



Experimentelle Übungen für Fortgeschrittene

Nichtlineare Schwingungen

Dezember 2005

Physikalische Systeme werden meist anhand linearer Näherungen beschrieben. Ein klassisches Beispiel hierfür ist der harmonische Oszillator. Auf der anderen Seite wird aber fast jedes System, betreibt man es nur mit genügend großen Amplituden (Energien), nichtlinear. Als Beispiel sei hier die Frequenzverdopplung in nichtlinearen Kristallen genannt, die erst durch die Entwicklung einer leistungsstarken Lichtquelle, des Lasers, verwirklicht werden konnte.

In dem Versuch sollen, ausgehend von einem einfachen linearen Drehpendel (Pohlsches Rad), verschiedene nichtlineare Phänomene demonstriert und analysiert werden. Beispiele sind die Bistabilität, Resonanzfrequenzverschiebung, Periodenverdopplung und das Chaos.

Kenntnisse

- Angetriebener, gedämpfter, harmonischer Oszillator
- Superpositionsprinzip
- Potential, Stabilität, Gleichgewicht, Attraktor
- Phasenraum, Trajektorien
- Periodenverdopplung
- deterministisches Chaos, Return-Map
- logistische Parabel
- Bifurkation

Literatur

- [1] S. H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Publishing
- [2] H. G. Schuster: *Deterministisches Chaos*, VCH
- [3] R. C. Hilborn: *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press

1 Grundlagen

Lineare physikalische Systeme lassen sich einfach durch lineare Differentialgleichungen beschreiben, die eine Inhomogenität enthalten können. Als Beispiel sei hier die Ausbreitung von Licht als elektromagnetische Welle im Vakuum genannt. Ein schwingungsfähiges, lineares System schwingt z. B. mit einer definierten Amplitude und Frequenz, wobei die Amplitude unabhängig von der Frequenz ist. Die allgemeine Lösung der entsprechenden Differentialgleichungen erhält man aus der Lösung der homogenen Gleichung plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Superposition zweier Lösungen ergibt wieder eine Lösung der linearen DGL. Dieses Superpositionsprinzip gilt nicht mehr in nichtlinearen Systemen. Nichtlineare Systeme werden durch

nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben, die sich im Allgemeinen nicht einfach analytisch lösen lassen. Ein schwingungsfähiges, nichtlineares System kann gleichzeitig mit mehreren Frequenzen schwingen, wobei die Frequenz von der Amplitude abhängt. Laserlicht führt z. B. in einem Medium zu einer Polarisation, welche bei großen Lichtintensitäten nicht mehr linear zur anregenden Amplitude des Feldes ist. Es entstehen höhere Harmonische, so dass auf diese Art und Weise Licht mit der doppelten Frequenz erzeugt werden kann.

Bei nichtlinearen Systemen kann man eine interessante Beobachtung machen, wenn man die Parameter entsprechend wählt: Chaotisches Verhalten. Mit *Chaos* ist gemeint, dass das Messsignal unregelmäßig wird und keine Periode erkennbar ist. Scheinbar spielen Zufallskräfte eine Rolle, die aber bei den zu untersuchenden Systemen auszuschließen sind. Vielmehr werden die Systeme durch einige wenige Differentialgleichungen beschrieben. So hat sich der Begriff „deterministisches Chaos“ gebildet. Das Verhalten des Systems ist durch die Anfangsbedingungen vorherbestimmt, hängt aber sehr empfindlich von diesen ab.

Als nichtlineares System dient in diesem Versuch ein angetriebenes, gedämpftes Drehpendel mit einer Nichtlinearität (siehe Abb. 1). Zuerst wird die Bewegungsgleichung aufgestellt und der

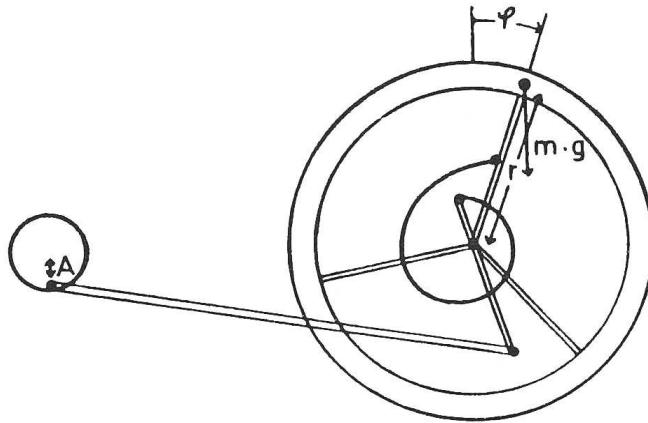


Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Drehpendels (Pohlsches Rad)

statische sowie dynamische Fall für kleine und große Nichtlinearitäten untersucht. Über Periodenverdopplungen gelangt man schließlich ins Chaos. Abschließend wird ein Zusammenhang zwischen der logistischen Parabel und dem Pohlschen Rad hergestellt.

1.1 Bewegungsgleichung der angetriebenen, gedämpften Oszillation mit einer Nichtlinearität

Das Drehpendel (Pohlsches Rad) besitzt das Trägheitsmoment J_0 und eine Spiralfeder mit der Direktionskonstanten D erzeugt das rücktreibende Drehmoment. Die Dämpfung wird (abgesehen von der Reibung) durch eine Wirbelstrombremse bewirkt, wodurch ein winkelgeschwindigkeitsabhängiges Drehmoment $K\dot{\phi}$ auf das Rad einwirkt. Das freie Pendel wird somit durch die Differentialgleichung:

$$J_0\ddot{\phi} + K\dot{\phi} + D\phi = 0 \quad (1)$$

beschrieben. Das Drehpendel wird durch einen Motor angeregt, der über einen Exzenter den Befestigungspunkt der Drehfeder bewegt (siehe Abb. 1). Dann ergibt sich:

$$J_0\ddot{\phi} + K\dot{\phi} + D\phi = \hat{F} \sin(\omega t + \Omega). \quad (2)$$

Dabei ist $\omega/2\pi$ die Frequenz der Anregung und \hat{F} ein Maß für die Amplitude der Anregung und Ω eine beliebige Phase.

Eine Nichtlinearität wird durch ein zusätzliches Gewicht mg (siehe Abb. 1) eingeführt, wodurch ein zusätzliches Drehmoment $-mgr \sin \phi$ auf das Rad einwirkt. Außerdem wird das Trägheitsmoment zu

$$J = J_0 + mr^2 \quad (3)$$

verändert (Steinerscher Satz), so dass aus Gl. (2) die Bewegungsgleichung für das angetriebene, gedämpfte, nichtlineare Drehpendel wird:

$$J\ddot{\phi} + K\dot{\phi} + D\phi - N \sin \phi = \hat{F} \sin(\omega t + \Omega), \quad (4)$$

wobei N durch

$$N = mgr \quad (5)$$

definiert ist. Man erkennt sofort, dass der neue hinzugekommene Term nichtlinear in ϕ ist. Wir wollen uns nun dieses System für den statischen und den dynamischen Fall genauer ansehen.

1.2 Der statische Fall

Zur Behandlung des statischen Falles setzt man $\hat{F} = 0$, $\dot{\Phi} = 0$, $\ddot{\Phi} = 0$ und erhält:

$$D\phi_0 = N \sin \phi_0, \quad (6)$$

wobei ϕ_0 die Lösung im statischen Fall, also den „Ruhewinkel“ bezeichnet. Bei verschwindender Nichtlinearität erhält man

$$\phi_0|_{N=0} = 0. \quad (7)$$

Für wachsende Nichtlinearität $N > 0$ löst man Gl. (6) grafisch (siehe Abb. 2). Man erkennt, dass

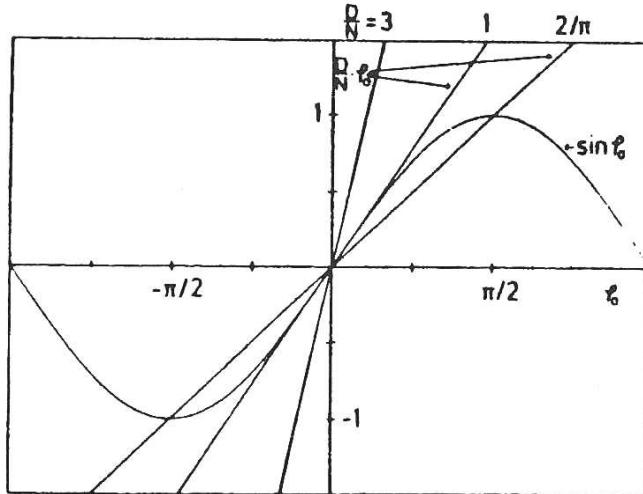


Abbildung 2: Graphische Lösung der Gleichung $\frac{D}{N}\Phi_0 = \sin \Phi_0$

für $D/N > 1$ (kleine Nichtlinearität) nur die Lösung $\phi_0 = 0$ existiert, während für $D/N < 1$ mindestens drei Lösungen existieren. Zwei Lösungen sind stabil (symmetrisch zu $\phi_0 = 0$) und eine ist instabil ($\phi_0 = 0$), wie man sich an dem Potential

$$V(\phi) = \frac{1}{2}D\Phi^2 + N \cos \phi \quad (8)$$

veranschaulichen kann. Wie hängt das Potential mit der Bewegungsgleichung zusammen? Wie sieht dieses Potential in Abhängigkeit von D und N aus? Wann kann man von einem stabilen Punkt sprechen?

Um die Lösungen ϕ_0 näherungsweise zu berechnen, entwickelt man den Sinus

$$\sin \phi = \phi - \frac{1}{6}\phi^3 + \dots \quad (9)$$

und setzt in Gleichung (6) ein. Mit $\phi_0 = 0$ existiert immer eine Lösung und für $D < N$ existieren zwei Lösungen:

$$\phi_0 \approx \pm \sqrt{6(1 - D/N)} . \quad (10)$$

Trägt man ϕ_0 über D/N auf, erhält man an der Stelle $D = N$ eine Gabelung. Diese Änderung der Lösungsstruktur nennt man *Bifurkation*. Weil die Bifurkation die Form einer Heugabel hat, spricht man auch von einer Pitchfork-Bifurkation.

Liegt der Nullpunkt des Pendels für $N = 0$ nicht bei $\phi_0 = 0^\circ$, so ist das Potential nicht mehr symmetrisch zum Ursprung. Es entstehen neue Lösungen der Ruhelage für $N \neq 0$ „aus dem Nichts“. Man spricht von einer Sattel-Knoten-Bifurkation.

1.3 Der dynamische Fall mit Antrieb

1.3.1 Linearer Fall ($N = 0$)

Ohne angehängte Masse ist die Ruhelage $\phi_0 = 0$, und es ist Gl. (4) mit $N = 0$ zu lösen. Die Lösung für den freien Fall ($\hat{F} = 0$) ist die bekannte gedämpfte, harmonische Schwingung

$$\phi(t) = \bar{\phi} \exp(-t/\tau_0) \sin(\omega_f t + \Psi) . \quad (11)$$

mit einer Amplitude $\bar{\phi}$ und einer Phase Ψ , die von den Anfangsbedingungen abhängen. Es gilt $\omega_0^2 = D/J_0$ (d.h. ω_0 ist die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems), $\tau_0 = 2J_0/K$ und $\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau_0^2}$. Für die erzwungene Schwingung erhält man

$$\phi(t) = \hat{\phi} \sin(\omega t) \quad (12)$$

mit

$$\hat{\phi}^2 = \frac{(\hat{F}/J_0)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau_0^2} . \quad (13)$$

Die Frequenz maximaler Amplitude (Resonanz) berechnet sich zu

$$\omega_{\text{Res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2/\tau_0^2} = \omega_0(1 - (\tau_0\omega_0)^{-2}) . \quad (14)$$

1.3.2 Kleine Nichtlinearität ($N < D$)

Für kleine Auslenkungen (linearer Grenzfall) um die Ruhelage $\phi_0 = 0$ berücksichtigt man nur den ersten Term in der Entwicklung (9). Damit wird Gl. (4) zu

$$J\ddot{\phi} + K\dot{\phi} + D'\phi = \hat{F} \sin(\omega t + \Omega) \quad (15)$$

mit $D' = D - N$. In dieser Näherung entsteht wieder eine lineare Schwingungsgleichung, die sich auf die gewohnte Art und Weise lösen lässt. Damit erhält man eine homogene Lösung wie in Gl. (11) mit den Resultaten (12) bis (14), wenn man die Ersetzungen $J_0 \rightarrow J = J_0 + mr^2$, $\omega_0^2 \rightarrow \tilde{\omega}_0^2 = D'/J$, $\tau_0 \rightarrow \tau = 2J/K$ und $\omega_f \rightarrow \tilde{\omega}_f = \sqrt{\tilde{\omega}_0^2 - 1/\tau^2}$ vornimmt. Für größere Auslenkungen muss der nächste Term der Entwicklung (9) berücksichtigt werden, so dass sich in Gl. (4) eine kubische Nichtlinearität ergibt:

$$J\ddot{\phi} + K\dot{\phi} + D'\phi + \frac{1}{6}N\phi^3 = \hat{F} \sin(\omega t + \Omega) . \quad (16)$$

Es gibt verschiedene physikalische Systeme, die durch diese Form von Differentialgleichung beschrieben werden. Man spricht auch von einem Duffing-Oszillatator.

Mit dem harmonischen Ansatz (12) berechnet man den Term

$$\frac{1}{6}N\phi^3 = \frac{N}{6}\hat{\phi}^3 \sin^3(\omega t) = \frac{N}{6}\hat{\phi}^3 \left(\frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) = \frac{N}{8}\hat{\phi}^3 \sin \omega t = \frac{N\hat{\phi}^2}{8}\phi(t). \quad (17)$$

Die entstehende Oberwelle der Frequenz 3ω wird vernachlässigt, weil sie außerhalb der Resonanzfrequenz liegt. Damit ergibt sich für die Bewegungsgleichung:

$$J\ddot{\phi} + K\dot{\phi} + (D' + \frac{N}{8}\hat{\phi}^2) = \hat{F} \sin(\omega t + \Omega). \quad (18)$$

Diese Gleichung hat zum erstenmal nichtlinearen Charakter, da in ihr formal eine amplitudenabhängige Federkonstante ($D' + N/8\hat{\phi}^2$) auftritt.

Die Amplitude kann man nun analog zum linearen Fall berechnen:

$$\hat{\phi}^2 = \frac{(\hat{F}/J)^2}{(\tilde{\omega}_0^2 + \frac{N}{8J}\hat{\phi}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2} = \frac{(\hat{F}/J)^2}{(\omega_{0,\text{nl}}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2}. \quad (19)$$

Die nichtlineare Frequenz $\omega_{0,\text{nl}}$ ist damit definiert durch:

$$\omega_{0,\text{nl}}^2 = \frac{D'}{J} + \frac{N}{8J}\hat{\phi}^2. \quad (20)$$

Gleichung (19) stellt eine implizite Gleichung für $\hat{\phi}$ dar. Hieraus erhält man folgende Aussagen: Gegenüber der linearen genäherten Resonanzfrequenz $\tilde{\omega}_{\text{Res}}^2 = \tilde{\omega}_0^2 - 2/\tau^2$ verschiebt sich die Resonanzfrequenz nach

$$\omega_{\text{Res},\text{nl}}^2 = \omega_{0,\text{nl}}^2 - 2/\tau^2 = \tilde{\omega}_0 + \frac{N}{8J}\hat{\phi}^2 - 2/\tau^2 \quad (21)$$

und wird damit amplitudenhängig. Aus der Resonanzkurve im Kleinsignalfall erhält man die

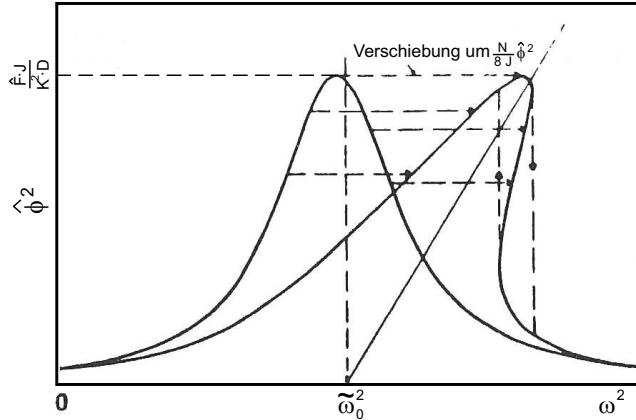


Abbildung 3: Konstruktion der nichtlinearen Resonanzkurve bei kubischer Nichtlinearität durch Scherung mit Hilfe der Geraden $\omega^2 = \tilde{\omega}_0^2 + \frac{N}{8J}\hat{\phi}^2$.

nichtlineare Resonanzkurve näherungsweise durch Scherung (siehe Abb. 3). Die Amplitude $\hat{\phi}$, die im Kleinsignalfall bei ω^2 auftritt, wird im Großsignalfall bei dem „Frequenzquadrat“

$$\omega'^2 \approx \omega^2 + \frac{N}{8J}\hat{\phi}^2 \quad (22)$$

aufreten. Aus Abb. 3 erkennt man, dass die Resonanzkurve „überhängt“, d. h., dass sie mehrdeutig ist. Experimentell wird der Ast mit negativer Steigung nicht durchfahren, da dieser instabil ist, sondern das System „springt“ entlang der gestrichelten Geraden, d. h. es ist bistabil. Man erhält so eine Hystereseschleife.

1.3.3 Große Nichtlinearität ($N > D$)

Bei großer Nichtlinearität ergeben sich zwei neue Ruhelagen $\phi_0 \neq 0$. Man entwickelt nun $\sin \phi$ um ϕ_0 mit $\phi = \phi_0 + \alpha$ und erhält so eine Taylor-Reihe. Es tritt wieder eine amplitudenabhängige Resonanzfrequenz auf, die im Gegensatz zu kleiner Nichtlinearität zu tiefen Frequenzen verschoben ist. Für die Amplitude erhält man:

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{(\hat{F}/J)^2}{(\omega_{0,NL}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2} \quad (23)$$

mit der nichtlinearen Frequenz

$$\omega_{0,NL}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{N^2}{4D^2} \hat{\alpha}^2 \right). \quad (24)$$

Man beachte, dass hier das ω_0 aus dem linearen Fall zu verwenden ist (vgl. Abschnitt 1.3.1). Die Resonanzkurve hängt nach links über (siehe Abb. 4).

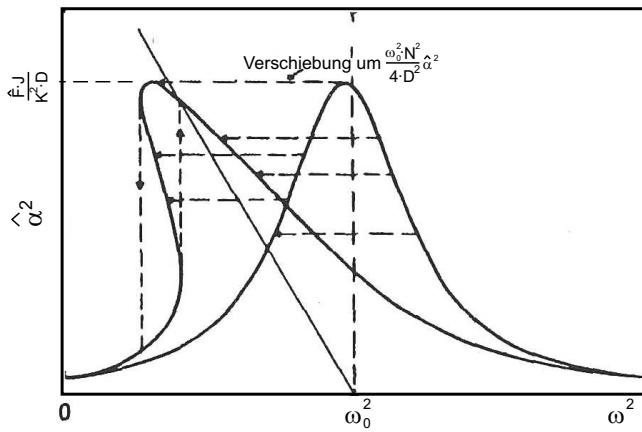


Abbildung 4: Konstruktion der nichtlinearen Resonanzkurve bei quadratischer Nichtlinearität durch Scherung mit Hilfe der Geraden $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{4D^2} \hat{\alpha}^2$.

1.4 Periodenverdopplungen und Chaos

Das getriebene Pohlsche Rad mit starker Nichtlinearität zeigt bei bestimmten experimentellen Parametern chaotisches Verhalten. Der Weg ins Chaos führt über Periodenverdopplungen. Die folgenden Überlegungen sollen nun eine „Ordung“ in dieses Chaos bringen. Hierbei wird zunächst ein mathematisches Modell vorgestellt und dann eine „Messvorschrift“ entwickelt, die dann im Experiment einen Vergleich mit diesem Modell zulässt.

1.4.1 Das mathematische Modell: Die logistische Parabel

Gegeben sei eine Folge $\langle x_n \rangle$ mit

$$0 < x_1 < 1 \quad (25)$$

und

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n(1 - x_n) \quad \text{mit } a \leq 4. \quad (26)$$

Die Funktion f bildet das Intervall $[0,1]$ wieder in das Intervall $[0,1]$ ab, so dass alle Folgenglieder dieser rekursiv definierten Folge in diesem Intervall liegen. Die Konstruktion der Folgenglieder mit Hilfe der Winkelhalbierenden wird in Abb. 5 deutlich.

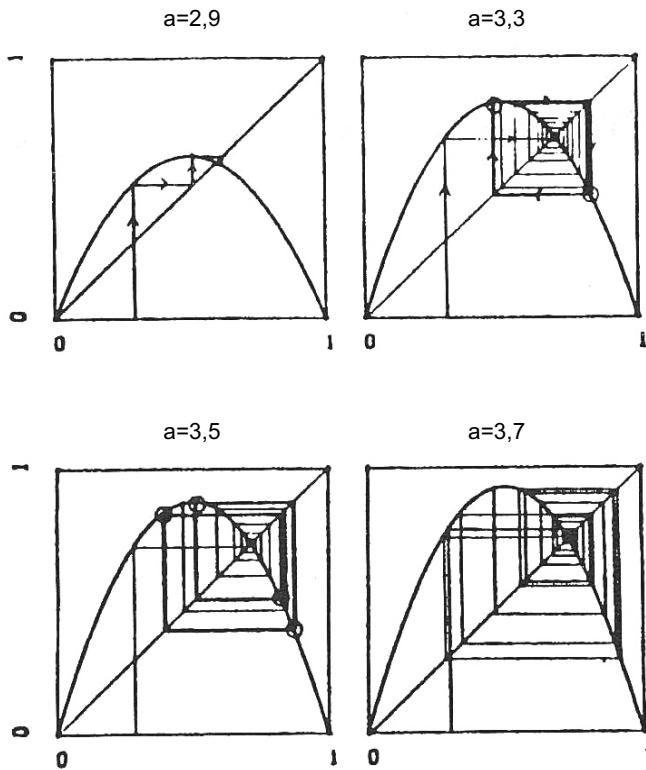


Abbildung 5: Konstruktion der Folgenglieder x_n mit Hilfe der logistischen Parabel $f(x) = ax(1 - x)$.

Das Verhalten der Folgenglieder hängt stark vom Parameter a ab. Wählt man z. B. $a = 2.5$, so werden die Folgenglieder x_n sich immer weiter dem Fixpunkt $x_n = f(x_n) = 0.6$ nähern, wobei der Startwert x_1 zwischen 0 und 1 liegen darf. Bei $a = 3.3$ verliert der Fixpunkt seine Stabilität, $\langle x_n \rangle$ pendelt dann asymptotisch zwischen zwei Werten, die Fixpunkte von $f \circ f$ sind. Dieses Verhalten wird mit Periode 2 (P2) oder 2-Zyklus bezeichnet, während für $a = 2.5$ die Bezeichnung P1 (1-Zyklus) zutrifft. Der Übergang erfolgt in einer sog. Flip-Bifurkation. Bei $a = 3.5$ erhält man P4, bei $a = 3.56$ P8 usw. Für $a > 3.5699\dots$ erkennt man jedoch keine Periode mehr. Die getroffenen Punkte $\langle x_n \rangle$ streuen in unregelmäßiger Folge über einen breiten Bereich der Parabel $f(x)$, dieses Verhalten wird als *Chaos* bezeichnet. Bei $a = 4$ wird sogar das ganze Intervall $[0,1]$ dicht getroffen. Wie kann man die Stabilität eines Fixpunktes für die logistische Abbildung definieren und prüfen?

Es gibt auch andere Iterationsfunktionen als die angeführte logistische Parabel, die chaotisches Verhalten zeigen. Wie von M. J. Feigenbaum festgestellt, zeigen z.B. alle Funktionen, die sich in ihrem Maximum quadratisch entwickeln lassen, qualitativ und asymptotisch quantitativ denselben Weg über Periodenverdopplungen ins Chaos.

1.4.2 Die Messvorschrift, Diskretisierung, Return-Map

Wie gewinnt man nun einen Zusammenhang zwischen dem Pohlschen Rad und der logistischen Parabel?

Die Differentialgleichung (4) kann in ein autonomes System von drei Differentialgleichungen überführt werden. Setzt man

$$y = \dot{\phi}, \quad (27)$$

so ergibt sich

$$\dot{y} = -\frac{K}{J}y - \frac{D}{J} \sin \phi + \frac{\hat{F}}{J} \sin(\omega z + \Omega) \quad (28)$$

$$\dot{\phi} = y \quad (29)$$

$$\dot{z} = 1. \quad (30)$$

Die Gleichung (30) lässt sich sofort lösen:

$$z = t.$$

Da die Variable z nur im periodischen Term von (28) vorkommt, kann z periodisch auf das Intervall $[0, 2\pi/\omega]$ beschränkt werden. Man erkennt, dass man einen dreidimensionalen Phasenraum mit den Phasenraumvariablen ϕ , $y = \dot{\phi}$ und $z = t$ erhält. In diesem werden die Trajektorien verlaufen. Für einen Vergleich mit dem mathematischen Modell muss nun aus diesen Trajektorien eine diskrete Folge von Zahlen gewonnen werden. Für diese Diskretisierung gibt es keine Vorschrift, sie muss durch das System, d. h. durch die Trajektorien im Phasenraum selbst erfolgen. Hierzu legt man in den Phasenraum eine Hyperfläche und betrachtet nun nur noch die Durchstoßpunkte der Trajektorien durch diese Fläche (Poincaré-Schnitt). Diese Durchstoßpunkte bilden den in der Theorie bekannten „seltsamen Attraktor“. Eine häufig angewandte Diskretisierung besteht darin, dass man sich aus dem zeitlichen Verlauf einer Phasenraumvariablen nur die Maxima oder Minima betrachtet. Aus dieser diskreten Folge von Zahlen kann man dann die *Return-Map* entwickeln, indem man die $n+1$ -te Zahl gegen die n -te Zahl aufträgt. Viele Experimentatoren haben gezeigt, dass man mit dem exemplarisch vorgestellten Verfahren „Return-Maps“ erhalten kann, bei denen die Messpunkte auf Kurven liegen, statt über einen breiten Bereich zu streuen, wie man es bei Zufallskräften erwarten würde. Wie muß man die Hyperfläche legen, um Maxima und Minima zu erhalten?

Mithilfe der Return-Map lässt sich deterministisches Chaos von stochastischem Rauschen unterscheiden. Wie unterscheidet sich das Amplituden-Spektrum eines n -Zyklus vom Spektrum stochastischen Rauschens?

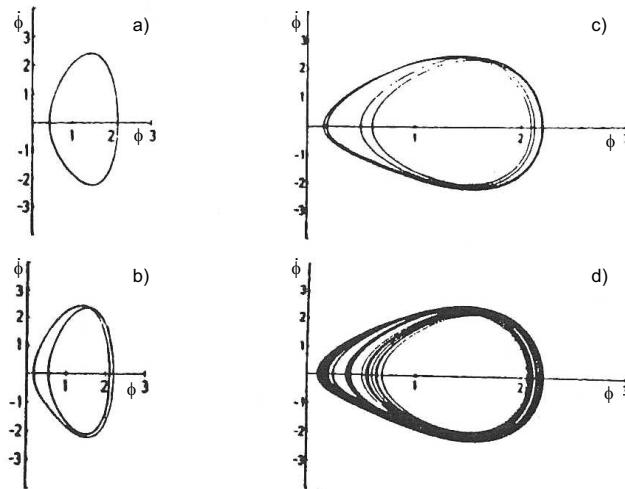


Abbildung 6: Numerische Lösung der Differentialgleichung (4). Projektion der Trajektorien auf die $\phi/\dot{\phi}$ -Ebene. Parameter: $F/J = 2.1 \text{ s}^{-2}$, $K/J = 0.799 \text{ s}^{-1}$, $N/J = 14.68 \text{ s}^{-2}$, $\omega_0^2 = 9.44 \text{ s}^{-2}$. (a) $\omega = 2.50 \text{ s}^{-1}$, (b) $\omega = 2.32 \text{ s}^{-1}$, (c) $\omega = 2.30 \text{ s}^{-1}$, (d) $\omega = 2.25 \text{ s}^{-1}$.

Das Verhalten des Systems kann anhand der Bewegungsgleichung (4) untersucht werden. Hierzu wurde diese Gleichung numerisch integriert, wobei die Parameter für den Fall großer Nichtlinea-

rität ($N > D$) gewählt wurden. In Abb. 6 sind Projektionen der erhaltenen Trajektorien auf die $\phi/\dot{\phi}$ -Ebene dargestellt. Man erkennt deutlich die Perioden P1, P2 und P4 bei Veränderung des Parameters. Bei weiterer Veränderung wird das Verhalten chaotisch. Für diesen Fall wurde die Return-Map in Abb. 7 dargestellt, wobei die Minima des $\phi(t)$ -Verlaufs ausgewertet wurden. Der Kurvenverlauf hat eine große Ähnlichkeit mit dem Modell der logistischen Parabel. Die Funktion ist allerdings im Gegensatz zur logistischen Parabel im rechten Teil nicht eindeutig.

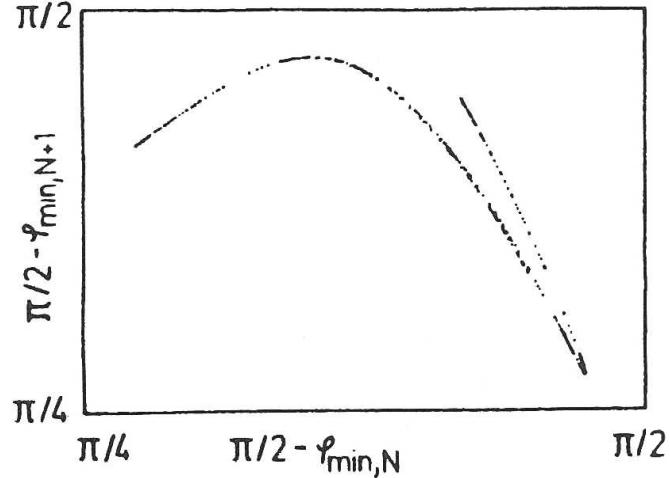


Abbildung 7: Return-Map: Numerische Lösung der Differentialgleichung (4). Parameter: $\hat{F}/J = 2.1 \text{ s}^{-2}$, $K/J = 0.799 \text{ s}^{-1}$, $N/J = 14.68 \text{ s}^{-2}$, $\omega_0^2 = 9.44 \text{ s}^{-2}$, $\omega^2 = 2.25 \text{ s}^{-2}$.

2 Geräte und Zubehör

- Pohlsches Rad
 - Computer mit Labview
- Der Computer kann über den Winkelnehmer den Winkel des Rades in Abhängigkeit von der Zeit aufnehmen. Die Bedienung erfolgt über eine Labview-Oberfläche.
- Frequenzgenerator

3 Aufgaben & Hinweise

3.1 Stabile Ruhelage, Bifurkationen

1. Bringen Sie das Drehpending in die Nullstellung $\phi_0 = 0$. Wirbelstrombremse und Motor bleiben ausgeschaltet. Bringen Sie verschiedene Massen an das Rad an und messen Sie die Auslenkung ϕ in der Ruhelage. Wie sieht $\phi(N/D)$ aus? Erklären Sie das Verhalten anhand des Potentials für $N/D < 1$, $N/D = 1$ und $N/D > 1$. Bestimmen Sie die Direktionskonstante D .
2. Bringen Sie durch Verschieben des Exzentrums das Rad leicht aus der Ruhelage, so dass $\phi_0 \approx 3^\circ$ gilt. Bestimmen Sie wie in Punkt 1 die Ruhelagen in Abhängigkeit von N . Wie sieht jetzt $\phi(N/D)$ aus? Wie sieht das entsprechende Potential aus?

3.2 Freie Schwingungen mit und ohne Nichtlinearität

1. Nehmen Sie mit dem Computer-Programm eine freie Schwingung ohne zusätzliche Masse auf. Achten Sie darauf, dass Sie dabei die gleiche Dämpfung wie in Aufgabenteil 3.3 verwenden. Wie sehen die Trajektorien im Phasenraum $\dot{\phi}(\phi)$ aus?
2. Bringen Sie eine Masse an, so dass $N/D > 1$ gilt, aber die Nichtlinearität noch nicht zu groß ist. Wie unterscheiden sich die Trajektorien im Phasenraum $\dot{\phi}(\phi)$ von denen der freien Schwingung?
3. Bestimmen Sie J_0 , ω_0 , K und τ aus der freien linearen Schwingung.

3.3 Erzwungene Schwingung und Resonanzverschiebung

Stellen Sie eine kleine ($N/D < 1$) oder große ($N/D > 1$) Nichtlinearität ein. Messen Sie die Resonanzkurve $\phi(\omega)$ der angetriebenen, gedämpften Schwingung im Bereich $0.1 \text{ Hz} < \omega < 0.5 \text{ Hz}$. Messen Sie die Resonanzkurve einmal für steigende und einmal für fallende Anregungsfrequenzen. Plotten Sie die Resonanzkurve in quadratischen Einheiten (vgl. Abb. 3 und 4) und zeichnen Sie die in der Theorie hergeleitete Schergerade ein.

3.4 Periodenverdopplung und Chaos

Stellen Sie eine geeignete Nichtlinearität ein. Variieren Sie von hohen Frequenzen kommend die Anregungsfrequenz und messen Sie die Periode 1, Periode 2, Periode 4 und Chaos. Die $\Phi(t)$ -Kurve für das Chaos sollte 100 Schwingungen enthalten. Diskutieren Sie die Phasenraum- und $\phi(t)$ -Diagramme. Stellen Sie eine Return-Map auf, indem Sie die Minima $\phi_{\min}(N)$ (oder Maxima) der Schwingungen bestimmen und $\phi_{\min}(N+1)$ gegen $\phi_{\min}(N)$ auftragen. Vergleichen Sie mit der logistischen Parabel.

4 Fragen zur Vorbereitung

- Wie sind die Begriffe „lineares / nichtlineares System“ definiert?
- Welches sind die wesentlichen Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Systemen? Welche linearen und nichtlinearen Systeme kennen Sie?
- Welche Lösungstechniken kennen Sie für lineare und nichtlineare Differentialgleichungen?
- Wodurch wird die Bewegungsgleichung beim Pohlschen Rad nichtlinear?
- Was bezeichnet man als Bifurkation? Gibt es Bifurkationen in linearen Systemen?
- Für welche Systeme kann man ein Potential finden? Wie unterscheidet man stabile und instabile Punkte in einem Potential?
- Was versteht man unter Phasenraum? Was ist ein Freiheitsgrad?
- Was ist eine Trajektorie? Wann sind Trajektorien eindeutig?
- Wie sieht die Bewegungsgleichung einer erzwungenen Schwingung mit Dämpfung und ohne Nichtlinearität aus? Wie hängt bei der erzwungenen Schwingung die Amplitude von der Erregerfrequenz ab?
- Was versteht man unter Periodenverdopplung?
- Wann spricht man von Chaos?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der logistischen Parabel und der Bewegungsgleichung für das angetriebene, gedämpfte Pohlsche Rad mit Nichtlinearität?