . . .	11
2.1	Energiespektrum des Elektrons beim Tritium- $\beta$ -Zerfall . . . . .	14
2.2	Prinzip des MAC-E-Filters . . . . .	15
2.3	Schematische Anordnung der Komponenten des KATRIN Experiments	17
3.1	Zwei typische Realisierungen einer Penningfalle . . . . .	20
3.2	Skizze eines zwischen den Spektrometern gespeicherten Teilchens . .	21
4.1	Relaxation in <b>SIMION</b> . . . . .	24
4.2	Flussdiagramm zur Berechnung der Teilchenbahn in SIMION . . . .	26
4.3	Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld . .	28
4.4	Toroidales Magnetfeld . . . . .	29
4.5	Vergleich der Krümmungsdrift in <b>ADIPARK</b> und <b>Lorentz3D</b> . . .	31
5.1	Test der Synchrotronstrahlung in <b>SIMION</b> anhand homogener Ma- gnetfelder . . . . .	36
5.2	Test der Synchrotronstrahlung in <b>ADIPARK</b> anhand homogener Magnetfelder . . . . .	39
5.3	Test der longitudinalen Synchrotronstrahlung in <b>ADIPARK</b> . . . .	40
5.4	Bahn eines zwischen den Spektrometern gespeicherten Elektrons . .	41
5.5	Abnahme der kinetischen Energie durch Synchrotronstrahlung . . . .	41
5.6	Kinetische Energie eines im maximalen Magnetfeld gestarteten Elek- trons . . . . .	42
5.7	Energieverlust durch Synchrotronstrahlung in Abhängigkeit vom Start- winkel $\theta_S$ . . . . .	44
5.8	Energieverlust durch Synchrotronstrahlung in Abhängigkeit vom Ra- dius $r$ . . . . .	45

6.1	Energieverlustspektrum für inelastische Einfachstreuung von 18-keV-Elektronen an molekularem Wasserstoff . . . . .	50
6.2	Vergleich der in <b>ADIPARK</b> implementierten totalen Wirkungsquerschnitte mit experimentellen Daten . . . . .	54
6.3	Vergleich der simulierten Winkelverteilungen von an Wasserstoff elastisch und inelastisch gestreuten 25keV-Elektronen mit experimentellen Daten . . . . .	55
6.4	Energieverlustspektren für elastische und inelastische Streuung . . .	56
6.5	Energieverlustspektrum von 25 keV-Elektronen nach dem Durchgang durch Wasserstoff . . . . .	58
6.6	Doppelt differentieller Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von Energieverlust und Streuwinkel für die Streuung von 25 keV-Elektronen an $H_2$ . . . . .	59
7.1	Verlauf der kinetischen Energie mit dem Ort $x$ entlang der Symmetriachse . . . . .	63
7.2	Zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie für drei verschiedene Startwinkel $\theta_S$ . . . . .	64
7.3	Zeitlicher Verlauf der kinetischen Energie für verschiedene radiale Startpositionen . . . . .	66
7.4	Radialer Abstand von der Symmetrieachse $x$ für ein $5^\circ$ -Elektron . .	67
7.5	Häufigkeitsverteilung der Ionisationsorte entlang der $x$ -Achse . . . .	69
7.6	Anzahl der Ionisationen bei gegebenem Potential $eU$ . . . . .	70
7.7	Dreidimensionale Zeichnung und Querschnitt des Vorspektrometertanks inklusive Dipolelektroden E1 und E2 . . . . .	73
7.8	Teilchenbahnen von in der Mitte des Transportsystems gestarteten Elektronen . . . . .	74
7.9	Äquipotentiallinien im KATRIN-Vorspektrometer mit und ohne Dipol	76
7.10	Bahn und Radius zweier Vorspektrometer-Elektronen . . . . .	78
8.1	Vorschlag eines Testaufbaus am Mainzer Tritium- $\beta$ -Experiment . . . .	81

# Tabellenverzeichnis

5.1	Rechenzeit bis zum ersten Reflexionspunkt in Abhängigkeit von QF und Benutzerprogramm . . . . .	38
-----	--	----



# Literaturverzeichnis

- [Ah02] Q.R. AHMAD, *et al.* 2002, Phys. Rev. Lett. **89**, 011302
- [Arr80] G.P. ARRIGHINI, F. BIONDI AND C. GUIDOTTI, Mol. Phys. **41** (1980) 1501
- [As00] V.N. ASEEV *et al.*, Eur. Phys. J. **D10** (2000)
- [Bah01] J.N. BAHCALL, M. PINSONNEAULT, S. BASU, Astrophys. J. **555**, 990 (2001)
- [Barr89] G. BARR *et al.*, Phys. Rev. **D39**, 3532 (1989); V. AGRAWAL, *et al.*, Phys. Rev. **D53**, 1313 (1996); T.K. GAISSER UND T. STANEV, Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conf. (Rome) Vol.1 694 (1995)
- [Be02] P. DE BERNARDIS, *et al.* 2002, Astrophys. J. **564**, 559
- [Ben03] C.L. BENNETT *et al.*, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results Astrophys.J.Suppl.148 (2003) 1
- [Ch80] Chem. Phys. **52** (1980) 133
- [Cle95] B.T. CLEVELAND *et al.* (Homestake), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **38** (1995) 47
- [Dav94] R. DAVIS, Prog. Part. Nucl. Phys. **32** (1994) 13; Proc. 13th Intern. Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, Boston, USA, 1988, p.518, eds. J. Schneps *et al.*, World Scientific, Singapore, 1989
- [CP96] W. HWANG, Y.-K. KIM AND M. E. RUDD, J. Chem. Phys. **104** (1996) 2956 (Eq. 5)
- [Dav96] R.DAVIS, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **48** (1996) 284
- [Deg99] R. DEGENHARDT, M. BERZ, Nucl. Inst. and Meth., Proc. CPO5 (1999)
- [Don00] Long Baseline News, Juli 2000,  
<http://hepunix.rl.ac.uk/minos/longbnews/0007.html>
- [Fla01] B. FLATT, Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2001
- [Fla03] BJÖRN FLATT, persönlich Mitteilung und Dissertation, voraussichtliche Fertigstellung 2004

- [Free01] W.L. FREEDMAN, *et al.* 2001, *Astrophys. J.* **553**, 47
- [Fu98] Y.FUKUDA *et al.* (Super-Kamiokande), *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998), hep-ex/9807003
- [Fu02] S. FUKUDA, *et al.* 2002, *Phys. Rev. Lett.* **B539**, 179
- [Gar99] JUAN GARCIA-BELLIDO(Imperial Coll., London), *Astrophysics and Cosmology*, Aug 1999. 78pp. Invited talk at 1999 European School of High-Energy Physics (ESHEP 99), Casta-Papernicka, Slovak Republic, 22 Aug - 4 Sep 1999. In \*Casta-Papiernicka 1999, High-energy physics\* 109-186. e-Print Archive: hep-ph/0004188
- [Gei64] J. GEIGER, *Z. Physik* **181** (1964) 413
- [Han03] S. HANNESTAD, *et al.*, astro-ph/0303076
- [Honda90] M. HONDA *et al.*, *Phys. Lett.* **B248**, 193 (1990); M. HONDA *et al.*, *Phys. Lett.* **D52**, 4985 (1995)
- [In71] M. INOKUTI, *Rev. Mod. Phys.* **43** (1971) 297
- [Jac82] J.D. JACKSON, *Klassische Elektrodynamik*, W. de Gruyter, Berlin 1982
- [Kr03] CH. KRAUS, *Dissertation*, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2003
- [Li87] J.W. LIU, *Phys. Rev.* **A35** (1987) 591
- [Lo99] V.M. LOBASHEV *et al.*, *Phys. Lett.* **B460** (1999) 227
- [LoI00] A. OSIPOWICZ *et al.*, (KATRIN Collab.), hep-ex/0109033
- [Mey85] K. VON MEYENN (HRSG.): *Wolfgang Pauli, Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a., Band II: 1930-1939*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1985
- [Nor63] T.G. NORTHROP, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Wiley, New York, 1963
- [NumRec] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING, B.P. FLANNERY, 'Numerical Recipes in C', Cambridge University Press, 1992
- [Pau61] W. PAULI, in: *Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie*, p. 156, Hrsg. W. Westphal, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961
- [Perl99] S. PERLMUTTER, *et al.* 1999, *Astrophys. J.* **517**, 565
- [PR73] J.W. LIU, *Phys. Rev.* **A7** (1973) 103,  $\sigma_i$  formula on page 107
- [Rei59] REINES AND COWAN, *Phys.Rev.* **113**, 273 (1959)
- [Riess98] A. RIESS, *et al.* 1998, *Astron. J.* **116**, 1009
- [Sch01] J.-P. SCHALL, *Diplomarbeit*, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2001

- [Sim00] DAVID A. DAHL, SIMION 3D Version 7.0 User's Manual, Idaho National Engineering and Environmental Laboratory, Idaho Falls, ID 83415
- [SNO03] Measurement of the Total Active  $^8\text{B}$  Solar Neutrino Flux at the Sudbury Neutrino Observatory with Enhanced Neutral Current Sensitivity: nucl-ex/0309004 v1
- [Spa03] D.N. SPARGEL, *et al.* (WMAP), astro-ph/0302209
- [Tra83] S. TRAJMAR, Phys. Reports **97** (1983) 221
- [Tu03] M.S. TURNER, W.L. FREEDMAN, Measuring and Understanding the Universe, astro-ph/0308418 v1
- [Thü02] TH. THÜMLER, Diplomarbeit, Inst. f. Physik, Universität Mainz, 2002
- [Ul74] R.C. ULSH, H.F. WELLENSTEIN, AND R.A. BONHAM, J. Chem. Phys., Vol. 60, No. 1, (1974)
- [Wang28] S.C. WANG, Phys. Rev. **31**, 579(1928)
- [WMAP03] S.W. ALLEN, R.W.SCHMIDT, S.L. BRIDLE, astro-ph/0306386
- [Zhi95] ZHIFAN CHEN, A.Z. MSEZANE, Phys. Rev. **A51** (1995) 3745





Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die aktiv oder passiv dazu beigetragen haben, dass ich diese Arbeit zu einem erfolgreichen Abschluss bringen konnte:

Allen voran danke ich meiner Familie, die es mir durch die liebevolle Unterstützung und das große Verständnis erst möglich gemacht hat, mich voll und ganz meinem Studium zu widmen. Die leider oft nur kurzen „Urlaube“ im Sauerland haben mich immer wieder abschalten und neue Kraft schöpfen lassen.

Ich danke Prof. Christian Weinheimer für die Betreuung meiner Diplomarbeit. Seine Begeisterung für Physik hat mich sehr beeindruckt. Ich habe in diesem Jahr viel gelernt.

Ich danke der gesamten Bonner CB- und KATRIN-Gruppe einschließlich aller Doktoranden, Diplomanden und Praktikanten, für die Schaffung eines ausgesprochen angenehmen Arbeitsklimas. Danke für die erholsamen Kaffee- (und Kuchen-)pausen und diverse außeruniversitäre Unternehmungen. Danke für die lieben Worte und Gesten, die mir in schwierigen Zeiten immer wieder Mut gemacht haben.

Vielen Dank an alle, die mir bei Rechner-, Netzwerk- und Programmierproblemen so hilfsbereit zur Seite standen, und an alle von deren Ratschlägen, Anregungen und Kritik ich profitieren durfte.

In diesem Zusammenhang danke ich Bea und besonders Thomas für die große Anteilnahme an meiner Arbeit. Sie haben nicht nur immer bereitwillig meine Fragen beantwortet, sondern sich auch sehr engagiert um meine Arbeit gekümmert. Ein großes Dankeschön für die vielen Stunden des Grübelns über Simulationsergebnisse und für die wertvollen Impulse. Thomas kann ich die Zeit und Mühe, die er innerhalb des letzten Jahres in die Weiterentwicklung von ADIPARK investiert hat, nicht hoch genug anrechnen. Vielen, vielen Dank!

Ich danke Christian und Jörg, dass sie mir so viel Arbeit bei der Praktikumsbetreuung abgenommen und somit den Rücken freigehalten haben!

Ich danke Dr. Ferenc Glück für die Entwicklung des Programms zur Stoßberechnung. Ohne ihn wäre es nicht möglich gewesen, diese Arbeit in so kurzer Zeit zu einem solchen Ergebnis zu bringen. Vielen Dank für die geduldigen und ausführlichen E-Mails bei Detailfragen zum Programm.

Ich danke den Mainzern, Björn und Christine, die sich immer wieder nach dem Status meiner Arbeit erkundigt und mir bei wichtigen und meist dringenden Fragen so schnell geholfen haben.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei Kalle bedanken, der die Anspannung und den Frust besonders in der Endphase meiner Diplomarbeit direkt zu spüren bekommen hat. Danke, dass du alles so geduldig ertragen und mir trotzdem deine volle Unterstützung gegeben hast! Danke, dass du dich tapfer durch meine ganze Arbeit gekämpft hast (An dieser Stelle auch ein ganz herzliches Dankeschön an Markus!). Dein kritisches Hinterfragen und deine Anmerkungen und Ideen waren unersetzlich!

Ich wünsche Euch allen viel Glück und Erfolg im Jahr 2004!

