1 Quantitative Beschreibung des Lasers mit einem einfachen Modell

1.1 Aufstellung von Ratengleichungen

1.1.1 Vereinfachtes Lasermodell

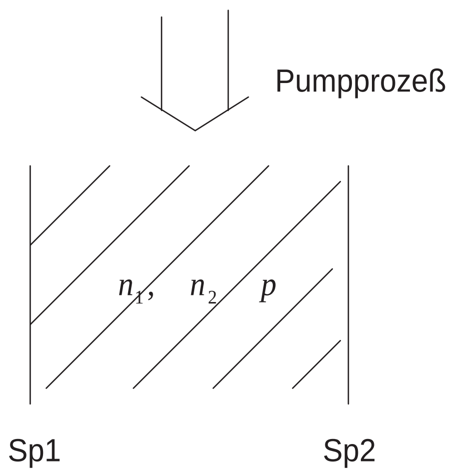

Abbildung 1: Der Spiegel Sp1 habe eine Reflexion $R = 1$; er wird als "Endspiegel" bezeichnet. Der Spiegel Sp2 habe eine endliche, aber kleine Transmission; er wird "Auskoppelspiegel" genannt. n_1 und n_2 sind die Teilchendichten im Zustand 1 bzw. 2. p charakterisiert die Energiedichte des Strahlungsfeldes.

(a) Fabry–Pérot–Resonator sei gleichmäßig gefüllt mit laseraktivem Material

(b) Pumpmechanismus erzwinge ortsunabhängig Übergänge auf Pumpübergang

(c) Nur eine einzige Mode des Resonators sei in Wechselwirkung mit laseraktivem Material

(d) Alle Ortsabhängigkeiten des Strahlungsfeldes werden vernachlässigt

Anmerkung: In FP–Resonator stehende Wellen $\Rightarrow$ starke Ortsabhängigkeiten. Deshalb betrachtet die Theorie gern (unidirektionale) Ringresonatoren.

1.1.2 Wirkung der Laserprozesse auf die Besetzungszahlen

Zunächst Betrachtung der Zustände 1 und 2 unter Wirkung des Laserfeldes (vgl. Abb. 2; n_1, n_2 Besetzungsdichte; alle Zustände seien nichtentartet)
Nach Einstein gilt für die Absorption:

$$\left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{Abs} = -B_{12} \cdot n_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\nu) g(\nu) d\nu = -\left.\frac{dn_2}{dt}\right|_{Abs} \tag{1}$$

Einsteinkoeffizient spektrale Linienformfunktion
Energiedichte

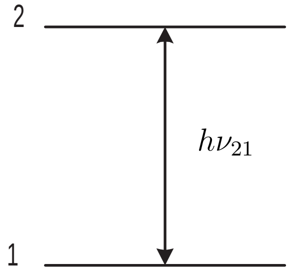

Abbildung 2: Energieschema eines "Zweiniveauatoms"

$g(\nu)$ ist normiert: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)d\nu = 1$.

Für thermisches Licht und atomare Absorber gilt i. a.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\nu)g(\nu)d\nu \approx \rho(\nu_{21}) \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\nu)d\nu = \rho(\nu_{21}).$$

Für einen idealen Laser mit der Frequenz ν_L (d. h. $\rho(\nu) \sim \delta(\nu - \nu_L)$) gilt jedoch:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\nu)g(\nu)d\nu &= g(\nu_L) \cdot \underbrace{\int \rho(\nu)d\nu}_{\text{Energiedichte}} \\ &= g(\nu_L) \cdot \underbrace{h \cdot \nu_L}_{\substack{\text{Energie} \\ \text{eines Photons}}} \cdot \underset{\text{Photonendichte}}{p} \end{aligned}$$

(p Photonendichte). In der Laserphysik wird häufig definiert:

$$\sigma = \frac{g(\nu_L) \cdot h\nu_L \cdot B_{12}}{c} \qquad \text{"optischer Wirkungsquerschnitt bei } \nu_L\text{"}$$

$[\sigma] =$ Fläche

Für ein freies 2–Niveauatom ist auf der Linienmitte $\sigma_0 = \lambda^2/2\pi$($\lambda$ Wellenlänge des Lichtes). Im Fall einer Stoßverbreiterung gilt auf der Resonanz $\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{\Delta\nu_{nat}}{\Delta\nu_{verbr}}$. ($\Delta\nu_{nat}$ natürliche Linienbreite, $\Delta\nu_{verbr}$ Linienbreite der stoßverbreiterten Linie)

In dieser Notation schreibt sich Gl. (1):

$$\left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{Abs} = -c\sigma p \cdot n_1. \tag{2}$$

Für die induzierte Emission gilt:

$$\left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{ind} = +B_{21} \cdot n_2 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(\nu)g(\nu)d\nu = -\left.\frac{dn_2}{dt}\right|_{ind}. \tag{3}$$

Daraus wird für den monochromatischen Fall wegen $B_{21} = B_{12}$:

$$\left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{ind} = +c\sigma p \cdot n_2. \tag{4}$$

Weiter gibt es die spontane Emission:

$$\left.\frac{dn_2}{dt}\right|_{sp} = -n_2/\tau_2 = -\Gamma n_2 = -\left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{sp}. \tag{5}$$

($\Gamma = A_{21}$ Zerfallskonstante, $\tau_2 = 1/\Gamma$ Lebensdauer des Zustandes 2)

Gleichungen vom Typ

$$\dot{x}_1 = A_1 \cdot x_1 + B_1 \cdot x_2 + C_1 \cdot x_1 x_2 + \ldots$$

$$\dot{x}_2 = A_2 \cdot x_1 + B_2 \cdot x_2 + C_2 \cdot x_1 x_2 + \ldots$$

werden als "Ratengleichungen" bezeichnet. A_i, B_i, C_i usw. sind "Ratenkonstanten"

Wir gehen jetzt über zum Schema des Vierniveaulasers.

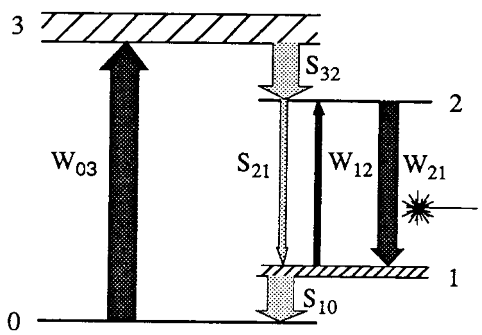

Abbildung 3: Energieschema eines Vierniveaulasers; W_{ij} bezeichnet induzierte und S_{ij} spontane Prozesse.

Der Pumpprozeß werde beschrieben durch

$$\left.\frac{dn_3}{dt}\right|_{Pump} = W_{03} \cdot n_0 \qquad W_{03} \text{ Pumprate von 0 nach 3}$$

Der Zustand 3 zerfalle *schnell*; seine Lebensdauer sei τ_3.

$$\left.\frac{dn_3}{dt}\right|_{sp} = -n_3/\tau_3.$$

Daher ist

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{03} \cdot n_0 - n_3/\tau_3.$$

Für konstantes $W_{03} \cdot n_0$ ist die stationäre Lösung

$$n_3 = W_{03} \cdot n_0 \cdot \tau_3. \tag{6a}$$

Sie stellt sich innerhalb einiger τ_3 ein. Sofern $W_{03} \cdot n_0$ sich innerhalb der Zeit τ_3 nur wenig ändert, gilt diese Lösung auch, wenn $W_{03} \cdot n_0$ nicht konstant ist, d. h. n_3 folgt mit einer Zeitkonstante τ_3 dem Pumpprozeß. Der Anteil η der Atome in 3 zerfalle in 2. Daher gilt

$$\left.\frac{dn_2}{dt}\right|_{Pump} = +\eta n_3/\tau_3 = W_{03} \cdot n_0 \cdot \eta. \qquad (\eta \text{ "Verzweigungsverhältnis"}) \tag{6b}$$

Wir definieren durch $W_p = \eta \cdot W_{03}$ die "Pumprate des oberen Laserzustandes".

Insgesamt ergibt sich:

$$\frac{dn_2}{dt} = \underbrace{W_p \cdot n_0}_{\text{Pumpterm}} - \underbrace{\frac{n_2}{\tau_2}}_{\substack{\text{spontane}\\\text{Emission}}} - \underbrace{c\sigma p \cdot n_2}_{\text{ind.Emiss.}} + \underbrace{c\sigma p \cdot n_1}_{\text{Absorption}}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = \underbrace{-\frac{n_1}{\tau_1}}_{\substack{\text{Zerfall}\\\text{nach 0}}} + \underbrace{\frac{n_2}{\tau_2}}_{\substack{\text{Zerfall}\\\text{aus 2}}} + \underbrace{c\sigma p \cdot n_2}_{\text{ind.Emiss.}} - \underbrace{c\sigma p \cdot n_1}_{\text{Absorption}}$$

Im stationären Fall folgt aus der letzten Gl.:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\frac{1}{\tau_2} + c\sigma p}{\frac{1}{\tau_1} + c\sigma p}$$

Aus qualitativen Überlegungen hatte sich die Forderung $\tau_1 \ll \tau_2$ ergeben.
Wir beschränken uns ferner auf $c\sigma p \ll \frac{1}{\tau_1}$. Dann ist

$$\frac{n_1}{n_2} \approx \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{c\sigma p}{\frac{1}{\tau_1}} \ll 1.$$

Daher gilt für die *Inversion* n

$$n = n_2 - n_1 \approx n_2.$$

Auf Grund der Konstanz der Gesamtdichte n_{tot} der laseraktiven Teilchen ergibt sich

$$\Longrightarrow \quad n_0 = n_{tot} - n_1 - n_2 - n_3 \approx n_{tot} - n.$$

Daher erhalten wir für n die DGl.

$$\frac{dn}{dt} = W_p(n_{tot} - n) - n(\frac{1}{\tau_2} + c\sigma p)$$

bzw. mit $1/\tau_2 = 1/\tau = \Gamma$

$$\boxed{\frac{dn}{dt} = -n(\Gamma + W_p + c\sigma p) + W_p \cdot n_{tot}} \tag{7a}$$

1.1.3 Wirkung auf das Strahlungsfeld

Bei jedem Absorptionsprozeß wird ein Photon im Resonator vernichtet, und die Besetzung von $|1>$ nimmt um 1 ab; bei jedem induzierten Emissionsprozeß wird ein Photon erzeugt, und die Besetzung von $|1>$ nimmt um 1 zu. Daher gilt:

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{Abs} = \left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{Abs} = -\left.\frac{dn_2}{dt}\right|_{Abs};$$

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{ind} = +\left.\frac{dn_1}{dt}\right|_{ind} = -\left.\frac{dn_2}{dt}\right|_{ind}.$$

Der Beitrag der spontanen Emission zu p spielt bei den meisten Lasern keine große Rolle.

Für p gilt:

$$\frac{dp}{dt} = \left.\frac{dp}{dt}\right|_{Abs} + \left.\frac{dp}{dt}\right|_{ind} + \left.\frac{dp}{dt}\right|_{Verluste}.$$

Ansatz:

$$\left.\frac{dp}{dt}\right|_{Verluste} = -\frac{p}{\tau_{ph}}$$

(τ_{ph} "Photonenlebensdauer"; Zeitkonstante, mit der Photonendichte im Resonator zerfällt).

Insgesamt gilt:

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = (c\sigma n - \frac{1}{\tau_{ph}}) \cdot p} \tag{7b}$$

(7a) und (7b) "Ratengln. des 4–Niveaulasers" (in einfachster Form).

Die Gleichungen (7a) und 7b) sind *nichtlineare* DGln., da beide einen Term $n \cdot p$ enthalten.

1.2 Stationäre Lösungen der Ratengleichungen

$$\frac{dp}{dt} > 0 \quad \text{erfordert} \quad c\sigma n > \frac{1}{\tau_{ph}}$$

bzw. $n > n_{th}$ mit

$$n_{th} = \frac{1}{c\sigma\tau_{ph}} \qquad \text{"Schwellinversion"} \tag{8}$$

Im stationären Betrieb: $\frac{dp}{dt} = \frac{dn}{dt} = 0$
Aus (7a)

$$n = \frac{W_p n_{tot}}{\Gamma + W_p + c\sigma p} \tag{9}$$

Aus (7b)

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1.\text{Lsg.}: & p = 0 \\ 2.\text{Lsg.}: & n = n_{th} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1. Lsg. von (7a), (7b):

$$\begin{cases} p = 0 \\ n_{dunkel} = \frac{W_p n_{tot}}{\Gamma + W_p} \end{cases} \tag{10}$$

Gl. (9) läßt sich damit schreiben als

$$n = \frac{n_{dunkel}}{1 + \frac{c\sigma}{\Gamma + W_p} \cdot p} = \frac{n_{dunkel}}{1 + \frac{p}{p_s}} \tag{11}$$

mit

$$p_s = \frac{\Gamma + W_p}{c\sigma} \qquad \text{"Sättigungsphotonendichte"}$$

[Es wird sich zeigen: $W_p \ll \Gamma$]

> Im Fall $p = p_s$ werden spontane und induzierte Emission gleich wahrscheinlich.

Sättigungsintensität: $I_s = p_s \cdot c \cdot h \cdot \nu \approx \frac{h\nu}{\sigma \cdot \tau}$
$\sigma_0 = 10^{-15} m^2, \Gamma = 10^8 s^{-1}, \nu = 5 \cdot 10^{14} s^{-1} \Rightarrow I_s = 3W/cm^2$

2. Lsg.: Für $p \neq 0$ muß gelten: $n = n_{th}$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_{dunkel}}{1 + p/p_s} = n_{th}$$

$$\Rightarrow \quad p = p_s\left(\frac{n_{dunkel}}{n_{th}} - 1\right)$$

$$= W_p \cdot n_{tot}\tau_{ph} - \frac{W_p + \Gamma}{c\sigma}$$

Also gilt (wegen $p \geq 0$ nur für $W_p \geq W_{th}$)

$$p = (W_p - W_{th}) \cdot (n_{tot} - n_{th}) \cdot \tau_{ph} \tag{12a}$$

mit

$$W_{th} = \frac{\Gamma \cdot n_{th}}{n_{tot} - n_{th}}$$

> W_{th} ist die Pumprate, mit der gerade die Schwellinversion erreicht wird

In guter Näherung gilt wegen $n_{th} \ll n_{tot}$

$$p = (W_p - W_{th}) \cdot n_{tot} \cdot \tau_{ph} \tag{12b}$$

mit

$$W_{th} = \Gamma \cdot \frac{n_{th}}{n_{tot}}$$

Praktisch gilt $W_p < 10W_{th} \ll \Gamma$

> Wegen $n_{th} << n_{tot}$ ist beim Vierniveaulaser $W_{th} << \Gamma$!