Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Institut für Angewandte Physik

Experimentelle Übungen für Fortgeschrittene

Korrelationstechnik

Dezember 2004

Die Hauptaufgabe der Nachrichtentechnik besteht darin, aus einem Signal Information zu gewinnen. Dazu ist es im Allgemeinen notwendig, ein empfangenes Signal mit einem anderen, bekannten Signal zu vergleichen. Ein Signal ist die Darstellung einer Nachricht durch physikalische Größen wie z.B. elektrische Spannungen oder Feldstärken, wobei ein Signal sich gewöhnlich zeitlich verändert. In allen Korrelationsverfahren wird ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale berechnet. Auf diesem Ähnlichkeitsvergleich lassen sich z.B. wichtige Empfangsverfahren aufbauen.

In dem Versuch werden Autokorrelationsfunktionen von determinierten Signalen (Sinus, Dreieck, Rechteck, ...) gemessen. Dazu wird das Eingangssignal in zwei Signale geteilt, wobei ein Signal gegenüber dem anderen zeitlich verzögert wird. Beide Teilsignale werden nachfolgend elektronisch multipliziert und integriert. Mit derselben Technik lässt sich auch eine Fourieranalyse z.B. eines Rechteck-Signals durchführen. Eine technische Anwendung der Korrelationstechnik ist die Lock-In Technik zur Messung kleinster periodischer Signale, was am Beispiel eines Widerstandes demonstriert wird, wo der zu messende Strom sehr klein ist.

Kenntnisse

- Energie und Leistung von Signalen
- Fouriertransformation
- Korrelation und Faltung
- Autokorrelation, Kreuzkorrelation
- Schematischer Aufbau eines Lock-In Verstärkers

Literatur

[1] Ohm, Lüke: *Signalübertragung*, Springer, 2002
Kapitel 2 Fouriertransformation
Kapitel 4 Korrelationsfunktionen determinierter Signale

[2] `http://www.lockin.de`
Virtuelles Lock-In Experiment der Universität Konstanz
Interessant ist die Literatur (pdf-Dokumente) zu den ersten beiden Versuchsteilen

1 Grundlagen

1.1 Korrelationskoeffizient für Energiesignale

Wir wollen uns zunächst auf Signale beschränken, deren „Energie“

$$E_\mathrm{s} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt \tag{1}$$

endlich ist. Ein solches Signal heißt *Energiesignal*. Wie muss es beschaffen sein? Um ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale $s(t)$ und $g(t)$ anzugeben, liegt es nahe, die Energie des Differenzsignals $\Delta(t) = s(t) - g(t)$,

$$E_\Delta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [s(t) - g(t)]^2\,dt \tag{2}$$

zu betrachten. E_Δ entspricht der mittleren quadratischen Abweichung der beiden Signale voneinander. Um ein Ähnlichkeitsmaß φ_sg anzugeben, das **maximal** wird für möglichst ähnliche Signale, und für das $\varphi_\mathrm{sg} = 0$ gilt, wenn $s(t)$ und $g(t)$ „völlig unähnliche“ Signale sind, definiert man den *Korrelationskoeffizienten*

$$\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E} = \frac{1}{2}(E_\mathrm{s} + E_\mathrm{g} - E_\Delta)\,. \tag{3}$$

Das hochgestellte E soll andeuten, dass diese Definition nur für Energiesignale gilt. Wir erhalten damit

$$\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t)\,dt\,. \tag{4}$$

Diese Definition von $\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E}$ besitzt die Eigenschaft eines Skalarproduktes, es ist also $\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E} = 0$ für orthogonale Signale.

1.2 Korrelationsfunktion für Energiesignale

Bei der Betrachtung der Korrelationskoeffizienten fällt nun auf, dass Signale $s(t)$ und $g(t)$, die im Prinzip identisch sind, einen Korrelationskoeffizienten $\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E} = 0$ aufweisen, wenn sie zeitlich gegeneinander verschoben sind, so dass sie keinen „Überlapp“ mehr aufweisen. Solche unerheblichen Signalverzögerungen sind jedoch allgegenwärtig, sie werden z. B. durch endliche Laufzeiten auf Nachrichtenkanälen verursacht. Um solche Phänomene behandeln zu können, führt man die Korrelationsfunktion $\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E}(\tau)$ ein, in der eine Zeitverzögerung τ explizit berücksichtigt ist:

$$\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)g(t+\tau)\,dt\,. \tag{5}$$

Beim Durchfahren der Verzögerung τ werden die Signale $s(t)$ und $g(t)$ quasi „durcheinander durchgeschoben“. Im Fall $s(t) = g(t)$ heißt $\varphi_\mathrm{ss}^\mathrm{E}$ *Autokorrelationsfunktion* (AKF), während im Fall $s(t) \neq g(t)$ man $\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E}$ *Kreuzkorrelationsfunktion* (KKF) nennt. Aus der Definition Gl. (5) folgt $\varphi_\mathrm{sg}^\mathrm{E}(\tau) = \varphi_\mathrm{gs}^\mathrm{E}(-\tau)$, die AKF ist also stets eine gerade Funktion.

1.3 Korrelation und Faltung

Führt man im Korrelationsintegral die Substitution $t = -\Theta$ durch, so erhält man

$$\varphi_{\mathrm{sg}}^{\mathrm{E}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(-\Theta) g(\tau - \Theta)\, d\Theta\,. \tag{6}$$

Mit der Definition des Faltungsproduktes[1]

$$s(\tau) * g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) g(\tau - t)\, dt \tag{7}$$

lässt sich die Korrelationsfunktion demnach als Faltung schreiben:

$$\varphi_{\mathrm{sg}}^{\mathrm{E}} = s(-\tau) * g(\tau)\,. \tag{8}$$

Sei $S(f)$ die Fouriertransformierte von $s(t)$. Da die Faltung zweier Zeitsignale einer Multiplikation ihrer Fouriertransformierten entspricht, folgt mit

$$S^*(f) S(f) = |S(f)|^2\,, \tag{9}$$

dass das Betragsspektrum $|S(f)|^2$ die Fouriertransformierte der AKF ist. Dieser Zusammenhang ist auch als *Wiener-Khintchine-Theorem* bekannt. Rücktransformation liefert

$$\varphi_{\mathrm{ss}}^{\mathrm{E}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 e^{i2\pi f\tau}\, df\,. \tag{10}$$

Mit $E = \varphi_{\mathrm{ss}}^{\mathrm{E}}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2\, df$ folgt das *Parsevalsche Theorem*, das besagt, dass man die Signalenergie E_{s} auch als Integral über das Betragsspektrum erhält:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\, dt = E = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2\, df\,. \tag{11}$$

$|S(f)|^2$ heißt deshalb auch *Energiedichtespektrum*.

1.4 Leistungssignale

Viele Signale von technischer Relevanz besitzen keine endliche Signalenergie, z. B. alle periodischen Signale. Für diese Signale lässt sich aber eine Leistung

$$P_{\mathrm{s}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s^2(t)\, dt \tag{12}$$

definieren. Solche Signale heißen deshalb auch *Leistungssignale*. Da unsere bisherige Definition der Korrelationsfunktion sich eng an den Begriff der Signalenergie anlehnte, ist diese Definition für Leistungssignale entsprechend anzupassen:

$$\varphi_{\mathrm{sg}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t) g(t + \tau)\, dt\,. \tag{13}$$

[1] Die Faltung wird meistens mit dem Symbol „$*$“ beschrieben

Das Zeitintegral in der Definition von $\varphi_{\mathrm{sg}}^{\mathrm{E}}$ (Gl. (5)) wird also durch eine zeitliche Mittelung ersetzt. In der Definition $\varphi_{\mathrm{sg}}^{\mathrm{E}}$ waren die unendlichen Integrationsgrenzen unproblematisch, da ein Energiesignal hinreichend schnell verschwindet. Für Leistungssignale ist das jedoch nicht der Fall. In der praktischen Anwendung ist daher darauf zu achten, dass die Zeit T, über die in Gl. (13) gemittelt wird, groß genug ist.

1.5 Fourieranalyse

Da Sinus- und Cosinus-Funktionen nicht nur orthogonal zueinander sind, sondern auch ein vollständiges Funktionensysthem darstellen, lässt sich jede Funktion nach diesem Funktionensysthem entwickeln (*Fourierentwicklung*):

$$s(t) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\sin(\omega t) + B(\omega)\cos(\omega t)\right]\, d\omega\,. \tag{14}$$

Für periodische Signale der Periodenlänge T geht dieses Fourier-Integral in die Fourier-Reihe über:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_{\mathrm{n}}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + B_{\mathrm{n}}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]\,. \tag{15}$$

Mit Hilfe der oben gemachten Orthogonalitätsaussagen lassen sich die Fourierkomponenten A_{n} und B_{n} wie folgt bestimmen. Um die A_{n} zu bestimmen, multiplizieren wir Gl. (15) mit $\sin(2\pi nt/T)$ und mitteln zeitlich. Da alle Sinus-Anteile mit $n \neq m$ und alle Cosinus-Anteile orthogonal („unkorreliert“) zu diesen Term sind, reduziert sich das resultierende Zeitintegral zu:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} s(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} A_{\mathrm{n}}\sin^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt\,. \tag{16}$$

Das zeitliche Mittel von $\sin^2(\omega t)$ ist $1/2$, für die A_{n} folgt somit

$$A_{\mathrm{n}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} s(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt \tag{17}$$

für $n > 0$ und A_0 beliebig. Durch eine geeignete Phasenverschiebung $t \to t+\tau$ kann man $A_{\mathrm{n}} = 0$ auch für alle übrigen n erreichen. Das verschobene Signal $s(t+\tau)$ hat dann „Cosinus-Lage“ und die gesamte Entwicklung steckt in den B_{n}. Mit einer ganz analogen Überlegung ergibt sich für diese Koeffizienten $(n > 0)$

$$B_{\mathrm{n}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} s(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt\,. \tag{18}$$

Für $n = 0$ gilt

$$B_0 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} s(t)\,dt\,, \tag{19}$$

dieser zeitliche Mittelwert des Signals $s(t)$ wird auch *Gleichanteil* genannt.

Für das geeignet zeitverschobene Signal $s(t+\tau)$ gilt also

$$A_{\mathrm{n}} = 0 \quad \text{und}$$

$$B_{\mathrm{n}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{+T} s(t+\tau)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\,dt\,. \tag{20}$$

1.6 Lock-In Technik

Eine wichtige Anwendung der Korrelationstechnik ist der Lock-In Verstärker. Ein Lock-In Verstärker kann sehr kleine periodische Signale verstärken, die man sonst nicht vom Rauschen unterscheiden kann, d. h. er verbessert das Signal-zu-Rausch Verhältnis. Darüber hinaus kann man mit einem Lock-In Verstärker empfindlich die Phase von Wechselspannungen detektieren.

In der Praxis wird das zu untersuchende System durch ein periodisches Eingangs-Signal angeregt, z. B. $U_{\mathrm{in}}(t) = \hat{U}_{\mathrm{in}} \sin(\omega t)$. Das System wird im linearen Fall mit derselben Frequenz antworten, aber evtl. mit einer Phasenverschiebung Φ: $U_{\mathrm{system}}(t) = \hat{U}_{\mathrm{system}} \sin(\omega t + \Phi)$. Bei einer nichtlinearen Antwort werden höhere Harmonische auftreten. Ein Lock-In Verstärker führt eine Korrelation zwischen dem Ausgangssignal $U_{\mathrm{system}}(t)$ und einem Referenzsignal, z. B. dem Eingangssignal $U_{\mathrm{in}}(t)$ durch. Kommerzielle Lock-In Verstärker enthalten meistens einen eingebauten Frequenzgenerator zur Erzeugung des Referenzsignals.

Die Ausgangsspannung U_{out} des Lock-In Verstärkers ist dann proportional zur Autokorrelationsfunktion:

$$U_{\mathrm{out}} \propto \varphi(\Phi) = \lim_{T \to \infty} \frac{\hat{U}_{\mathrm{in}} \hat{U}_{\mathrm{system}}}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\omega t + \Phi)\, dt = \frac{\hat{U}_{\mathrm{in}} \hat{U}_{\mathrm{system}}}{2} \cos(\Phi)\,. \tag{21}$$

Das Ausgangssignal wird also maximal, wenn die Phasenverschiebung $\Phi = 0$ ist. Überprüfen Sie Gl. (21) durch Ausrechnen des Integrals.

2 Geräte und Zubehör

- Frequenzgenerator (HP 33120A, 15MHz)
- Oszilloskop (HP 54603B, 60 MHz)
- Timer/Counter (Philips PM 6622, 80 MHz)
- Multimeter (Keithley 177 Microvolt DMM bzw. 179 TRMS)
- Eimerkette, Multiplikator, Tiefpassfilter, Integrator, Stromquelle mit Verstärker

3 Aufgaben & Hinweise

3.1 Autokorrelation

- Überprüfen Sie die Zeitverzögerung der Eimerkette experimentell.
- Nehmen Sie Autokorrelationsfunktionen von Sinus- Dreieck- und Rechtecksignalen experimentell auf. Welche Form wird das Mess-Signal bei einer festen Verzögerung τ haben?
- Berechnen Sie die AKF von $s(t) = \sin \omega t$ auch analytisch mit Hilfe der Eulerschen Identität

  $$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)\,, \tag{22}$$

  und vergleichen Sie das Ergebnis grafisch mit den experimentellen Daten.
- Vergewissern Sie sich, dass Sinussignale unterschiedlicher Frequenz unkorreliert, also orthogonal sind.

3.2 Fourieranalyse

Gleichung (20) entspricht formal einem Korrelationsintegral. Benutzen Sie den Aufbau zur Messung von Korrelationsfunktionen für die Bestimmung der Fourier-Komponenten eines Rechtecksignals, das Sie einem zweiten Generator entnehmen. Wie muss die Verzögerung τ gewählt werden? Erläutern Sie die Analogie zwischen analytischer und experimenteller Bestimmung der Fourier-Koeffizienten. Tragen Sie $1/B_\mathrm{n}$ gegen n für $n > 0$ auf und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Theorie, indem Sie Gl. (18) für ein Rechtecksignal lösen. Dazu reicht es, das Integral statt über die gesamte Zeitachse nur über eine Periode zu erstrecken:

$$B_\mathrm{n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt\,. \tag{23}$$

Tatsächlich wird meistens Gl. (23) zur Bestimmung der Fourierkomponenten angegegeben, wo liegen aber die Vorteile von Gl. (18)?

Setzen Sie nun für $s(t)$ ein Rechtecksignal der Periode T ein, mit

$$s(t) = \begin{cases} 0 & : \quad -\pi < t/T < -\pi/2 \quad \text{bzw.} \quad \pi/2 < t/T < \pi \\ U_0 & : \quad -\pi/2 < t/T < \pi/2\,. \end{cases} \tag{24}$$

Wie ist die Übereinstimung mit dem Experiment?

3.3 Korrelationsfunktion und Fouriertransformation

Betrachten Sie erneut die AKF der Rechteckfunktion aus Abschnitt 3.1 und schreiben Sie die Rechteckfunktion als Fourierreihen auf. Zerstreuen Sie Ihre Bedenken, was die Vertauschbarkeit von Integral- und Summenbildung angeht, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Fourierentwicklung eines Dreicksignals. Vergleichen Sie auch mit den experimentellen Ergebnissen aus 3.1. Können Sie ähnliche Überlegungen auch für die AKF einer Dreiecksfunktion anstellen?

3.4 Lock-In Technik

Es soll ein kleiner Widerstand $R_\mathrm{x} < 10\,\Omega$ vermessen werden. Der Strom, der durch den Widerstand fließt, liegt im Bereich des thermischen Rauschens, so dass sich der Widerstandswert nicht direkt aus der am Widerstand abfallenden Spannung bestimmen lässt. Wie groß ist die Spannung, die am Widerstand R_x abfällt? Wie groß ist die verstärkte Ausgangsspannung U_amp in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_in und den verwendeten Widerständen? Überlegen Sie sich eine Schaltung mit der man R_x bestimmen kann.

4 Fragen zur Vorbereitung

- Was ist der Unterschied zwischen Energiesignalen und Leistungssignalen?
- Wie sehen die Autokorrelationsfunktionen von Sinus-, Cosinus-, Rechteck- und Dreick-Funktionen aus?
- Für welche Verzögerungen τ wird die Autokorrelationsfunktion maximal?
- Wie lassen sich die zeitliche Verzögerung, die Multiplikation und die Integration von Signalen elektronisch realisieren?
- Was versteht man unter Faltung?
- Wie ist ein Lock-In Verstärker aufgebaut und was kann man mit ihm messen?

- Wie kann man sehr kurze Laserpulse (10^{-12} s) mittels Autokorrelation messen, selbst wenn es keine „Uhr“ gibt?