Diplomarbeit

Toruswirkungen auf Homotopie komplex projektiven Räumen

Michael Wiemeler

6. September 2006

Betreut von Prof. Dr. Anand Dessai

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1972 vermutete T. Petrie [25]:

Petrie-Vermutung. *Es sei X ein Homotopie-$\mathbb{C}P^n$, d.h. eine geschlossene $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^n$ ist. Außerdem operiere S^1 differenzierbar und nicht trivial auf X und es sei $h : X \to \mathbb{C}P^n$ eine Homotopieäquivalenz. Dann besteht der folgende Zusammenhang zwischen den Pontrjagin-Klassen von $\mathbb{C}P^n$ und X:*

$$h^*p(\mathbb{C}P^n) = p(X)$$

Diese Vermutung wurde in verschiedenen Spezialfällen bewiesen [25; 26; 8; 17]. Unter anderem zeigte A.Hattori [10], dass die Vermutung zutrifft, falls die S^1-Operation auf X von „linearem Typ“ oder vom „Petrie-Typ“ ist. Es ist bekannt, dass diese Bedingung erfüllt ist, falls X^{S^1} aus höchstens vier Zusammenhangskomponenten besteht [20; 30]. Da $\chi(X^{S^1}) = \chi(X)$ gilt und die Zusammenhangskomponenten von X^{S^1} Kohomologie komplex projektive Räume sind, d.h. für jede Zusammenhangskomponente F_0 von X^{S^1} gilt $H^*(F_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\xi_0]/(\xi_0^{n_0+1})$ mit $\deg \xi_0 = 2$ und $n_0 = \frac{1}{2} \dim F_0$, ist diese Bedingung erfüllt, falls $n \leq 3$ ist. Außerdem ist bekannt, dass jede S^1-Wirkung auf einem Homotopie-$\mathbb{C}P^4$ von linearem Typ ist [17].

Später wurde von A. Dessai und B. Wilking [9] gezeigt, dass eine effektive Operation eines Torus vom Rang r auf X von linearem Typ ist, falls $n < 4r - 1$.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist die folgende Verallgemeinerung dieser Resultate.

Theorem 1.1. *Der Torus T vom Rang r operiere differenzierbar und effektiv auf dem Homotopie-$\mathbb{C}P^n$ X.*

(i) Falls X^T aus höchstens $4r - 1$ Zusammenhangskomponenten besteht, ist die T-Operation auf X von linearem Typ.

(ii) Falls X^T aus $4r$ Zusammenhangskomponenten besteht, ist die T-Operation von linearem Typ oder vom Petrie-Typ.

(iii) Falls $n = 4r$ ist, ist die T-Operation auf X von linearem Typ.

In Kapitel 2 werden mit Hilfe äquivarianter Kohomologie einige Struktursätze über Toruswirkungen auf Kohomologie komplex projektiven Räumen hergeleitet. Diese werden in Kapitel 3 verwendet, um Theorem 1.1 zu beweisen. Kapitel 4 befasst sich unter anderem mit dem oben erwähnten Resultat von A. Hattori. Mit Hilfe einfach zusammenhängender Chirugie wird außerdem gezeigt, dass es im Homotopietyp einer geschlossenen Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 5$ bis auf Diffeomorphie nur endlich viele weitere Mannigfaltigkeiten mit den gleichen Pontrjagin-Klassen gibt.

Aus diesen beiden Resultaten und Theorem 1.1 ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 1.2. *Für alle $n \geq 3$ gibt es bis auf Diffeomorphie höchstens endlich viele Homotopie-$\mathbb{C}P^n$s, die eine effektive differenzierbare Operation eines Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$ zulassen.*

Da es für $n \geq 3$ unendlich viele paarweise nicht diffeomorphe Homotopie-$\mathbb{C}P^n$s gibt [31; 24; 14], impliziert dieses Korollar, dass fast alle von ihnen keine effektive differnzierbare Operation eines Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$ zulassen.

Aus Therorem 1.1 und dem Ergebnis von A. Hattori folgt außerdem:

Korollar 1.3. *Es sei X ein Homotopie-$\mathbb{C}P^n$, der eine effektive differenzierbare Operation eines Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$ zulässt. Dann sind X und $\mathbb{C}P^n$ tangential homotopieäquivalent, d.h. es gibt eine Homotopieäquivaelenz $h : X \to \mathbb{C}P^n$, so dass TX und $h^*T\mathbb{C}P^n$ stabil isomorph sind.*

Die Aussage des letzten Korollars ist äquivalent zur folgenden Aussage [21; 12].

Korollar 1.4. *Es sei X ein Homotopie-$\mathbb{C}P^n$, der eine effektive differenzierbare Operation eines Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$ zulässt. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $X \times \mathbb{R}^k$ und $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}^k$ diffeomorph sind.*

Im Folgenden werden diese Bezeichnungen verwendet.

Definition 1.5. Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann wird ein topologischer Raum X zusammen mit einer stetigen Operation $\Phi : G \times X \to X$ als *G-Raum* bezeichnet.

Eine *G-Mannigfaltigkeit* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer differenzierbaren Operation $\Phi : G \times M \to M$. Eine G-Mannigfaltigkeit M wird als *orientierte G-Mannigfaltigkeit* bezeichnet, falls M orientiert ist und die G-Operation auf M orientierungserhaltend ist.

Eine *G-Abbildung* oder *äquivariante Abbildung* ist eine stetige bzw. differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen G-Räumen bzw. G-Mannigfaltigkeiten mit $f(gx) = gf(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in X$.

Eine *G-Homotopie* H zwischen G-Abbildungen $f, g : X \to Y$ ist eine G-Abbildung $H : X \times I \to Y$ mit $H(\cdot, 0) = f$ und $H(\cdot, 1) = g$. Dabei ist die Operation auf $X \times I$ gegeben durch die Operation auf X und die triviale Operation auf I.

2 Äquivariante Kohomologie

2.1 Borel-Konstruktion

Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann gibt es ein G-Prinzipalbündel $\pi : EG \to BG$ mit kontrahierbarem Totalraum EG und parakompakter Basis BG. Es ist bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt und besitzt die folgende universelle Eigenschaft:

> Ist $E \to X$ ein G-Prinzipalbündel über einem parakompakten Raum X, dann gibt es eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $f_E : X \to BG$, so dass $E \cong f_E^* EG$.

Also ist durch

$$\begin{aligned} \left\{\ G\text{-Prinzipalbündel über } X\ \right\} &\to [X, BG] \\ E &\mapsto f_E \end{aligned}$$

eine natürliche Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von G-Prinzipalbündeln über dem Raum X und den Homotopieklassen von Abbildungen $X \to BG$ gegeben.

Ist speziell $G = SO(n)$, dann lässt sich $ESO(n) \to BSO(n)$ wie folgt konstruieren. Für $k \geq 0$ identifiziere $SO(n)$ mit der Untergruppe der Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & E_k \end{smallmatrix}\right)$ mit $A \in SO(n)$ von $SO(n+k)$ und $SO(k)$ mit der Untergruppe der Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} E_n & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ mit $A \in SO(k)$. Dann setze $ESO(n)^k = SO(n+k)/SO(k)$ und $BSO(n)^k = ESO(n)^k/SO(n)$, wobei $SO(k)$ und $SO(n)$ durch Rechtsmultiplikation operieren. Es gibt Inklusionen $ESO(n)^k \hookrightarrow ESO(n)^{k+1}$ und $BSO(n)^k \hookrightarrow BSO(n)^{k+1}$. Nun setze $ESO(n) = \varinjlim ESO(n)^k$ und $BSO(n) = \varinjlim BSO(n)^k$. Dann ist $ESO(n)^k$ $k-1$-fach zusammenhängend und $ESO(n)$ kontrahierbar [16, S.83], d.h. $ESO(n) \to BSO(n)$ ist das gesuchte Bündel. Da jede kompakte Lie-Gruppe G zu einer Untergruppe einer $SO(n)$ isomorph ist, haben $EG = ESO(n)$ und $BG = ESO(n)/G$ die gewünschten Eigenschaften.

Mit Hilfe der exakten Homotopiesequenzen für die Faserungen $EG^k \to BG^k$ und $EG \to BG$ sieht man, dass für $q < k$

$$\pi_q(BG^k) \cong \pi_{q-1}(G) \cong \pi_q(BG).$$

Daher zeigt die obige Konstruktion, dass es eine Folge geschlossener, orientierbarer Mannigfaltigkeiten BG^k, $k \geq 0$, mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- $\forall k \in \mathbb{N}\ \ BG^k \subset BG^{k+1}$
- $BG = \bigcup_k BG^k$
- $\forall q \geq 0\ \exists k > 0\ \forall \tilde{k} \geq k\ \ H^q(BG) \cong H^q(BG^{\tilde{k}})$

- $EG^k = \pi^{-1}(BG^k)$ ist eine geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeiten, auf der G orientierungserhaltend operiert.

Es sei nun X ein G-Raum. Dann wird durch $(h,x)g = (hg, g^{-1}x)$ eine rechtsseitige G-Operation auf $EG \times X$ definiert. Der Bahnenraum $X_G = EG \times_G X$ dieser Operation wird durch $[h,x] \mapsto \pi(h)$ zu einem X-Faserbündel über BG und wird als *Borel-Konstruktion* von X bezeichnet. Dabei bezeichnet $[h,x] \in X_G$ die Restklasse von $(h,x) \in EG \times X$.

Die Kohomologie von X_G wird als *äquivariante Kohomologie* $H^*_G(X) = H^*(X_G)$ von X bezeichnet. Durch sie wird sowohl die Topologie des Raumes X als auch die G-Operation auf X beschrieben.

Ist $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G, dann sei $f : BH \to BG$ die klassifizierende Abbildung des G-Bündels $EH \times_H G \to BH$. f ist bis auf Homotopie eindeutig bestimmt und es gilt $X_H \cong f^* X_G$. Insbesondere gibt es einen natürlichen Homomorphismus $\mathrm{res}^G_H : H^*_G(X) \to H^*_H(X)$. Ist speziell $H = \{1\}$, so erhält man $\mathrm{res} : H^*_G(X) \to H^*_1(X) = H^*(X)$ und dieser Homomorphismus stimmt mit dem von der Inklusion einer Faser $X \hookrightarrow X_G$ induzierten Homomorphismus überein.

Ist M eine geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit mit orientierungserhaltender G-Operation, dann ist auch $M^k_G = EG^k \times_G M$ orientierbar und zwischen M^k_G und M_G bestehen die gleichen Zusammenhänge wie zwischen BG^k und BG. Insbesondere besitzt M_G den Homotopietyp eines CW-Komplexes.

2.2 Lokalisierung

In diesem Abschnitt wird das Lokalisierungstheorem für die äquivarianter Kohomologie diskutiert. Es wird im nächsten Abschnitt dazu verwendet die Kohomologie der Fixpunktmenge einer Torusoperation auf einem Kohomologie komplex projektiven Raum zu berechnen.

Eine multiplikative Halbgruppe $S \supset \{1\}$, die im Zentrum eines Rings R enthalten ist, wird als multiplikatives System bezeichnet. Ist M ein R-Modul, dann besteht der lokalisierte Modul $S^{-1}M$ aus den Brüchen $\frac{m}{s}$ mit $m \in M, s \in S$ und es gilt $\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2}$ genau dann, wenn es ein $s \in S$ mit $ss_2m_1 = ss_1m_2$ gibt. $S^{-1}M$ ist ein $S^{-1}R$-Modul und $M \mapsto S^{-1}M$ ein exakter Funktor.

Ist G ein Torus vom Rang r oder $G = \mathbb{Z}_p^r$ und $k = \mathbb{Q}$ bzw. $k = \mathbb{Z}_p$, p prim, so gilt

$$H^*(BG;k) \cong \begin{cases} k[t_1,\dots,t_r] & \text{für } G = T, k = \mathbb{Q} \\ k[t_1,\dots,t_r] & \text{für } G = Z_2^r, k = \mathbb{Z}_2 \\ k[t_1,\dots,t_r] \otimes \Lambda[v_1,\dots,v_r] & \text{für } G = Z_p^r, k = \mathbb{Z}_p, p \neq 2 \end{cases}$$

Dabei gilt im ersten und dritten Fall $\deg v_j = 1$, $\deg t_j = 2$. Im zweiten Fall ist $\deg t_j = 1$. In all diesen Fällen sei $R = k[t_1,\dots,t_r] \subset H^*(BG;k)$ und $S = R - \{0\}$.

Theorem 2.1 ([15, S.40,45]). *Es seien G wie oben und M eine kompakte G-Mannigfaltigkeit. Dann ist der durch die Inklusion induzierte Homomorphismus*

$$S^{-1}H^*_G(M;k) \to S^{-1}H^*_G(M^G;k)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Zunächst wird $M^G = \{x \in X; S \cap \ker\{H^*(BG) \to H^*(BG_x)\} = \emptyset\}$ gezeigt. Dazu reicht es zu zeigen, dass für jede echte abgeschlossene Untergruppe $H \subsetneq G$ $\ker\{H^*(BG) \to H^*(BH)\} \cap S$ nicht leer ist.

Falls $G = \mathbb{Z}_p^r$ ist, so ist H isomorph zu $\mathbb{Z}_p^{r'}$ mit $r' < r$. Also ist $\ker\{H^*(BG) \to H^*(BH)\} \cap S \neq \emptyset$.

Es sei nun G ein Torus vom Rang r und T' die Zusammenhangskomponente der 1 von H. Dann ist T' ein Untertorus von T, $U = H/T'$ eine endliche abelsche Gruppe und $\ker\{H^*(BG) \to H^*(BH) \to H^*(BT')\} \cap S \neq \emptyset$. Außerdem ist $BH = EG/H = (EG/T')/U = BT'/U$. Nach [6, S.141-142] gibt es daher eine *Transferabbildung* $\mu^* : H^*(BT') \to H^*(BH)$, so dass für die Projektion $\pi : BT' \to BH$ $\mu^*\pi^* = |U|$ gilt. Also ist $\pi^* : H^*(BH) \to H^*(BT')$ injektiv.

Damit ist $M^G = \{x \in X; S \cap \ker\{H^*(BG) \to H^*(BG_x)\} = \emptyset\}$ gezeigt.

Um nun die Behauptung zu zeigen, genügt es $S^{-1}H_G^*(M, M^G) = 0$ zu zeigen. Dies ist gleichbedeutet mit

$$\forall x \in H_G^*(M, M^G) \; \exists s \in S \;\; x\pi^*(s) = 0,$$

wobei $\pi : M_G \to BG$. Es sei nun V eine äquivariante Tubenumgebung von M^G und für $y \in M - V$ sei U_y eine äquivariante Tubenumgebung der Bahn $G(y)$ von y [6, S.306]. Dann sind $G(y)$ und U_y bzw. M^G und V G-homotopieäquivalent. Da M kompakt ist, gibt es $y_1, \ldots, y_n \in M - V$, so dass M durch V und $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ überdeckt wird. Da $M^G \subset V$ ist, folgt

$$\forall i = 1, \ldots, n \; \exists s_i \in S \;\; \iota_1^*\pi^*(s_i) = 0 \in H_G^*(U_{y_i}) = H_G^*(G(y_i)) = H^*(BG_{y_i})$$

Dabei sind $\iota_1 : U_{y_i} \hookrightarrow M$ und $\iota_2 : M \hookrightarrow (M, U_{y_i})$ die Inklusionen.

Mit der langen exakten Sequenz für das Paar folgt hieraus

$$\forall i = 1, \ldots, n \; \exists \tilde{s_i} \in H_G^*(M, U_{y_i}) \;\; \iota_2^*(\tilde{s_i}) = \pi^*(s_i).$$

Wegen $\prod_{i=1}^n \tilde{s_i} \in H_G^*(M, \bigcup_{i=1}^n U_{y_i})$ folgt für $x \in H_G^*(M, M^G) = H_G^*(M, V)$, dass $\pi^*(s)x$ im Bild von

$$0 = H_G^*(M, V \cup \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}) \to H_G^*(M, M^G)$$

liegt. □

Bemerkung. Ist G ein Torus vom Rang r, dann ist $H^*(BG; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_r]$, $\deg t_j = 2$. Mit [6, S.141-142] lässt sich daher zeigen, dass das Theorem in diesem Fall sinngemäß für Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ gilt.

Bemerkung. Bezeichnet R_0 den Quotientenkörper von R, also $R_0 = k(t_1, \ldots, t_r)$, so gilt offenbar

$$R_0 = S^{-1}R = S^{-1}H^*(BG; k)/S^{-1}N.$$

Dabei bezeichnet N das Ideal der nilpotenten Elemente von $H^*(BG; k)$. Aus dem obigen Theorem ergibt sich also

$$H_G^*(M) \otimes_{H^*(BG;k)} R_0 \cong H_G^*(M^G) \otimes_{H^*(BG;k)} R_0 \cong H^*(M^G) \otimes_k R_0,$$

da $H_G^*(M^G) \cong H^*(M^G; k) \otimes_k H^*(BG; k)$.

2.3 Kohomologie komplex projektive Räume

In diesem Abschnitt sei $G = T^r$ oder $G = Z_p^r$ und $k = \mathbb{Q}$ bzw. $k = \mathbb{Z}_p$, p prim. Außerdem sei M ein k-Kohomologie komplex projektiver Raum, d.h. eine geschlossene $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $H^*(M;k) = k[\xi_0]/(\xi_0^{n+1})$, $\deg \xi_0 = 2$, auf dem G operiert.

Lemma 2.2. *M^G ist genau dann nicht leer, wenn die Serre-Spektralsequenz $\{E_r^{p,q}\}$ für die Faserung $M \to M_G \to BG$ degeneriert, d.h. $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ für alle $p, q \geq 0$.*

Beweis. Falls die Spektralsequenz degeneriert, ist $H^*(M_G;k) \cong H^*(BG;k) \otimes H^*(M;k)$ als $H^*(BG;k)$-Modul. Also ist $S^{-1}H_G^*(M^G) \cong S^{-1}H^*(BG;k) \otimes H^*(M;k) \neq 0$.

Im anderen Fall sei $x \in M^G$ und $\{\tilde{E}_r^{p,q}\}$ die Spektralsequenz zu $(M, x) \to (M_G, x_G) \to BG$. Dann gilt für $q > 0$ $\tilde{E}_2^{p,q} \cong E_2^{p,q}$. Also genügt es zu zeigen, dass $\{\tilde{E}_r^{p,q}\}$ degeneriert. Da $\tilde{E}_2^{p,q} = 0$ für ungerade q, verschwindet das Differential d_2. Da $\tilde{E}_3^{p,0} = 0$ für alle p, sieht man, dass für einen Erzeuger ξ_p von $\tilde{E}_3^{p,2}$ gilt $d_r\xi_p = 0$ für $r \geq 3$. Da für gerade q durch $\xi_p \cup \xi_0^{\frac{q}{2}-1}$ ein Erzeuger von $\tilde{E}_3^{p,q}$ gegeben ist, verschwinden alle Differentiale d_r mit $r \geq 3$. □

Korollar 2.3. *M^G ist nicht leer, falls $G = T^r$ oder $G = \mathbb{Z}_p^r$ und $p \nmid n + 1$.*

Beweis. Falls $G = T^r$ und p oder q ungerade ist, ist $E_2^{p,q} = 0$, also degeneriert die Spektralsequenz.

Falls $G = \mathbb{Z}_p^r$ ist und p kein Teiler von $n + 1$ ist, kann wie folgt geschlossen werden. Da $E_2^{p,q} = 0$ für ungerade q, verschwindet zunächst das Differential d_2. Also gilt $E_3^{p,q} = H^p(B;k) \otimes H^q(M;k)$. Sei $\xi_0 \in H^2(M;k) = E_3^{0,2}$ ein Erzeuger. Dann gilt

$$0 = d_3\xi_0^{n+1} = (n+1)\xi_0^n \cup d_3\xi_0 \in E_3^{3,2n} = H^{2n}(M) \otimes H^3(BG).$$

Also ist $d_r\xi_0 = 0$ für $r \geq 3$.Wie im Beweis des Lemmas sieht man nun, dass alle Differentiale d_r mit $r \geq 3$ verschwinden. □

Bemerkung. Da es auf $\mathbb{C}P^1 = S^2$ eine freie $\mathbb{Z}_2$-Operation gibt, kann im obigen Korollar nicht auf die Bedingung $p \nmid n + 1$ verzichtet werden.

Theorem 2.4. *Es sei M^G nicht leer und $p \neq 2$. Außerdem seien $F_1, \ldots, F_l$ die Zusammenhangskomponenten von M^G, $q_i \in F_i$, $\tilde{\iota}_i : q_i \hookrightarrow F_i$, $\iota_i : F_i \hookrightarrow M$ die Inklusionen. Dann gilt:*

(i) $H_G^*(M, k) \cong H_G^*(pt, k)[\xi]/(f(\xi))$ *mit* $\deg \xi = 2$ *und* $f(x) \in R[x]$ *als* $H_G^*(pt;k)$*-Algebra.*

(ii) $\mathrm{res} : H_G^*(M;k) \to H^*(M;k)$ *ist gegeben durch* $\xi \mapsto \xi_0$.

(iii) *f zerfällt vollständig in Linearfaktoren und*

$$\{F_1, \ldots, F_l\} \to \{\textit{Nullstellen von } f\}$$
$$F_i \mapsto a_i \in R$$

ist eine Bijektion, wobei $a_i = \tilde{\iota}_i^*\iota_i^*(\xi) \in R$ $(i = 1, \ldots, l)$.

(iv) *Bezeichnet* ξ_{0i} *die Einschränkung von* ξ_0 *auf* F_i*, so gilt* $H^*(F_i;k) = k[\xi_{0i}]/(\xi_{0i}^{n_i+1})$ *und* $\sum_i (n_i+1) = n+1$*, d.h.* F_i *ist ein k-Kohomologie komplex projektiver Raum.*

Beweis. (vgl. [15, S. 47-51]) Da die Serre-Spektralsequenz für die Faserung $M \to M_G \to BG$ degeneriert, ist

$$H_G^*(M,k) \cong H^*(BG,k) \otimes H^*(M,k)$$

als $H^*(BG,k)$-Modul. Also gibt es ein $\xi \in H_G^2(M;k)$ mit $\mathrm{res}(\xi) = \xi_0$. Und durch $\{1, \xi, \dots, \xi^n\}$ ist eine $H^*(BG,k)$-Modulbasis von $H_G^*(M;k)$ gegeben. Also gibt es ein Polynom $f(x) = x^{n+1} + c_1 x^n + \cdots + c_{n+1} \in R[x]$, so dass

$$\rho : H^*(BG,k)[x]/(f(x)) \to H_G^*(M) \;\; x \mapsto \xi \tag{2.1}$$

ein Isomorphismus von $H^*(BG,k)$-Algebren ist.

Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R_0[x] \arrow[r, "\rho"] \arrow[drr, "\rho_i"'] & H_G^*(M,k) \otimes_{H^*(BG)} R_0 \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus H^*(F_i) \otimes R_0 \arrow[d] \\ & & H^*(F_i) \otimes R_0 \end{tikzcd}$$

Wegen (2.1) wird der Kern von ρ von $f(x)$ erzeugt. Es seien $f_i(x) \in R_0[x]$ normierte Polynome, so dass $\ker\{\rho_i\} = (f_i(x))$. Offenbar gilt $\ker \rho = \bigcap_i \ker \rho_i$ bzw. $f(x) = \mathrm{kgV}\{f_i(x); i\}$. Da die ρ_i surjektiv sind, erhält man

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_i \dim H^*(F_i) \otimes R_0 = \sum_i \mathrm{grad}\ f_i = \mathrm{grad}\ \prod_i f_i.$$

Daher gilt:

(i) $f(x) = \prod f_i(x)$

(ii) Die f_i sind paarweise teilerfremd.

Es sei $a_i = \tilde{\iota}_i^* \iota_i^*(\xi) \in R$. Dann ist

$$\rho_i(x - a_i) \in \tilde{H}^*(F_i) \otimes R_0$$

nilpotent, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $(x-a_i)^N \in \ker\{\rho_i\} = (f_i(x))$. Daher ist $f_i(x) = (x-a_i)^{n_i+1}$ für ein geeignetes $n_i \in \mathbb{N}$ Es folgt:

$$f(x) = \prod_i (x-a_i)^{n_i+1}$$

Außerdem sind alle a_i paarweise verschieden.

Da

$$H^2(F_i \times BG) \cong H^2(F_i) \oplus H^1(F_i) \otimes H^1(BG) \oplus H^2(BG),$$

gibt es ein $b \in H^1(F_i) \otimes H^1(BG)$, so dass $\iota_i^*(\xi) = \iota_i^*(\xi_0) + b + a_i$. Da alle Elemente von $H^1(BG)$ nilpotent sind, erhält man

$$\rho_i(x) = \iota_i^*(\xi_0) + a_i$$

Also ist

$$\rho_i(x-a_i)^d = \iota_i^*(\xi_0)^d \in H^{2d}(F_i) \subset H^*(F_i) \otimes R_0 \cong R_0[x]/((x-a_i)^{n_i+1}).$$

Da $H^{2d}(F_i)$ ein k-Vektorraum mit $\dim_k H^{2d}(F_i) = \dim_{R_0} H^{2d}(F_i) \otimes R_0$ ist, ist $\iota_i^*(\xi_0)^d$ ein Erzeuger von $H^{2d}(F_i)$ und daher $H^*(F_i;k) \cong k[\xi_0]/(\xi_0^{n_i+1})$. □

In der Situtation des Theorems gilt $H^2(M_G) \cong H^2(M) \oplus H^2(BG)$. Also sind ξ und $(a_1,\dots,a_l)$ eindeutig bis auf Addition mit Elementen aus $H^2(BG)$ bzw. Elementen der Form $(a,\dots,a)$ aus $H^2(BG)^l$ bestimmt. Die a_i werden auch als *globale Gewichte* der G-Operation bezeichnet.

Bemerkung. Eine ähnliche Argumentation liefert im Fall $p=2$, dass die Zusammenhangskomponenten von M^G $\mathbb{Z}_2$-Kohomologie komplex oder reell projektive Räume sind und die Aussagen (i),(ii), (iii) des Theorems sinngemäß gelten. Lässt sich die G-Operation auf M zu einer Operation eines Torus T fortsetzen, so zeigt die folgende Rechnung, dass alle Zusammenhangskomponenten von M^G $\mathbb{Z}_2$-Kohomologie komplex projektive Räume sind [6, S.163,378].

$$\begin{aligned}\sum_i \dim H^i(M^G;\mathbb{Z}_2) &= \sum_i \dim H^i(M;\mathbb{Z}_2) = \chi(M)\\ &= \chi(M^T) = \chi\left(\left(M^G\right)^T\right) = \chi(M^G)\\ &= \sum_i (-1)^i \dim H^i(M^G;\mathbb{Z}_2)\end{aligned}$$

Sie sind also insbesondere orientierbar.

Mit Hilfe eines universellen Koeffiziententheorems, lässt sich zeigen [6, S.393]:

Korollar 2.5. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum und T ein Torus der auf M operiert. Dann sind alle Zusammenhangskomponenten von M^T $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektive Räume.*

Im Beweis von Theorem 2.4 wurde nur zur Bestimmung der Kohomologie von M^T benutzt, dass die Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ stammen. Also gelten auch die anderen Aussagen des Theorems in der Situation des Korollars für Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Korollar 2.6. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum, auf dem der Torus T operiere. Ist $\iota_i : F_i \hookrightarrow M$ die Inklusion einer Zusammenhangskomponente von M^T. Dann wird der Kern von $\iota_i^* : H_T^*(M;\mathbb{Z}) \to H_T^*(F_i)$ von $(\xi - a_i)^{n_i+1}$ erzeugt.*

Beweis. Es seien $R = H^*(BT;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_r]$ und $R_0 = S^{-1}H^*(BT;\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}(t_1,\dots,t_r)$ Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} R[x] & \xrightarrow{\rho} & H_T^*(M) & \xrightarrow{\iota_i^*} & H^*(F_i)\otimes R \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ R_0[x] & & \xrightarrow[\rho_i]{\hspace{4em}} & & H^*(F_i)\otimes R_0 \end{array}$$

In ihm sind die vertikalen Abbildungen injektiv. Im Beweis des Theorems wurde gezeigt, dass der Kern von ρ_i von $(x-a_i)^{n_i+1}$ erzeugt wird. Mit dem Satz von Gauß folgt, dass der Kern von $\iota_i^* \circ \rho$ ebenfalls von $(x-a_i)^{n_i+1}$ erzeugt wird. Die Definiton von ρ liefert nun die Behauptung. □

Aus obiger Bemerkung folgt:

Korollar 2.7. *In der Situation des vorherigen Korollars sei H eine Untergruppe von T. Dann ist jede Zusammenhangskomponente von M^H orientierbar.*

Beweis. Es sei T' die Zusammenhangskomponente der 1 von H und für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ bezeichne T_p die Untergruppe der p-Torsion von $U = H/T'$. Dann ist $U = \bigoplus_p T_p$ und

$$M^H = \left(M^{T'}\right)^U = \left(\left(M^{T'}\right)^{T_2}\right)^{\bigoplus_{p\neq 2} T_p}.$$

Nun ist $M^{T'}$ ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum und die U-Operation auf $M^{T'}$ ergibt sich aus der Einschränkung der T/T'-Operation auf $M^{T'}$. Nach der obigen Bemerkung ist also $\left(M^{T'}\right)^{T_2}$ orientierbar. Die Behauptung folgt nun mit [6, S.175]. □

2.4 G-Vektorbündel und äquivariante charakteristische Klassen

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften von G-Vektorbündeln und äquivarianten charakteristischen Klassen gezeigt werden. Zunächst sollen aber einige Aussagen über lineare Darstellungen eines Torus wiederholt werden.

Es sei T ein Torus vom Rang k, also $T \cong \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. Dann sind alle irreduziblen komplexen Darstellungen von T eindimensional und es gibt natürliche Bijektionen

$$\left\{\begin{array}{c}\text{irreduzible komplexe}\\ T\text{-Darstellungen}\end{array}\right\} \to \mathbb{Z}^{1\times k}$$
$$(\phi : T \to S^1) \mapsto D\phi_0$$

und

$$\left\{\begin{array}{c}\text{irreduzible komplexe}\\ T\text{-Darstellungen}\end{array}\right\} \to H^1(T;\mathbb{Z})$$
$$(\phi : T \to S^1) \mapsto \phi^*(i).$$

Dabei bezeichnet i einen Erzeuger von $H^1(S^1;\mathbb{Z})$. Also ist der Darstellungsring von T gegeben durch $R(T) = \mathbb{Z}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_k, t_k^{-1}]$. Ist speziell $T = S^1$, so ist t_1 durch die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ gegeben, d.h. $t_1 : S^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ \ (g, z) \mapsto gz$.

Durch den Isomorphismus

$$\begin{aligned}
H^2(BT;\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}(H_2(BT), \mathbb{Z}) && \\
&\cong \mathrm{Hom}(\pi_2(BT), \mathbb{Z}) && BT \text{ ist einfach zusammenhängend}\\
&\cong \mathrm{Hom}(\pi_1(T), \mathbb{Z}) && ET \text{ ist kontrahierbar}\\
&\cong \mathrm{Hom}(H_1(T), \mathbb{Z}) && \\
&\cong H^1(T;\mathbb{Z}) &&
\end{aligned}$$

erhält man außerdem eine natürliche Bijektion

$$\left\{\begin{array}{c}\text{irreduzible komplexe}\\ T\text{-Darstellungen}\end{array}\right\} \to H^2(BT;\mathbb{Z})$$
$$(\phi : T \to S^1) \mapsto B\phi^*(c),$$

wobei $B\phi : BT \to BS^1$ die klassifizierende Abbildung des S^1-Bündels $ET \times_\phi S^1$ ist und $c \in H^2(BS^1;\mathbb{Z})$ die universelle erste Chern-Klasse bezeichnet. Das Element von $H^2(BT;\mathbb{Z})$ (bzw. $H^1(T;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^{1\times k}$) das unter dieser Bijektion der irreduziblen Darstellung ϕ entspricht wird auch als *Gewicht* von ϕ bezeichnet.

Die irreduziblen reellen T-Darstellugen sind durch

(i) die triviale Operation auf $\mathbb{R}$

(ii) die nicht-trivialen irreduziblen komplexen Darstellungen

gegeben. Dabei sind zwei irreduzible komplexe Darstellungen χ_1, χ_2 genau dann als reelle Darstellungen isomorph, wenn $\chi_1 = \chi_2^a$ mit $a = \pm 1$.

Bezeichnung 2.8. Um zwischen reeller und komplexer Isomorphie von T-Darstellungen zu unterscheiden, wird die folgende Notation verwendet. Es seien χ_1, χ_2 reelle oder komplexe T-Darstellungen und H eine Untergruppe von T.

(i) $\chi_1 \cong_{\mathbb{R}} \chi_2$, falls χ_1 und χ_2 als reelle T-Darstellugen isomorph sind.

(ii) $\chi_1 \cong_{H,\mathbb{R}} \chi_2$, falls χ_1 und χ_2 als reelle H-Darstellugen isomorph sind.

(iii) $\chi_1 \cong_{\mathbb{C}} \chi_2$, falls χ_1 und χ_2 als komplexe T-Darstellugen isomorph sind.

(iv) $\chi_1 \cong_{H,\mathbb{C}} \chi_2$, falls χ_1 und χ_2 als komplexe H-Darstellugen isomorph sind.

Definition 2.9. Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Ein Vektorbündel $p : E \to X$ über einem G-Raum X zusammen mit einer G-Operation auf dem Totalraum E, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $p : E \to X$ ist äquivariant.

(ii) Für alle $x \in X$ und $g \in G$ ist $g : E_x \to E_{g(x)}$ linear,

wird *G-Vektorbündel* genannt.

Das einfachste Beispiel eines G-Vektorbündels über einer G-Mannigfaltigkeit M ist das Tangentialbündel TM auf dem G durch die Differentiale der Operation auf M operiert. Ebenso wird das Normalenbündel ν_N^M einer G-Untermannigfaltigkeit N von M zu einem G-Vektorbündel.

Satz 2.10 ([2, S.38])**.** *Es sei $E \to X$ ein komplexes G-Vektorbündel und G operiere trivial auf X. Dann gibt es irreduzible G-Darstellungen $V_1, \dots, V_n$ und Vektorbündel $E_1, \dots, E_n \to X$ auf denen G trivial operiert, so dass*

$$E \cong_G \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \otimes V_i$$

Korollar 2.11. *Es sei T ein Torus und $E \to X$ ein reelles T-Vektorbündel, so dass T trivial auf der Basis X operiert. Falls die T-Operation auf E keinen Fixpunkt außerhalb des Nullschnitts besitzt, gibt es eine komplexe Struktur auf E, die es zu einem komplexen T-Vektorbündel macht.*

Beweis. Durch $E \otimes \mathbb{C}$ ist ein komplexes T-Vektorbündel über X gegeben. Es gibt also paarweise verschiedene Gewichte $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{\tilde{n}}$ und komplexe Vektorbündel $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{\tilde{n}}$, so dass

$$E \otimes \mathbb{C} \cong_T \bigoplus_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{E}_i \otimes V(\tilde{w}_i)$$

Dabei bezeichnet $V(\tilde{w}_j)$, die durch $\tilde{w}_j$ bestimmte T-Darstellung.

Da die komplexe Konjugation $\rho : E \otimes \mathbb{C} \to E \otimes \mathbb{C}$, $e \otimes z \mapsto e \otimes \overline{z}$, mit der T-Operation kommutiert, gilt für $g \in T$ und $v \in \tilde{E}_i \otimes V(\tilde{w}_i)$

$$g(\rho(v)) = \rho(g(v)) = \rho(g^{\tilde{w}_i} v) = g^{-\tilde{w}_i} \rho(v).$$

Daher gibt es ein $\tilde{w}_j$ mit $\tilde{w}_j = -\tilde{w}_i$ und $\rho(\tilde{E}_i \otimes V(\tilde{w}_i)) = \tilde{E}_j \otimes V(\tilde{w}_j)$.

Bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine hermitesche Metrik auf $\tilde{E}_i$, so induziert die Paarung

$$\tilde{E}_i \otimes \tilde{E}_j \to \mathbb{C} \qquad v_i \otimes v_j \mapsto \langle v_i, \rho(v_j) \rangle$$

einen Isomorphismus von $\tilde{E}_j$ und dem zu $\tilde{E}_i$ dualen Bündel $\tilde{E}_i^*$.

Es gibt also Gewichte $w_1, \dots, w_n$ und komplexe Vektorbündel $E_1, \dots, E_n$, so dass

$$E \otimes \mathbb{C} \cong_T \bigoplus_{i=1}^{n} (E_i \otimes V(w_i) \oplus E_i^* V(-w_i)).$$

Als reelles Vektorbündel ist $E \otimes \mathbb{C}$ isomorph zu $E \oplus E$. Unter diesem Isomorphismus wird der erste Summand mit $\{v + \rho(v); v \in E \otimes \mathbb{C}\} = \{v \in E \otimes \mathbb{C}; \rho(v) = v\} \subset E \otimes \mathbb{C}$ identifiziert.

Da für $v \in E_i \otimes V(w_i)$ $\rho(v) \in E_i^* \otimes V(-w_i)$ gilt, ist durch

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_j \otimes V(w_j) \to E \qquad v \mapsto v + \rho(v)$$

ein Isomorphismus von reellen T-Vektorbündeln gegeben. Also besitzt E eine komplexe Struktur mit der gewünschten Eigenschaft. □

Die Voraussetzungen des Korollars sind in der folgenden Situation erfüllt. Der Torus T operiere differenzierbar auf der Mannigfaltigkeit M und F_i sei eine Zusammenhangskomponente von M^T. Dann gibt es $w_{i1}, \dots, w_{ik} \in H^2(BT; \mathbb{Z}) - \{0\}$, so dass

$$\nu_{F_i}^M = \bigoplus_{j=1}^{k} \nu_i(w_{ik}). \tag{2.2}$$

Dabei entsprechen die $\nu_i(w_{ik})$ den $E_j \otimes V(w_j)$ aus dem Beweis des Korollars. Die w_{ij} sind bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt und werden als *lokale Gewichte* bei F_i der T-Operation auf M bezeichnet. Im Folgenden sei $d_{ik} = \dim \nu_i(w_{ik})$. Die T-Darstellung auf einer Faser von $\nu_{F_i}^M$ wird auch als *Normalendarstellung* $N(F_i, M)$ bei F_i bezeichnet.

Lemma 2.12. *Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $p : P \to B$ ein G-Prinzipalbündel. Dann ist $p^* : \mathrm{Vect}(B) \to \mathrm{Vect}_G(P)$ eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von Vektorbündeln über B und den Isomorphieklassen von G-Vektorbündeln über P. Die zu p^* inverse Abbildung ist durch $E \mapsto E/G$ gegeben.*

Beweis. Für endliche Gruppen wird diese Aussage in [2, S.36] gezeigt. Die dortige Argumentation bleibt auch für unendliche Gruppen richtig, sofern gezeigt werden kann, dass für ein G-Vektorbündel $\xi : E \to P$ $E/G \to B$ lokal trivial ist.

Betrachte hierzu zunächst den Fall $P = B \times G$. Es sei $s : B \to B \times G$, $x \mapsto (x, 1)$. Dann induziert

$$E \to s^*E \qquad\qquad e \mapsto e\pi_2(\xi(e))^{-1}$$

einen Homöomorphismus $E/G \to s^*E$ mit Inversem $s^*E \hookrightarrow E \to E/G$. Dabei bezeichnet $\pi_2 : B \times G \to G$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Nun folgt die lokale Trivialität von $E/G \to B$ aus der lokalen Trivialität von $s^*E \to B$.

Der allgemeine Fall folgt nun aus der lokalen Trivialität von $P \to B$. $\square$

Da für einen G-Raum X durch $EG \times X \to X_G$ ein G-Prinzipalbündel gegeben ist [6, S.75], zeigt das obige Lemma, dass die Borel-Konstruktion E_G eines G-Vektorbündels $\xi : E \to X$ durch $\xi : E_G \to X_G$, $\xi([x, v]) = [x, \xi(v)]$, zu einem Vektorbündel über X_G wird. Falls E orientiert ist und die G-Operation auf E orientierungserhaltend ist, kann E_G so orientiert werden, dass die Einbettung $E \to E_G$, $v \mapsto [e, v]$, für jedes $e \in EG$ orientierungserhaltend ist. Insbesondere gibt es einen Thom-Isomorphismus $\Phi_G : H^q_G(X) \to H^{q+n}_G(E, E - X)$.

Die Eulerkasse $e(E_G) = j^*\Phi_G(1) \in H^n_G(X)$ von E_G wird als *äquivariante Eulerklasse* $e^G(E)$ von E bezeichnet. Entsprechenend erhält man die äquivarianten Stiefel-Whitney-, Chern- und Pontrjagin-Klassen von E aus den Stiefel-Whitney-, Chern- und Pontrjagin-Klassen von E_G.

Im Folgenden sollen einige Eigenschaften dieser charakteristischen Klassen hergeleitet werden.

Korollar 2.13. *Es seien E^1, E^2 G-Vektorbündel über einem G-Raum X und $f : X_1 \to X$ eine G-Abbildung. Dann gilt*

$$\begin{aligned} w^G(E^1 \oplus E^2) &= w^G(E^1) \cup w^G(E^2) \\ w^G(f^*E^1) &= f^*w^G(E^1). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Aussagen für Chern- und Pontrjagin-Klassen gelten ebenfalls.

Beweis. Nach Lemma 2.12 gilt mit $p : EG \times X \to X_G$

$$\begin{aligned} E^1_G \oplus E^2_G &\cong p^*(E^1_G \oplus E^2_G)/G \cong (p^*(E^1_G) \oplus p^*(E^2_G))/G \\ &\cong (EG \times (E^1 \oplus E^2))/G \cong (E^1 \oplus E^2)_G. \end{aligned}$$

Ananloge Rechnungen zeigen, dass außerdem

$$E^1_G \otimes E^2_G \cong (E^1 \otimes E^2)_G \qquad\qquad f^*E^1_G \cong (f^*E^1)_G$$

gilt. Hieraus folgt die Behauptung des Korollars. $\square$

Es seien T ein Torus und V eine irreduzible komplexe T-Darstellung. Fasst man V als T-Vektorbündel über einem Punkt auf, so ist $c^T_1(V)$ das Gewicht von V. Also liefert Satz 2.10:

Korollar 2.14. *Ist in der Situation von Satz 2.10 G ein Torus, $c(E_i) = \prod_{j=1}^{\dim E_i}(1 + x_{ij})$ und a_i das Gewicht von V_i, so gilt:*

$$c^G(E) = \prod_{ij}(1 + x_{ij} + a_i)$$
$$e^G(E) = \prod_{ij}(x_{ij} + a_i)$$

A. Hattori und T. Yoshida [11] haben gezeigt, dass für einen lokal endlichen CW-Komplex X, auf dem die kompakte Lie-Gruppe G operiert und dessen Borel-Konstruktion X_G homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex ist, durch

$$\left\{ \begin{array}{c} G\text{-Linienbündel} \\ \text{über } X \end{array} \right\} \to H^2_G(X;\mathbb{Z})$$
$$L \mapsto c_1^G(L)$$

eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von komplexen G-Linienbündeln über X und $H^2_G(X,\mathbb{Z})$ gegeben ist.

Falls $H^1(X;\mathbb{Z}) = 0$ und $G = T$ ein Torus ist, ist die Abbildung $\mathrm{res} : H^2_T(X;\mathbb{Z}) \to H^2(X;\mathbb{Z})$ surjektiv. Also lässt jedes Linienbündel einen Lift der T-Operation zu, d.h. es gibt eine T-Operation auf seinem Totalraum, die es zu einem T-Vektorbündel macht.

Falls X ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum ist, gibt es also ein „äquivariantes Hopf-Bündel“ $\gamma : E(\gamma) \to X$, das $c_1^T(\gamma) = \xi$ erfüllt. Die Bedeutung von γ zeigt die folgende Aussage.

Satz 2.15. *In der obigen Situation seien $F_1, \dots, F_k$ die Zusammenhangskomponenten von X^T, $x_i \in F_i$ und χ_i die T-Darstellung auf der Faser von γ über x_i. Dann sind die globalen Gewichte der T-Operation durch die Gewichte der χ_i gegeben. Insbesondere sind die χ_i paarweise nicht isomorph.*

Beweis. Es seien $\iota_i : x_i \hookrightarrow X$ die Inklusionen. Dann gilt nach der Definition der globalen Gewichte $a_1, \dots, a_k$ und der Wahl von γ:

$$a_i = \iota_i^*\xi = \iota_i^* c_1^T(\gamma) = c_1^T(\iota_i^*\gamma)$$

Nach Theorem 2.4 sind die a_i paarweiese verschieden. Daher sind die χ_i paarweise nicht isomorph. □

Die Darstellungen χ_i werden auch als *Hopf-Darstellungen* bei F_i bezeichnet.

Satz 2.16. *S^1 operiere auf dem $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiven Raum X. Es seien $m \in \mathbb{N}$ und F_1, F_2 zwei Zusammenhangskomponenten von X^{S^1}, die in der gleichen Zusammenhangskomponente von $X^{\mathbb{Z}_m}$ enthalten sind, und a_1,a_2 die zugehörigen globalen Gewichte. Dann ist m ein Teiler von $a_1 - a_2$.*
Ist m eine Primzahl so gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Es seien $x_i \in F_i$ $(i = 1, 2)$. Sind F_1 und F_2 in der gleichen Zusammenhangskomponente von $X^{\mathbb{Z}_m}$ enthalten, so sind die $\mathbb{Z}_m$-Darstellungen auf den Fasern von γ über x_1 und x_2 isomorph. Da die Gewichte der S^1-Operation auf diesen Fasern durch a_1 bzw. a_2 gegeben sind, folgt die Behauptung.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ ein Primteiler von $a_1 - a_2$. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^*(X;\mathbb{Z}_m) & H^*_{\mathbb{Z}_m}(X;\mathbb{Z}_m) \arrow[l, "\mathrm{res}"'] \arrow[r, "\iota_i^*"] & H^*_{\mathbb{Z}_m}(x_i;\mathbb{Z}_m) \\ H^*(X;\mathbb{Z}) \arrow[u] & H_{S^1}(X;\mathbb{Z}) \arrow[l, "\mathrm{res}"'] \arrow[r, "\iota_i^*"] \arrow[u, "\mathrm{res}^{S^1}_{\mathbb{Z}_m}"] & H^*_{S^1}(x_i;\mathbb{Z}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert, sind die globalen Gewichte der $\mathbb{Z}_m$-Operation durch die Reduktion modulo m der globalen Gewichte der S^1-Operation gegeben. Da $a_1 \equiv a_2 \mod m$, folgt die Behauptung mit Theorem 2.4. $\square$

2.5 Lineare Modelle

In Hinblick auf Theorem 2.4 stellt sich die Frage, welche $a_i \in H^2(BT,\mathbb{Z})$ als globale Gewichte einer differenzierbaren Toruswirkung auf einem Kohomologie komplex projektiven Raum realisiert werden können.

Seien also $a_1,\dots,a_k \in H^2(BT,\mathbb{Z})$ paarweise verschieden, $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}^{n_i+1} \otimes V(a_i)$ die durch die a_i und n_i gegebene komplexe T-Darstellung. Bezeichnet $P(A)$ den Raum der eindimensionalen komplexen Untervektorräume von A, so wird durch die T-Operation auf A eine Operation auf $P(A)$ induziert. Offenbar gilt

$$P(A)^T = \bigcup_{i=1}^k P(\mathbb{C}^{n_i+1} \otimes V(a_i)) = \bigcup_{i=1}^k \{p \in P(A); p \subset \mathbb{C}^{n_i+1} \otimes V(a_i)\}.$$

Da das äquivariante Hopfbündel von $P(A)$ durch $\{(p,v) \in P(A) \times A; v \in p\}$ gegeben ist, erhält man mit Satz 2.15, dass die globalen Gewichte der T-Operation auf $P(A)$ durch die a_i gegeben sind.

Also lassen sich beliebige Elemente aus $H^2(BT;\mathbb{Z})$ als globale Gewichte einer Toruswirkung auf einem Kohomologie komplex projektiven Raum realisieren.

2.6 Konstruktion der Petrie-Operationen

Bei den in Abschnitt 2.5 konstruierten Toruswirkungen besteht der folgende Zusammenhang zwischen den Normalendarstellungen $N(F_i, M)$ und den Hopf-Darstellungen χ_i bei F_i

$$N(F_i, M) \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{j \neq i} (n_i + 1)\chi_j \chi_i^{-1}.$$

Falls eine Toruswirkung diese Gleichung erfüllt, wird sie als *linear* oder von *linearem Typ* bezeichnet.

W.-Y. Hsiang [15, S.108] vermutete, dass jede Toruswirkung auf einem Kohomologie komplex projektiven Raum M linear ist. Allerdings zeigte T. Petrie [25; 27], dass dies zumindest für den Fall von S^1-Operationen nicht zutrifft. In diesem Abschnitt soll die Konstruktion aus [27] auf Tori vom Rang ≥ 2 verallgemeinert werden.

Es seien T ein Torus vom Rang r, $\tilde{T} = S^1 \times T$, $p, q \geq 2$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen, $\alpha_\pm = \pm\frac{pq\pm1}{2}$ und $\chi, \rho_1, \dots, \rho_n : T \to S^1$ nicht-triviale Darstellungen.

Nun werden $\tilde{T}$-Moduln $\Omega_\pm$, N und M definiert. Es seien $\Omega_\pm = \mathbb{H}^n$ und $M = \mathbb{H} = N$, wobei die $\tilde{T}$-Operation jeweils durch

$$\begin{aligned}
(\eta, g)(u_1, \ldots, u_h) &= \eta\chi(g)^{\alpha_+}(\rho_1(g)u_1, \ldots, \rho_n(g)u_n)\chi(g)^{-\alpha_+} && \text{für } (u_1, \ldots, u_h) \in \Omega_+,\\
(\eta, g)(v_1, \ldots, v_h) &= \eta\chi(g)^{\alpha_+}(\rho_1(g)v_1, \ldots, \rho_n(g)v_n)\chi(g)^{-\alpha_-} && \text{für } (v_1, \ldots, v_h) \in \Omega_-,\\
(\eta, g)x &= \chi(g)^{(p+q)/2}x\chi(g)^{(p-q)/2} && \text{für } x \in N,\\
(\eta, g)w &= \chi(g)^{\alpha_+}w\chi(g)^{-\alpha_-} && \text{für } w \in M
\end{aligned}$$

und $(\eta, g) \in \tilde{T}$ gegeben ist. Setzt man nun $\Omega = \Omega_+ \oplus \Omega_-$, so induziert die $\tilde{T}$-Operation auf der Sphäre $S(\Omega)$ eine lineare T-Operation auf $P(\Omega) = S(\Omega)/S^1 = \mathbb{C}P^{4n-1}$.

Sind $a, b > 0$ natürliche Zahlen mit $ap - bq = -1$, so ist

$$\omega : N \to M \qquad \omega(z_0 + jz_1) = z_0^q + \overline{z_1}^p + jz_0^a z_1^b \qquad (z_0, z_1 \in \mathbb{C})$$

eine eigentliche, $\tilde{T}$-äquivariante Abbildung mit $\omega^{-1}(0) = 0$. Durch Skalieren lässt sich außerdem erreichen, dass $x \mapsto \|\omega(x)\|^2$ keine kritischen Werte in $]0, 1]$ besitzt.

Also ist auch $F : S(\Omega) \times N \to M$ $F(u, v, x) = 2\langle u, v\rangle - \omega(x)$ eine eigentliche $\tilde{T}$-äquivariante Abbildung. Dabei ist für $u, v \in \mathbb{H}^n$ $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i}v_i$. Da S^1 trivial auf M und N operiert induziert F eine T-Abbildung $\bar{F} : P(\Omega) \times N \to M$.

Satz 2.17. *$0 \in M$ ist regulärer Wert von F und $\bar{F}$. Also gilt:*

- *$Z(\omega) = F^{-1}(0)$ ist eine $\tilde{T}$-Untermannigfaltigkeit von $S(\Omega) \times N$*
- *$X(\omega) = Z(\omega)/S^1 = \bar{F}^{-1}(0)$ ist eine T-Untermannigfaltigkeit von $P(\Omega) \times N$*
- *$\nu_{X(\omega)}^{P(\Omega)\times N} = X(\omega) \times M$*

Beweis. Es sei $f : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ $f(u, v) = \langle u, v\rangle$. Dann ist für $u_0, v_0, u, v \in \mathbb{H}^n$

$$Df_{(u_0,v_0)}(u, v) = \langle u_0, v\rangle + \langle u, v_0\rangle.$$

Insbesondere ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von f. Es sei nun $(u_0, v_0) \in S(\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n)$. Falls $\langle u_0, v_0\rangle = 0$ ist, ist die Einschränkung von $Df_{(u_0,v_0)}$ auf den Tangentialraum der Sphäre in (u_0, v_0) surjektiv.

Falls $\langle u_0, v_0\rangle \neq 0$ ist, sei $x \in \mathbb{H}$, so dass $\omega(x) = 2\langle u_0, v_0\rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} &= \langle u_0, v_0\rangle^\perp + D\omega_x(\mathbb{H})\\
&= i\langle u_0, v_0\rangle\mathbb{R} \oplus j\langle u_0, v_0\rangle\mathbb{R} \oplus k\langle u_0, v_0\rangle\mathbb{R} + D\omega_x(\mathbb{H})\\
&= Df_{(u_0,v_0)}(-u_0 i, 0)\mathbb{R} \oplus Df_{(u_0,v_0)}(-u_0 j, 0)\mathbb{R} \oplus Df_{(u_0,v_0)}(-u_0 k, 0)\mathbb{R} + D\omega_x(\mathbb{H})\\
&= Df_{(u_0,v_0)}(T_{(u_0,v_0)}(S(\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n)) + D\omega_x(\mathbb{H}),
\end{aligned}$$

da $x \mapsto \|\omega(x)\|^2$ keine kritischen Werte in $]0, 1]$ besitzt.

Insgesamt ergibt sich also, dass $0 \in \mathbb{H}$ ein regulärer Wert von F ist. □

Neben $\tilde{T}$ operiert auch die symplektische Gruppe $Sp(n)$ auf $Z(\omega)$. Diese Operation ist durch die Einschränkung der durch $g(u, v, x) = (gu, gv, x)$, $g \in Sp(n)$, $(u, v, x) \in \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}$ gegebenen Operation auf $\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}$ gegeben. Der Bahenenraum $Z(\omega)/Sp(n)$ ist

$$D(\omega) = \{(x, t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}; \|\omega(x)\|^2 + t^2 \leq 1\}$$

falls $n > 1$ und $\partial D(\omega)$ falls $n = 1$. Die Bahnenabbildung ist gegeben durch $\rho : Z(\omega) \to D(\omega)$, $\rho(u, v, x) = (x, \|u\|^2 - \|v\|^2)$.

Definiert man für die Identität $I : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

$$Z(I) = \{(u, v, x) \in S(\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n) \times \mathbb{H}; 2\langle u, v\rangle = I(x)\}$$

und $D(I) = Z(I)/Sp(n)$ analog zu $Z(\omega)$ und $D(\omega)$, so ist $Z(I)$ diffeomorph zur Sphäre $S(\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n)$ und $D(I) = D^5$.

$\Theta : Z(\omega) \to Z(I)$, $\Theta(u, v, x) = (u, v, \omega(x))$, ist eine $Sp(n)$-Abbildung. Die durch Θ induzierte Abbilung $\bar{\Theta} : D(\omega) \to D(I)$ ist die Einschränkung von $\psi : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{H} \times \mathbb{R}$, $\psi(x, t) = (\omega(x), t)$. Es sei $\partial\bar{\Theta}$ die Einschränkung von $\bar{\Theta}$ auf $\partial D(\omega)$.

Lemma 2.18. *ψ ist transversal zu $\partial D(I)$. Daher ist $\psi^{-1}(\partial D(I)) = \partial D(\omega)$ eine 4-dimensionsale Mannigfaltigkeit. Außerdem hat $\partial\bar{\Theta}$ den Grad 1.*

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar daraus, dass $\|\omega(x)\|^2$ keine kritischen Werte in $]0, 1]$ besitzt. Daher genügt es, um den zweiten Teil der Aussage zu zeigen, zu zeigen, dass ω den Grad 1 hat.

ω ist eine T-Abbildung, induziert also eine Abbildung $\omega_T : N_T \to M_T$. Sind $U_N \in H^4(N_T, N_T - BT)$ und $U_M \in H^4(M_T, M_T - BT)$ die Thomklassen der Vektorbündel $N_T \to BT$ bzw. $M_T \to BT$, so gilt $\omega_T^* U_M = (\text{grad } \omega)U_N$ und daher

$$e(M_T) = (\text{grad } \omega)e(N_T)$$

Da M als T-Darstellung isomorph zu $\chi^{pq} \oplus \chi$ und N zu $\chi^p \oplus \chi^q$ ist, folgt $e(M_T) = pqd^2 = e(N_T)$, wobei d das Gewicht von χ bezeichnet. Insbesondere hat ω den Grad 1. □

Lemma 2.19. *$D(\omega)$ ist homöomorph zum Kegel $C\partial D(\omega)$ von $\partial D(\omega)$.*

Beweis. Es sei $f : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung, die auf $D(\omega)$ mit $\|\omega(z)\|^2 + t^2$ übereinstimmt und außerhalb einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ verschwindet. Es sei ξ das Vektorfeld $-\text{grad } f$. Da ξ außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, erzeugt es eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen ϕ_s. Nun ist durch $h : C\partial D(\omega) \to D(\omega)$, $h(\theta, s) = \phi_{\frac{s}{1-s}}(\theta)$, $\theta \in \partial D(\omega)$, $s \in [0, 1]$, ein Homöomorphismus gegeben. □

Lemma 2.20. *Die kritischen Punkte von $\lambda : \partial D(\omega) \to \mathbb{R}$, $\lambda(x, t) = t$ sind $(0, \pm 1)$.*

Beweis. Für $(x, t) \in \partial D(\omega)$ gilt $t^2 + \|\omega(x)\|^2 = 1$. Daher kann ein Punkt $(x, t) \in \partial D(\omega)$ nur dann ein kritischer Punkt von λ sein, wenn $t = 0$ ist oder $(x, t) = (0, \pm 1)$ ist. Falls $t = 0$ ist, ist $T_{(x,t)}\mathbb{H} \cap T_{(x,t)}D(\omega) \subset \ker D\|\omega(\cdot)\|^2_{(x,t)}$. Da 1 ein regulärer Wert von $\|\omega(\cdot)\|^2$ ist, ist $\dim \ker D\|\omega(\cdot)\|^2_{(x,t)} \cap T_{(x,t)}\mathbb{H} = 3$. Da aber $\dim D(\omega) = 4$ ist, kann $D\lambda_{(x,t)}$ nicht auf $T_{(x,t)}D(\omega)$ verschwinden. □

Aus den beiden obigen Lemmata ergibt sich unmittelbar:

Korollar 2.21. *$\partial D(\omega)$ ist homöomorph zu S^4 und $D(\omega)$ zu D^5.*

Theorem 2.22. *$\Theta : Z(\omega) \to Z(I) = S(\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n)$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Die obigen Lemmata zeigen:

$Z(\omega)$, $Z(I)$ sind $Sp(n)$-Mannigfaltigkeiten mit zwei Orbittypen $Sp(n)/Sp(n-1)$ und $Sp(n)/Sp(n-2)$. Die Bahnenräume sind jeweils homöomorph zu D^5, so dass die singulären Orbiten den Punkten in $\partial D(\omega)$ bzw. $\partial D(I)$ entsprechen. Θ induziert eine Homotopieäquivalenz $\partial\bar{\Theta} : \partial D(\omega) \to \partial D(I)$.

Mit Hilfe der exakten Homotopiesequenz für die Faserung

$$Sp(n)/Sp(n-1) \to \rho^{-1}(\partial D(\omega)) \to \partial D(\omega)$$

sieht man, dass $\Theta : \rho^{-1}(\partial D(\omega)) \to \rho^{-1}(\partial D(I))$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Analog sieht man, dass $\Theta : Z(\omega) - \rho^{-1}(\partial D(\omega)) \to Z(I) - \rho^{-1}(\partial D(I))$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

Es seien $D(\omega) \supset \bar{A} \cong I \times \partial D(\omega)$ und $D(I) \supset \bar{B} \cong I \times \partial D(I)$, so dass $\bar{\Theta}(\bar{A}) \subset \bar{B}$. Nach [6, S.242] ist $A = \rho^{-1}(\bar{A})$ homotopieäquivalent zu $\rho^{-1}(\partial D(\omega))$ und $B = \rho^{-1}(\bar{B})$ homotopieäquivalent zu $\rho^{-1}(\partial D(I))$.

Da $\bar{\Theta} : \bar{A} - \partial D(\omega) \to \bar{B} - \partial D(I)$ eine Homotopieäquivalenz ist, ist auch $\Theta : A - \rho^{-1}(\partial D(\omega)) \to B - \rho^{-1}(\partial D(I))$ eine schwache Homotopieäquivalenz.

Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz und dem Whitehead-Theorem sieht man nun, dass $\Theta : Z(\omega) \to Z(I)$ eine Homotopieäquivalenz ist. $\square$

Theorem 2.23. *Es sei Σ eine Homotopiesphäre der Dimension $2n+1$, auf der S^1 frei und differenzierbar operiert, dann ist Σ/S^1 ein Homotopie $\mathbb{C}P^n$. Außerdem ist das Hopf-Bündel von Σ/S^1 gegeben durch $\Sigma \times_{S^1} \mathbb{C} \to \Sigma/S^1$.*

Beweis. Σ/S^1 ist eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\Sigma \to \Sigma/S^1$ ein S^1-Prinzipalbündel. Wegen $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$ ist dessen klassifizierende Abbildung homotop zu einer Abbildung, die über ein $f : \Sigma/S^1 \to \mathbb{C}P^n$ faktorisiert.

Die exakten Homotopiesequenzen für die Faserungen $\Sigma \to \Sigma/S^1$ und $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ zeigen, dass f für $k < 2n+1$ einen Isomorphismus von $\pi_k(\Sigma/S^1)$ und $\pi_k(\mathbb{C}P^n)$ induziert. Mit dem Whitehead-Theorem folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 2.24. *$X(\omega)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^{4n-1}$.*

Die äquivarianten Hopf-Bündel von $X(\omega)$ bzw. $P(\Omega)$ sind durch $Z(\omega) \times_{S^1} \mathbb{C} \to X(\omega)$ bzw. $S(\Omega) \times_{S^1} \mathbb{C} \to P(\Omega)$ gegeben. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} Z(\omega)|_{X(\omega)^T} &= \big(S(\Omega) \times N|_{X(\omega)}\big)\,|_{X(\omega)^T} \\ &= S(\Omega) \times N|_{P(\Omega)^T \times \{0\}} \\ &= S(\Omega)|_{P(\Omega)^T} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Also stimmen die globalen Gewichte der Operation auf $X(\omega)$ mit denen der Operation auf $P(\Omega)$ überein. Es folgt:

$$N(F_i, X(\omega)) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{j \neq i} (n_j+1)\chi_j\chi_i^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q.$$

Außerdem sieht man, dass die Hopf-Darstellungen der T-Operation auf $X(\omega)$ durch

$$\{\rho_i, \rho_i\chi, \rho_i\chi^{pq}, \rho_i\chi^{pq+1}; i = 1, \ldots, k\}$$

gegeben sind.

2.7 Der Gysin-Homomorphismus

Die letzten beiden Abschnitte zeigen, dass die lokalen Gewichte einer Toruswirkung auf einem Kohomologie komplex projektiven Raum nicht eindeutig durch ihre globalen Gewichte bestimmt sind. Allerdings lassen sich mit Hilfe des *äquivarianten Gysin-Homomorphismuses* einige Relationen zwischen den lokalen und globalen Gewichten der Operation herleiten.

Es seien M und N m- bzw. n-dimensionale geschlossene orientierte G-Mannigfaltigkeiten und $j : M \to N$ eine äquivariante Einbettung. Dann ist der *äquivariante Gysin-Homomorphismus* $j_!$ definiert durch die Komposition

$$j_! : H_G^q(M) \xrightarrow{\Phi} H_G^{q+n-m}(\nu_M^N, \nu_M^N - M) \cong H_G^{q+n-m}(N, N-M) \to H_G^{q+n-m}(N).$$

Dabei bezeichnet Φ den Thom-Isomorphismus des Normalenbündels ν_M^N von M. Der Isomorphismus $H_G^{q+n-m}(\nu_M^N, \nu_M^N - M) \cong H_G^{q+n-m}(N, N-M)$ wird durch die Einbettung einer äquivarianten Tubenumgebung von M induziert.

Lemma 2.25. *Es seien M_1, M_2, M_3, M_4 G-Mannigfaltigkeiten und $j_1 : M_1 \hookrightarrow M_2$, $j_2 : M_2 \hookrightarrow M_4$ und $j_3 : M_3 \hookrightarrow M_4$ äquivariante Einbettungen mit $j_2(M_2) \cap j_3(M_3) = \emptyset$ Dann gilt:*

(i) $(j_2 \circ j_1)_! = j_{2!} \circ j_{1!}$

(ii) $j_2^* j_{3!} = 0$ *und* $j_3^* j_{2!} = 0$

(iii) $j_{2!}(u \cup j_2^*(v)) = j_{2!}(u) \cup v$ *für alle* $v \in H_G^*(M_4)$ *und* $u \in H_G^*(M_2)$

(iv) $e^T(\nu_{M_2}^{M_4}) = j_2^* j_{2!}(1)$

Beweis. Die obige Situtation reduziert sich wie folgt auf den nich äquivarianten Fall. Es seien M und N m- bzw. n-dimensionale geschlossene orientierte G-Mannigfaltigkeiten und $j : M \to N$ eine äquivariante Einbettung und $q \geq 0$. Dann gibt es ein $k > 0$, so dass

$$H_G^q(M) = H^q(M_G^k) \qquad\qquad H_G^{q+n-m}(N) = H^{q+n-m}(N_G^k)$$

Das Normalenbündel von M_G^k in N_G^k ist gegeben durch $\left(\nu_M^N\right)_G^k$. Daher entspricht $j_! : H_G^q(M) \to H_G^{q+n-m}(N)$ und den obigen Identifikationen gerade dem Gysin-Homomorphismus der Einbettung von M_G^k in N_G^k. Also ergeben sich die obigen Eigenschaften des äquivarianten Gysin-Homomorphismus aus den entsprechenden Aussagen des gewöhnlichen Gysin-Homomorphismuses. □

Die folgenden Aussagen sind Verallgemeinerungen von Resultaten aus [25] und [29].

Theorem 2.26. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum, auf dem der Torus T operiert. Außerdem sei F_0 eine Zusammenhangskomponente von M^T. Für die $\nu_0(w_{0j})$ aus der Zerlegung 2.2 des Normalenbündels von F_0 gelte $c(\nu_0(w_{0j})) = \prod_{l=1}^{d_{0j}}(1 + x_{lj})$. Durch diese Zerlegung wird eine Orientierung auf $\nu_{F_0}^M$ induziert und es gilt*

$$e^T(\nu_{F_0}^M) = \prod_{lj}(x_{lj} + w_{0j}) = \pm \prod_{i \neq 0}(\xi_0 + a_0 - a_i)^{n_i+1}.$$

Insbesondere gilt

$$\prod_j w_{0j}^{d_{0j}} = \pm \prod_{i\neq 0} (a_0 - a_i)^{n_i+1}.$$

Beweis. Nach Korollar 2.14 ist die Gleichung $e^T(\nu_{F_0}^M) = \prod_{lj}(x_{lj} + w_{0j})$ klar. Es ist also nur $e^T(\nu_{F_0}^M) = \pm\prod_{i\neq 0}(x + a_0 - a_i)^{n_i+1}$ zu zeigen. Seien dazu $j_i : F_i \to M$ die Einbettungen der Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmenge. Da $j_i^* j_{0!}(1) = 0$ für $i \neq 0$, gibt es nach Korollar 2.6 eine ganze Zahl α, so dass

$$j_{0!}(1) = \alpha \prod_{i\neq 0} (\xi - a_i)^{n_i+1}.$$

Durch Einschränken auf gewöhnliche Kohomologie und Betrachtung des gewöhnlichen Gysin-Homomorphismuses sieht man $\alpha = \pm 1$. Also folgt

$$e^T(\nu_{F_0}^M) = j_0^* j_{0!}(1) = \pm \prod_{i\neq 0} (\xi_0 + a_0 - a_i)^{n_i+1}.$$

□

Theorem 2.27. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum auf dem der Torus T operiert. Außerdem sei H eine Untergruppe von T und X eine Zusammenhangskomponente von M^H. Dann gilt*

$$\dim X \leq 2(\chi(X) - 1).$$

Beweis. Es sei $j : X \to M$ die Einbettung von X in M. Dann gibt es ein $\alpha \in H_T^*(M)$, so dass

$$j_!(1) = \alpha \prod_{F_i \cap X = \emptyset} (\xi - a_i)^{n_i+1}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \dim M - \dim X = \deg j_!(1) &\geq 2 \sum_{F_i \cap X = \emptyset} (n_i + 1) \\ &= 2(\chi(M) - \chi(X)) \\ &= \dim M + 2 - 2\chi(X). \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass für die Eulercharakteristik eines kompakten T-Raums X $\chi(X) = \chi(X^T)$ gilt [6, S. 163]. □

Korollar 2.28. *Der Torus T operiere auf dem $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiven Raum M. Dann teilt jedes lokale Gewicht w_{0j} bei F_0 ein globales Gewicht $a_j - a_0$, $j \neq 0$.*

Beweis. Es sei H der Kern der durch w_{0j} gegebenen T-Darstellung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{F_i \subset X(H,F_0)} (n_i + 1) = \chi(X(H, F_0)) &\geq \frac{1}{2} \dim X(H, F_0) + 1 \\ &> \frac{1}{2} \dim F_0 + 1 \\ &= n_0 + 1 \end{aligned}$$

Also enthält die Zusammenhangskomponente $X(H, F_0)$ von X^H, die F_0 enthält, neben F_0 eine weitere Zusammenhangskomponente F_j von M^T. Eine ähnliche Argumentation wie im Beweis von Satz 2.16 liefert nun die Behauptung. $\square$

3 Beweis von Theorem 1.1

In diesem Kapitel wird Theorem 1.1 bewiesen. Dazu wird zunächst der Fall $r = 1$ betrachtet. Anschließend wird der Fall $r \geq 2$ auf diesen reduziert.

Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie $\mathbb{C}P^n$, d.h. eine $2n$-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit mit $H^*(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\xi_0]/(\xi_0^{n+1})$ und $\deg \xi_0 = 2$. Der r-dimensionale Torus T operiere differenzierbar auf M. Die Zusammenhangskomponenten von M^T werden mit F_i bezeichnet, $n_i = \frac{1}{2} \dim F_i$. Die Hopf-Darstellungen und Normalendarstellungen werden mit χ_i bzw. $N(F_i, M)$ bezeichnet.

Für eine Untergruppe $H \subset T$ und eine Zusammenhangskomponente F_0 von M^T bezeichnet $X(H, F_0)$ die Zusammenhangskomponente von M^H, die F_0 enthält.

Definition 3.1. Man sagt, eine T-Operation auf M ist

(i) von *linearem Typ bei* $F_0 \subset M^T$, falls

$$N(F_0, M) \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1}.$$

(ii) vom *Petrie-Typ bei* $F_0 \subset M^T$, falls es teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N} - \{1, 0\}$ und eine nicht triviale komplexe eindimensionale T-Darstellung χ gibt mit

$$N(F_0, M) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q.$$

Die Operation ist von *linearem Typ*, wenn sie bei jedem $F_i \subset M^T$ von linearem Typ ist.

Die Operation ist vom *Petrie-Typ*, wenn sie bei jedem $F_i \subset M^T$ vom Petrie-Typ ist und die Zahlen p, q und die Darstellung χ unabhängig von i sind.

3.1 Der Fall r = 1

In diesem Abschnitt werden nicht triviale S^1-Operationen auf Kohomologie komplex projektiven Räumen untersucht. Da der Kern einer solchen Operation endlich ist, kann angenommen werden, dass sie effektiv ist.

Dazu seien $w_{ij} \in \mathbb{Z}$, so dass $N(F_i, M) \cong_{\mathbb{R}} \sum_k t_1^{w_{ik}}$ für alle i. Nach Theorem 2.26, Korollar 2.28 und Satz 2.16 bestehen die folgenden Relationen zwischen den lokalen und globalen Gewichten a_i der Operation:

a) $\prod_{j \neq i} |a_j - a_i|^{n_j + 1} = \prod_k |w_{ik}|$

b) $\forall k \; \exists j \;\; w_{ik} | a_j - a_i$

c) $\forall i \;\; \mathrm{ggT}(\{a_j - a_i; j\}) = 1 = \mathrm{ggT}(\{w_{ik}; k\})$

Außerdem kann ohne Einschränkungen $a_0 = 0$ angenommen werden.

Lemma 3.2. *Es sei $m \in \mathbb{Z}$, so dass $X = X(\mathbb{Z}_m, F_0)$ neben F_0 genau eine weitere Zusammenhangskomponente F_1 von M^{S^1} enthält und mit $l = \frac{1}{2}\dim X$*

$$N(F_0, X) \cong_{\mathbb{R}} (l - n_0)t_1^m$$

gilt. Dann ist

$$N(F_1, X) \cong_{\mathbb{R}} (l - n_1)t_1^m.$$

Beweis. Es gilt $N(F_1, X) \cong_{\mathbb{R}} \sum_{k,m|w_{1k}} t_1^{w_{1k}}$. Also ist für $w_{1k_0} \in m\mathbb{Z}$ $X(\mathbb{Z}_{w_{1k_0}}, F_1) \subset X$. Der Beweis von Korollar 2.28 zeigt, dass $X(\mathbb{Z}_{w_{1k_0}}, F_1)$ neben F_1 eine weitere Zusammenhangskomponente von M^{S^1} enthält. Also ist $F_0 \subset X(\mathbb{Z}_{w_{1k_0}}, F_1)$ und es gibt ein $d > 0$ mit

$$\sum_{k,w_{1k_0}|w_{0k}} t_1^{w_{0k}} \cong_{\mathbb{R}} N(F_0, X(\mathbb{Z}_{w_{1k_0}}, F_1)) \cong_{\mathbb{R}} dt_1^m.$$

Also ist $|w_{1k_0}| = |m|$. □

Theorem 3.3. *S^1 operiere differenzierbar auf M, so dass M^{S^1} aus zwei oder drei Zusammenhangskomponenten besteht. Dann ist die Operation von linearem Typ.*

Beweis. Falls M^{S^1} aus zwei Zusammenhangskomponenten F_0 und F_1 besteht, folgt direkt aus a) und b), dass die S^1-Operatioin von linearem Typ ist.

Falls M^{S^1} aus drei Zusammenhangskomponenten F_0, F_1 und F_2 besteht sind 3 Fälle zu unterscheiden:

(i) $|a_1 - a_0| = |a_2 - a_0| = 1$

(ii) $|a_1 - a_0|, |a_2 - a_0| > 1$

(iii) $|a_1 - a_0| = 1$ und $|a_2 - a_0| > 1$

Im ersten Fall folgt aus a): $|w_{0k}| = 1$ für alle k, d.h. die Operation ist linear bei F_0. Außerdem ist dann $|a_1 - a_2| = 2$, nach b) nehmen die w_{1k}, w_{2k} also nur Werte in $\{1, 2\}$ an. Nach a) ist die Operation linear bei F_1 und F_2.

Im zweiten Fall kann wie folgt geschlossen werden. Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ Primteiler von $a_1 - a_0$ bzw. $a_2 - a_0$. Nach Theorem 2.4 und b), c) kann

$$\begin{array}{ll} p_1 \mid w_{01}, \dots, w_{0n_1+1} \mid a_1 - a_0 & \qquad p_2 \mid w_{0n_1+2}, \dots, w_{0n_1+n_2+2} \mid a_2 - a_0 \\ p_1 \nmid a_2 - a_0 & \qquad p_2 \nmid a_1 - a_0 \end{array}$$

angenommen werden. Wegen a) ist die Operation dann linear bei F_0.

Im dritten Fall tritt (i) bei F_1, d.h. es gilt (i) mit vertauschten a_1 und a_0, oder (ii) bei F_2 auf. Für den ersten Fall ist bereits alles gezeigt, also kann angenommen werden, dass der zweite Fall bei F_2 auftritt, d.h. es gilt $|a_1 - a_2|, |a_0 - a_2| > 1$.

Also ist die Operation linear bei F_2. Da $|a_1 - a_2|$ und $|a_0 - a_2|$ teilerfremd sind, folgt mit Theorem 2.27, Lemma 3.2 und a), dass die Operation linear bei F_0 und F_1 ist. Aus Symmetriegründen folgt die Behauptung. □

Korollar 3.4. *Jede differenzierbare Operation eines Torus T auf einem $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiven Raum M, deren Fixpunktmenge aus höchstens drei Zusammenhangskomponenten besteht, ist linear.*

Beweis. Es sei $S^1 \subset T$. Dann enthält jede Zusammenhangskomponente von M^{S^1} mindestens eine Zusammenhangskomponete von M^T. Also besteht M^{S^1} aus höchstens drei Zusammenhangskomponenten. Also ist die S^1-Operation auf M linear. Da dies für jede $S^1 \subset T$ gilt, ist auch die T-Operation auf M linear. □

Theorem 3.5 ([20]). *S^1 operiere differenzierbar auf M, so dass M^{S^1} aus vier Zusammenhangskomponenten besteht. Dann ist die Operation von linearem Typ oder vom Petrie-Typ. Im zweiten Fall haben alle Zusammenhangskomponenten von M^{S^1} die gleiche Dimension.*

Dieses Theorem wurde von M. Masuda bewiesen. An dieser Stelle wird der Beweis nur für den Fall isolierter Fixpunkte, $M^{S^1} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, geführt. In diesem Fall ist $n = 3$. Die Argumentation folgt hierbei I.J. Dejter [8].

Lemma 3.6. *Falls die S^1-Operation in der obigen Situation nicht linear bei x_0 ist, gibt es genau ein a_{i_0}, $i_0 \in \{1, 2, 3\}$, das durch kein w_{0k} geteilt wird.*

Beweis. Angenommen, dass alle a_i durch ein w_{0k} geteilt werden. Dann kann ohne Einschränkungen angenommen werden, dass einer der drei folgenden Fälle eintritt.

(i) $w_{03} \mid a_1, a_2 \quad w_{01}|a_3$

(ii) $w_{03} \mid a_1, a_2, a_3$

(iii) $w_{0i} \mid a_i$ für $i = 1, 2, 3$

Im dritten Fall ist die Operation nach a) und b) linear bei x_0. Also kann in Fall (i) $w_{02} \mid a_3$ und in Fall (ii) $w_{01}, w_{02} \mid a_3$ angenommen werden. In beiden Fällen erhält man also

$$w_{03} \mid a_1, a_2 \qquad\qquad w_{01}, w_{02} \mid a_3.$$

Mit a) folgt nun

$$a_1, a_2 \mid w_{01}, w_{02} \mid a_3 \quad |w_{03}| = \mathrm{ggT}(w_{01}, w_{02}, w_{03}) = 1 \quad \mathrm{ggT}(a_1, a_2) = \mathrm{ggT}(a_1, a_2, a_3) = 1$$

Also gibt es ganze Zahlen $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $w_{01} = b_1 a_1 a_2$ und $w_{02} = b_2 a_1 a_2$. Mit a) folgt $|a_3| = |b_1 b_2 a_1 a_2|$.

Nun kann ohne Einschränkungen $a_2 = \pm 1$ angenommen werden, da, falls $a_1 \neq \pm 1 \neq a_2$, $\frac{1}{2} \dim X(\mathbb{Z}_{a_1 a_2}, x_0) = 2$ und $\chi(X(\mathbb{Z}_{a_1 a_2}, x_0)) \leq 2$ zu einem Widerspruch zu Theorem 2.27 führen.

Da die Operation als nicht linear bei x_0 vorausgesetzt ist, gilt $|b_1| \neq 1 \neq |b_2|$. Außerdem sind b_1, b_2 teilerfremd, da wegen

$$\chi(X(\mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(b_1,b_2)a_1}, x_0)) \geq \frac{1}{2} \dim X(\mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(b_1,b_2)a_1}, x_0) + 1 \geq 3$$

$x_1 \in X(\mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(b_1,b_2)a_1}, x_0)$ oder $x_2 \in X(\mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(b_1,b_2)a_1}, x_0)$ gilt; also $\mathrm{ggT}(b_1, b_2) a_1 \mid a_1$ oder $\mathrm{ggT}(b_1, b_2) a_1 \mid 1$.

Nach Lemma 3.2 und a) sind dann die lokalen und globalen Gewichte bei x_3 gegeben durch

$$\begin{aligned}
w_{31} &= \pm b_1 a_1 & |a_1 - a_3| &= |a_1(1 \pm b_1 b_2)| \\
w_{32} &= \pm b_2 a_1 & |a_2 - a_3| &= |b_1 b_2 a_1 \pm 1| \\
w_{33} &= \pm(1 \pm b_1 b_2)(b_1 b_2 a_1 \pm 1) & |-a_3| &= |b_1 b_2 a_1|.
\end{aligned}$$

Nun liefert $w_{33} \nmid a_1 - a_3, a_2 - a_3, a_3$ einen Widerspruch.

Daher ist die Annahme falsch und es gibt mindestens ein a_i, das durch kein w_{0k} geteilt wird.

Angenommen a_1 und a_2 sind durch kein w_{0k} teilbar. Dann gilt $w_{01}, w_{02}, w_{03} \mid a_3$ und $w_{0i} \nmid w_{0j}$ für $i \neq j$. Mit Theorem 2.27 und Lemma 3.2 sieht man nun

$$\{|w_{31}|, |w_{32}|, |w_{33}|\} = \{|w_{01}|, |w_{02}|, |w_{03}|\}$$

Für $i, j = 1, 2, 3$ seien $c_{ij} = \mathrm{ggT}(w_{0i}, w_{0j})$ und $b_i \in \mathbb{Z}$, so dass

$$|w_{01}| = c_{12}c_{13}b_1 \qquad |w_{02}| = c_{12}c_{23}b_2 \qquad |w_{03}| = c_{32}c_{13}b_3.$$

Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Z}$, so dass $a_3 = qc_{12}c_{13}c_{23}b_1b_2b_3$ und, wegen a), $qa_1a_2 = c_{12}c_{13}c_{23}$. Außerdem erhält man

$$|a_1a_2| = \frac{1}{|a_3|}\prod_k |w_{0k}| = \frac{1}{|a_3|}\prod_k |w_{3k}| = |a_2 - a_3||a_1 - a_3|.$$

Also ist $1 = |1 \pm \frac{a_3}{a_2}||1 \pm \frac{a_3}{a_1}|$. Dies ist nur dann möglich, wenn $|a_3| = 2|a_1| = 2|a_2|$. Hieraus folgt im Widerspruch zur Annahme $|a_1| = |a_2| = 1$ und $|a_3| = 2$. □

In der Situation des vorangehenden Lemmas kann also angenommen werden, dass es $p, q, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ gibt , so dass

(i) $w_{0j} \nmid a_1$ für $j = 1, 2, 3$

(ii) $w_{01}, w_{02} \mid a_2$ und $w_{03} \mid a_3$

(iii) $|w_{01}| = \gamma p$ und $|w_{02}| = \gamma q$

(iv) $|a_2| = \gamma pq\alpha$ und $|a_3| = |w_{03}|\beta$.

Lemma 3.7. *In der obigen Situation gilt:*

(i) $\alpha = \beta = \gamma = 1$

(ii) $p, q > 1$

(iii) $|a_1| = 1$

(iv) Die Operation ist nicht linear bei x_2.

Beweis. Mit a) erhält man $\gamma = |a_1|\alpha\beta$ und, wegen $\frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_\gamma, x_0) \geq 2$, gilt $\gamma \mid a_1$ oder $\gamma \mid a_3$.

Falls γ ein Teiler von a_1 ist, gilt $\alpha = \beta = 1$ und $\gamma = |a_1|$. Da die Operation nicht linear bei x_0 ist, gilt außerdem $p, q > 1$.

Um $|a_1| = 1$ zu zeigen, genügt es, wegen $\mathrm{ggT}(w_{01}, w_{02}, w_{03}) = 1$, $a_1 \mid w_{03}$ zu zeigen. Angenommen $a_1 \nmid w_{03}$. Dann gilt nach Lemma 3.2 und a):

$$\begin{aligned} |w_{21}| &= |a_1 p| & |a_1 - a_2| &= |a_1|(pq \pm 1) \\ |w_{22}| &= |a_1 q| & |a_3 - a_2| &= |a_1 pq \pm w_{03}| \\ |w_{23}| &= (pq \pm 1)|a_1 pq \pm w_{03}| & |-a_2| &= |a_1 pq|. \end{aligned}$$

Mit $(pq \pm 1) \geq 3$ und $\mathrm{ggT}(a_1, a_1 pq \pm w_{03}), \mathrm{ggT}(a_1, pq \pm 1) \mid \mathrm{ggT}(a_1, w_{23}) = 1$ ergibt sich ein Widerspruch zu b).

Es muss also nur noch (iv) gezeigt werden. Es gilt

$$|a_1 - a_2| = |1 \pm \gamma pq| \qquad |a_3 - a_2| = \gamma|pq \pm w_{03}| \qquad |a_2| = |\gamma pq|.$$

Falls p kein Teiler von w_{03} ist, ist $X(\mathbb{Z}_{\gamma p}, x_0) \cap M^{S^1} = \{x_0, x_2\}$, also kann nach Lemma 3.2 $|w_{21}| = \gamma p$ angenommen werden, d.h. die Operation ist nicht linear bei x_2.

Falls pq ein Teiler von w_{03} ist, gilt $x_2, x_3 \in X(\mathbb{Z}_p, x_0) \cap X(\mathbb{Z}_q, x_0)$ und $x_1 \notin X(\mathbb{Z}_p, x_0) \cap X(\mathbb{Z}_q, x_0)$. Da $\frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_p, x_0) = 2 = \frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_q, x_0)$ und $n = 3$ erhält man für $i = 0, 2, 3$ $\frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_{pq}, x_i) \geq 1$. Mit Theorem 2.27 und (iii) erhält man $x_2, x_3 \in X(\mathbb{Z}_{pq}, x_0)$, Wegen $\frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_{pq}, x_0) = 1$ kann $p \mid w_{21}, w_{22}$ $q \mid w_{22}, w_{23}$ angenommen werden. Daher gilt $w_{21}, w_{22}, w_{23} \nmid |a_1 - a_2|$, d.h. die Operation ist nicht linear bei x_2.

Falls γ ein Teiler von a_3 ist, gilt $a_1\alpha \mid w_{01}, w_{02}, w_{03}$. Also ist $|a_1| = 1 = \alpha$ und a) liefert $\gamma = \beta$.

Angenommen $p = 1$, dann sind die lokalen Gewichte bei x_0 gegeben durch

$$\{|w_{01}|, |w_{02}|, |w_{03}|\} = \{\gamma, \gamma q, |w_{03}|\}.$$

Da die Operation nicht linear bei x_0 ist, gilt also $\gamma \neq 1 \neq |w_{03}|$ und $\mathrm{ggT}(\gamma, |w_{03}|) = 1$.

Falls $w_{03} \nmid q$, sieht man mit Lemma 3.2, dass $\gamma \mid w_{31}, w_{32}$ und $|w_{03}| = |w_{33}|$ angenommen werden kann. Falls $w_{03} \mid q$, ist $x_3 \in X(\mathbb{Z}_{\gamma w_{03}}, x_0) \subset X(\mathbb{Z}_{w_{03}}, x_0) \cap X(\mathbb{Z}_\gamma, x_0)$ und $\frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_{\gamma w_{03}}, x_0) = 1$, $\frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_{w_{03}}, x_0) = 2 = \frac{1}{2}\dim X(\mathbb{Z}_\gamma, x_0)$. Also kann $\gamma \mid w_{31}, w_{32}$ und $w_{03} \mid w_{33}, w_{32}$ angenommen werden. In beiden Fällen folgt

$$|w_{31}|, |w_{32}|, |w_{33}| \nmid |1 \pm w_{03}\gamma| = |a_1 - a_3|.$$

Also ist die Operation nicht linear bei x_3. Nun gilt aber (iii), d.h. $|a_1 - a_3| = 1$. Dies ist im Widerspruch zu $\gamma \neq 1 \neq |w_{03}|$ nur dann möglich, wenn $|w_{03}|\gamma = 2$. Also sind $p, q > 1$.

Dass die Operation nicht linear bei x_2 ist, kann wie im ersten Fall gezeigt werden.

Es muss also nur noch $\gamma = 1$ gezeigt werden. Angenommen $\gamma > 1$. Dann gilt $|a_2|, |a_3 - a_2| \geq \gamma > 1$. Da die Operation nicht linear bei x_2 ist, ist $|a_1 - a_2| = 1$ und daher im Widerspruch zu (ii) $\gamma pq = 2$. □

Mit dem letzten Lemma erhalt man also:

$$\begin{aligned} |w_{01}| &= p & |a_1| &= 1 \\ |w_{02}| &= q & |a_2| &= pq \\ |w_{03}| &= pq \pm 1 & |a_3| &= pq \pm 1. \end{aligned}$$

Also ist die Operation bei x_0 und x_2 vom Petrie-Typ. Durch Betrachtung der $\mathbb{Z}_{pq\pm1}$-Darstellung $N(X(\mathbb{Z}_{pq\pm1}, x_0), M))$ erhält man außerdem:

$$\begin{aligned} |w_{31}| &\equiv p \mod pq \pm 1 & |a_1 - a_3| &\in \{pq, pq \pm 2\} \\ |w_{32}| &\equiv q \mod pq \pm 1 & |a_2 - a_3| &= 1 \\ |w_{33}| &= pq \pm 1 & |-a_3| &= pq \pm 1. \end{aligned}$$

Mit a) erhält man $|a_1 - a_3| \equiv pq \mod pq \pm 1$, also $|a_1 - a_3| = pq$. Wegen $|w_{32}||w_{31}| = pq$, ist $0 < |w_{32}|, |w_{31}| < pq \pm 1$ und daher $|w_{32}| = q$ und $|w_{31}| = p$. Aufgrund des obigen Lemmas ist die Operation also auch bei x_1 und x_3 vom Petrie-Typ. Damit ist Theorem 3.5 für den Fall $n = 3$ bewiesen.

3.2 Der Fall r ≥ 2

In diesem Abschnitt werden einige Lemmata zusammengetragen, die in den folgenden Abschnitten dazu verwendet werden die Ergebnisse des letzten Abschnitts auf den Fall $r \geq 2$ zu verallgemeinern (vgl. [9]).

Lemma 3.8. *Es seien $T_0, T_1 \subset T$ zwei Untertori, die T erzeugen, und X_0, X_1 Zusammenhangskomponenten von M^{T_1} bzw. M^{T_2}.*

Dann ist $X_0 \cap X_1 \subset M^T$ zusammenhängend. Insbesondere enthält $X_0 \cap X_1$ maximal ein F_i

Beweis. Falls $X_0 \cap X_1$ nicht leer ist, gibt es eine Zusammenhangskomponente F_0 von M^T, so dass $F_0 \subset X_0 \cap X_1 \subset M^T$. Ist F_1 eine weitere Zusammenhangskomponente von M^T mit $F_1 \subset X_0 \cap X_1$. Dann gilt für $j = 0, 1$ $\chi_0 \cong_{T_j, \mathbb{C}} \chi_1$ und damit auch $\chi_0 \cong_{\mathbb{C}} \chi_1$. Mit Satz 2.15 erhält man $F_0 = F_1 = X_0 \cap X_1$. □

Lemma 3.9. *Für jede Zusammenhangskomponente F_0 von M^T gilt:*

(i)

$$N(F_0, M) \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)),$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung über alle Untertori $\tilde{T} \subset T$ mit Korang 1 summiert wird.

(ii) Jedes F_i, $i \neq 0$ ist in genau einem dieser $X(\tilde{T}, F_0)$ enthalten.

Beweis. (i)

$$N(F_0, M) = \bigoplus N(F_0, M)^{\tilde{T}} \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus N(F_0, X(\tilde{T}, F_0))$$

(ii) F_i ist nach Satz 2.15 genau dann in $X(\tilde{T}, F_0)$ enthalten, wenn $\tilde{T} \subset \ker \chi_i \chi_0^{-1}$. Da $\ker \chi_i \chi_0^{-1}$ den Rang $r - 1$ hat, ist dies genau dann der Fall, wenn $\tilde{T}$ die Zusammenhangskomponente der 1 von $\ker \chi_i \chi_0^{-1}$.

□

Bemerkung. Ist T_0 ein beliebiger Untertorus von T, so erhält man mit dem obigen Lemma

$$\begin{aligned} N(F_0, X(T_0, F_0)) &\cong_{\mathbb{R}} \bigoplus N(F_0, X(T_0, F_0)^{\tilde{T}}) \\ &\cong_{\mathbb{R}} \bigoplus N(F_0, X(\tilde{T}, F_0) \cap X(T_0, F_0)) \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{T_0 \subset \tilde{T}} N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $x_0 \in F_0$:

$$N(F_0, M) \cong_{\mathbb{R}} N(F_0, X(T_0, F_0)) \oplus \bigoplus_{T_0 \not\subset \tilde{T}} N(F_0, X(\tilde{T}, F_0))$$

$$T_{x_0} M \cong_{\mathbb{R}} T_{x_0} X(T_0, F_0) \oplus \bigoplus_{T_0 \not\subset \tilde{T}} N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)).$$

Dabei wird jeweils über die Untertori $\tilde{T}$ vom Korang 1 von T summiert.

Lemma 3.10.

(i) *Die T-Operation auf M ist genau dann von linearem Typ bei F_0, wenn die T-Operation auf $X(\tilde{T}, F_0)$ für alle Untertori $\tilde{T} \subset T$ vom Korang 1 von linearem Typ bei F_0 ist.*

(ii) *Die T-Operation auf M ist genau dann vom Petrie-Typ bei F_0, wenn es einen Untertorus $T_0 \subset T$ mit Korang 1 gibt, so dass die T-Operation auf $X(T_0, F_0)$ vom Petrie-Typ bei F_0 und auf $X(\tilde{T}, F_0)$ für alle Untertori $T_0 \neq \tilde{T} \subset T$ vom Korang 1 von linearem Typ bei F_0 ist.*

Beweis. Falls die Operation auf M linear bei F_0 ist, dann gilt

$$N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)) \cong_{\mathbb{R}} N(F_0, M)^{\tilde{T}} \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0, F_i \subset X(\tilde{T}, F_0)} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1}.$$

Also ist die Operation auf $X(\tilde{T}, F_0)$ bei F_0 linear. Die Umkehrung dieser Aussage folgt aus Lemma 3.9.

Falls die Operation auf M vom Petrie-Typ bei F_0 ist, sei T_0 der maximale Torus von $\ker \chi$. Dann hat T_0 den Rang $r - 1$ und es gilt

$$\begin{aligned} N(F_0, X(T_0, F_0)) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi &\cong_{\mathbb{R}} (N(F_0, M) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi)^{T_0} \\ &\cong_{\mathbb{R}} \left(\bigoplus_{i \neq 0} (n_i + 1)\chi_i^{-1}\chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q \right)^{T_0} \\ &\cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0, F_i \subset X(T_0, F_0)} (n_i + 1)\chi_i^{-1}\chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q \end{aligned}$$

Für einen anderen Untertorus $T_0 \neq \tilde{T} \subset T$ vom Rang $r - 1$ gilt

$$N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)) \cong_{\mathbb{R}} N(F_0, M)^{\tilde{T}} \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0, F_i \subset X(\tilde{T}, F_0)} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1}.$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Die Umkehrung folgt auch hier aus Lemma 3.9. □

Lemma 3.11. *T operiere auf M und es gebe eine Untergruppe $S^1 \subset T$ mit:*

(i) Für alle Untertori $\tilde{T} \subset T$ vom Korang 1 mit $S^1 \not\subset \tilde{T}$ ist die T-Operation auf allen Zusammenhangskomponenten $\tilde{X}$ von $M^{\tilde{T}}$ von linearem Typ.

(ii) Die T-Operation auf einer Zusammenhangskomponente Y_0 von M^{S^1} ist vom linearen (bzw. Petrie-) Typ.

Dann ist die T-Operation auf M vom linearen (bzw. Petrie-) Typ.

Beweis. Es sei F_0 eine Zusammenhangskomponente von M^T. Falls F_0 in Y_0 enthalten ist, gilt:

$$N(F_0, M) \cong_{\mathbb{R}} N(F_0, Y_0) \oplus \bigoplus N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)),$$

wobei auf der rechten Seite über alle Untertori $\tilde{T} \subset T$ mit Korang 1 und $S^1 \not\subset \tilde{T}$ summiert wird. Aus Lemma 3.9 folgt nun, dass die Operation bei F_0 vom linearen (bzw. Petrie-) Typ ist, d.h. es gibt eine komplexe eindimensionale, möglicherweise triviale, T-Darstellung χ mit $S^1 \subset \ker \chi$ und zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass

$$N(F_0, M) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0} (n_i + 1) \chi_i \chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q.$$

Falls F_0 nicht in Y_0 enthalten ist, kann wie folgt geschlossen werden. Es seien F_1 eine Zusammenhangskomponente von Y_0^T, $T_0 \subset T$ der Untertorus vom Korang 1 mit $F_1 \subset X(T_0, F_0)$, $x_0 \in F_0$ und $x_1 \in F_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_{x_0} M &\cong_{\mathbb{R}} T_{x_0} X(S^1, F_0) \oplus \bigoplus_{S^1 \not\subset \tilde{T}} N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)) \\ &\cong_{\mathbb{R}} T_{x_0} X(S^1, F_0) \oplus \bigoplus_{i, F_i \not\subset X(S^1, F_0)} (n_i + 1) \chi_i \chi_0^{-1}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} T_{x_0} M \oplus \chi^{pq} \oplus \chi &\cong_{T_0, \mathbb{R}} T_{x_1} M \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \cong_{\mathbb{R}} T_{x_1} F_1 \oplus N(F_1, M) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \\ &\cong_{T_0, \mathbb{R}} n_1 \chi_1 \chi_0^{-1} \oplus \bigoplus_{i \neq 1} (n_i + 1) \chi_i \chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q \\ &\cong_{T_0, \mathbb{R}} T_{x_0} F_0 \oplus \bigoplus_{i \neq 0} (n_i + 1) \chi_i \chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} N(F_0, X(S^1, F_0)) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi &\cong_{T_0, \mathbb{R}} T_{x_0} X(S^1, F_0) \ominus T_{x_0} F_0 \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \\ &\cong_{T_0, \mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0, F_i \subset X(S^1, F_0)} (n_i + 1) \chi_i \chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q. \end{aligned}$$

Da S^1 trivial auf $T_{x_0} X(S^1, F_0)$ operiert, setzt sich dieser Isomorphismus zu einem Isomorphismus von T-Darstellungen fort. Also ist die T-Operation linear (bzw. vom Petrie-Typ) bei F_0. $\square$

Lemma 3.12. *Der Torus T vom Rang $r \geq 2$ operiere fast effektiv auf M und es seien F_0 eine Zusammenhangskomponente von M^T und $T_0 \subset T$ ein Untertorus vom Korang 1, so dass $X(T_0, F_0) \supsetneq F_0$. Dann gibt es $S_0^1 \subset T_0$, so dass jeder Untertorus $T_1 \subset T$ vom Korang 1 mit $S_0^1 \not\subset T_1$ fast effektiv auf $X(S_0^1, F_0)$ operiert.*

Beweis. Es sei $S_0^1 \subset T_0$, so dass $\dim X(S_0^1, F_0) = \max_{S^1 \subset T_0} \dim X(S^1, F_0)$. Nach Lemma 3.9 gilt:

$$N(F_0, M) \cong_{\mathbb{R}} N(F_0, X(S_0^1, F_0)) \oplus \bigoplus_{S_0^1 \not\subset \tilde{T}} N(F_0, X(\tilde{T}, F_0))$$

Da die T-Operation auf M fast effektiv ist, folgt

$$\bigoplus_{S_0^1 \not\subset \tilde{T}} N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)) \neq 0.$$

Es sei nun $T_1 \subset T$ ein Untertorus vom Korang 1, so dass $S_0^1 \not\subset T_1$. Angenommen T_1 operiert nicht fast effektiv auf $X(S_0^1, F_0)$. Dann gibt es $S_1^1 \subset T_1$, so dass S_1^1 trivial auf $X(S_0^1, F_0)$ operiert. Wegen $N(F_0, X(T_0, F_0)) \neq 0$ ist $S_1^1 \subset T_0$. Also erzeugen S_1^1 und S_0^1 einen Untertorus $\tilde{T}_0$ von T_0 vom Rang 2, der trivial auf $X(S_0^1, F_0)$ operiert. Ist $\tilde{T}$ ein Untertorus von T vom Rang $r-1$ mit $N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)) \neq 0$ und $S_0^1 \not\subset \tilde{T}$, dann gibt es $S^1 \subset \tilde{T} \cap \tilde{T}_0$ und im Widerspruch zur Wahl von S_0^1 gilt:

$$N(F_0, X(S^1, F_0)) \supset N(F_0, X(S_0^1, F_0)) \oplus N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)).$$

□

3.3 Toruswirkungen mit bis zu $4r - 1$ Fixpunktmengenzusammenhangskomponenten

Proposition 3.13. *T operiere auf M und es gebe eine Untergruppe $S^1 \subset T$, die nicht trivial auf M operiert, und eine Zusammenhangskomponente Y von M^{S^1}, so dass alle bis auf höchstens drei Zusammenhangskomponenten von M^T in Y enthalten sind und T nicht trivial auf Y operiert.*

Dann ist die Operation von linearem Typ.

Beweis. Die T-Operation auf allen Zusammenhangskomponenten $\neq Y$ von M^{S^1} ist von linearem Typ, da diese höchstens drei Zusammenhangskomponenten von M^T enthalten.

Es sei $T_0 \subset T$ ein Untertorus vom Korang 1 mit $S^1 \not\subset T_0$. Auf den Zusammenhangskomponenten von M^{T_0}, die weniger als vier Zusammenhangskomponenten von M^T enthalten, operiert T linear.

Falls eine Zusammenhangskomponente X_0 von M^{T_0} vier Zusammenhangskomponenten von M^T enthält, enthält sie nach Lemma 3.8 bereits alle F_i, die nicht in Y enthalten sind. Es sei $T_0 \neq \tilde{T} \subset T$ ein beliebiger Untertorus mit Korang 1 und $S^1 \not\subset \tilde{T}$. Dann können die Zusammenhangskomponenten von $M^{\tilde{T}}$ jeweils höchstens zwei Zusammenhangskomponenten von M^T enthalten. Die T-Operation auf ihnen ist also linear.

Es seien $F_0 = X_0 \cap Y$ und $F_0 \neq F_1 \subset Y$ eine weitere Zusammenhangskomponente von M^T. Dann gilt nach Lemma 3.9

$$N(F_0, X_0) \cong_{S^1, \mathbb{R}} N(Y, M) \cong_{S^1, \mathbb{R}} \bigoplus_{S^1 \not\subset \tilde{T} \subset T} N(F_1, X(\tilde{T}, F_1)) \cong_{S^1, \mathbb{R}} \bigoplus_{i, F_i \not\subset Y} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1}.$$

Mit Theorem 3.5 sieht man nun, dass die S^1-Operation und damit auch die T-Operation auf X_0 von linearem Typ. Lemma 3.11 liefert dann das verlangte. $\square$

Theorem 3.14. *Es seien T ein Torus vom Rang r, M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie $\mathbb{C}P^n$ mit fast effektiver differenzierbarer T-Operation. Falls M^T aus weniger als $4r$ Zusammenhangskomponenten besteht ist die Operation linear.*

Beweis. Der Beweis wird mit Induktion nach r geführt. Im Fall $r = 1$ ist die zuzeigende Aussage die Aussage von Theorem 3.3.

Also kann $r \geq 2$ angenommen werden. Es seien F eine Zusammenhangskomponente von M^T und $T_0 \subset T$ ein Untertorus vom Korang 1 mit $X(T_0, F) \neq F$. Außerdem seien $S_0^1 \subset T_0$ und $T_1 \subset T$ wie in Lemma 3.12. Dann operiert T_1 fast effektiv auf $X(S_0^1, F)$. Insbesondere ist die T-Operation auf $X(S_0^1, F)$ nicht trivial.

Also ist die Operation auf M nach Proposition 3.13 linear, falls höchstens drei Zusammenhangskomponenten von M^T nicht in $X(S_0^1, F)$ enthalten sind.

Falls höchstens $4r - 5$ Zusammenhangskomponenten von M^T in $X(S_0^1, F)$ enthalten sind, ist die T_1-Operation und damit auch die T-Operation auf $X(S_0^1, F)$ nach Induktionsvoraussetzung linear. Nach Lemma 3.10 ist dann die T-Operation auf $X(T_0, F) \subset X(S_0^1, F)$ ebenfalls linear.

Mit Lemma 3.10 folgt, dass die Operation auf M linear ist. $\square$

Bemerkung. In der Situation des Theorems impliziert die Effektivität der T-Operation, dass M^T aus mindestens r Zusammenhangskomponenten besteht, da andernfalls der Rang von $\bigcap_i \ker \chi_i$ größer oder gleich eins ist.

Korollar 3.15. *Jede Toruswirkung auf einem $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiven Raum, deren Fixpunktmenge aus vier Zusammenhangskomponenten besteht ist linear oder vom Petrie-Typ. Im zweiten Fall haben alle Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmenge die gleiche Dimension.*

Beweis. Es sei $\tilde{T}$ der Kern der T-Operation. Falls der Rang von $T/\tilde{T}$ größer als 1 ist, ist die Operation nach Theorem 3.14 linear.

Falls $T/\tilde{T}$ den Rang 1 hat, ist die Operation nach Theorem 3.5 linear oder vom Petrie-Typ. $\square$

Korollar 3.16 ([9]). *Es seien T ein Torus vom Rang r, M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie $\mathbb{C}P^n$ mit fast effektiver differenzierbarer T-Operation. Falls $n < 4r - 1$, ist die Operation linear.*

3.4 Toruswirkungen mit 4r Fixpunktmengenzusammenhangskomponenten

Proposition 3.17. *T operiere auf M und es gelte:*

(i) Es gibt eine Untergruppe $S^1 \subset T$ und eine Zusammenhangskomponente Y von M^{S^1}, die alle bis auf vier Zusammenhangskomponenten $F_1, \dots, F_4$ von M^T enthält.

(ii) Die T-Operation auf Y ist nicht trivial.

(iii) Es gibt keinen zu S^1 komplementären Torus $\tilde{T}$, so dass $X(\tilde{T}, F_1) = \dots = X(\tilde{T}, F_4)$.

Dann ist die T-Operation auf M linear oder vom Petrie-Typ.

Beweis. Falls M^{S^1} neben Y nur eine weitere Zusammenhangskomponente $\tilde{Y}$ besitzt, ist die T-Operation auf $\tilde{Y}$ nach Korollar 3.15 linear oder vom Petrie-Typ. Andernfalls ist die T-Operation nach Korollar 3.4 auf allen Zusammenhangskomponenten $\neq Y$ von M^{S^1} linear.

Es seien $T_0 \subset T$ ein Untertorus vom Korang 1 mit $S^1 \not\subset T_0$ und X_0 eine Zusammenhangskomponente von M^{T_0}. Dann kann nach Lemma 3.8 ohne Einschränkungen angenommen werden, dass einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

(i) X_0 enthält höchstens drei Zusammenhangskomponenten von M^T.

(ii) Es gilt $X_0 \cap Y \neq \emptyset$ und $F_1, F_2, F_3 \subset X_0$.

Im ersten Fall ist die Operation auf X_0 nach Korollar 3.4 linear.

Im zweiten Fall kann ähnlich wie im Beweis von Proposition 3.13 gezeigt werden, dass die T-Operation auf X_0 von linearem Typ ist. Dazu sei $T_0 \neq \tilde{T} \subset T$ ein beliebiger Untertorus mit Korang 1 und $S^1 \not\subset \tilde{T}$. Nach Lemma 3.8 können dann die Zusammenhangskomponenten von $M^{\tilde{T}}$ jeweils höchstens drei Zusammenhangskomponenten von M^T enthalten. Die T-Operation auf ihnen ist also linear.

Es seien $F_0 = X_0 \cap Y$ und $F_0 \neq F_5 \subset Y$ eine weitere Zusammenhangskomponente von M^T. Dann gilt nach Lemma 3.9

$$\begin{aligned} N(F_0, X_0) &\cong_{S^1,\mathbb{R}} N(Y, M) \ominus (n_4+1)\chi_4\chi_0^{-1} \\ &\cong_{S^1,\mathbb{R}} \bigoplus_{S^1 \not\subset \tilde{T} \subset T} N(F_5, X(\tilde{T}, F_5)) \ominus (n_4+1)\chi_4\chi_0^{-1} \\ &\cong_{S^1,\mathbb{R}} \bigoplus_{i=1}^{3} (n_i+1)\chi_i\chi_0^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist die S^1-Operation und damit auch die T-Operation auf X_0 von linearem Typ.

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.11. □

Lemma 3.18. *T operiere auf M und es gelte:*

(i) Es gibt eine Untergruppe $S^1 \subset T$ und eine Zusammenhangskomponente Y von M^{S^1}, die alle bis auf vier Zusammenhangskomponenten $F_1, \dots, F_4$ von M^T enthält.

(ii) Die T-Operation auf Y ist nicht trivial.

(iii) Es gibt einen zu S^1 komplementären Torus T_0, so dass

$$X(T_0, F_1) = \cdots = X(T_0, F_4) \qquad \text{und} \qquad F_0 = X(T_0, F_1) \cap Y \neq \emptyset$$

Dann ist die T-Operation auf M linear bei F_0.

Beweis. Es sei $T_0 \neq \tilde{T} \subset T$ ein beliebiger Untertorus mit Korang 1 und $S^1 \not\subset \tilde{T}$. Aus (iii) folgt mit Lemma 3.8, dass die Zusammenhangskomponenten von $M^{\tilde{T}}$ jeweils höchstens zwei Zusammenhangskomponenten von M^T enthalten.

Es seien

$$\psi_1 = \bigoplus_{i\in\{0,2,3,4\}} (n_i+1)\chi_i\chi_1^{-1} \qquad\qquad \psi_2 = N(F_1, X(T_0, F_1)).$$

Dann gilt nach Lemma 3.9 $T_0 \subset \ker\psi_1 \cap \ker\psi_2$ und

$$N(F_1, M) \oplus \psi_1 \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i\neq 1}(n_i+1)\chi_i\chi_1^{-1} \oplus \psi_2.$$

Daher gilt für $x_0 \in F_0$ und $x_1 \in F_1$:

$$\begin{aligned} T_{x_0}M \cong_{T_0,\mathbb{R}} T_{x_1}M &\cong_{T_0,\mathbb{R}} T_{x_1}F_1 \oplus \bigoplus_{i\neq 1}(n_i+1)\chi_i\chi_0^{-1} \\ &\cong_{T_0,\mathbb{R}} n_1\chi_1\chi_0^{-1} \oplus \bigoplus_{i\neq 1}(n_i+1)\chi_i\chi_0^{-1} \\ &\cong_{T_0,\mathbb{R}} T_{x_0}F_0 \oplus \bigoplus_{i\neq 0}(n_i+1)\chi_i\chi_0^{-1} \end{aligned}$$

Ist $F_5 \neq F_0$ eine zweite Zusammenhangskomponente von Y^T und $X_0 = X(T_0, F_1)$, so gilt

$$\begin{aligned} N(F_0, X_0) \cong_{S^1,\mathbb{R}} N(Y, M) &\cong_{S^1,\mathbb{R}} \bigoplus_{S^1\not\subset\tilde{T}\subset T} N(F_5, X(\tilde{T}, F_5)) \\ &\cong_{S^1,\mathbb{R}} \bigoplus_{i=1}^{4}(n_i+1)\chi_i\chi_0^{-1} \end{aligned}$$

Da T_0 trivial auf $N(F_0, X_0)$ operiert, setzt sich dieser Isomorphismus zu einem Isomorphismus von T-Darstellungen fort. Nach Lemma 3.9 ist $T_{x_0}M \cong_{\mathbb{R}} T_{x_0}Y \oplus N(F_0, X_0)$ und daher

$$T_{x_0}Y \cong_{T_0,\mathbb{R}} T_{x_0}F_0 \oplus \bigoplus_{i\neq 0, F_i\subset Y}(n_i+1)\chi_i\chi_0^{-1}.$$

Da S^1 trivial auf Y operiert, ist die T-Operation auf M linear bei F_0. □

Lemma 3.19. *T operiere auf M und es gelte:*

(i) Es gibt eine Untergruppe $S^1 \subset T$ und eine Zusammenhangskomponente Y von M^{S^1}, die alle bis auf vier Zusammenhangskomponenten $F_1, \dots, F_4$ von M^T enthält.

(ii) Die T-Operation auf Y ist linear oder vom Petrie-Typ.

(iii) Es gibt einen zu S^1 komplementären Torus T_0, so dass

$$X(T_0, F_1) = \dots = X(T_0, F_4) \qquad \textit{und} \qquad X(T_0, F_1) \cap Y = \emptyset$$

Dann ist die T-Operation auf M linear.

Beweis. Mit Lemma 3.8 und (iii) sieht man, dass die Zusammenhangskomponenten von M^{S^1} gegeben sind durch $F_1, \dots, F_4$ und Y. Es sei $T_0 \neq \tilde{T} \subset T$ ein beliebiger Untertorus mit Korang 1 und $S^1 \not\subset \tilde{T}$. Aufgrund der dritten Voraussetzung und Lemma 3.8 können die Zusammenhangskomponenten von $M^{\tilde{T}}$ jeweils höchstens zwei Zusammenhangskomponenten von M^T enthalten. Also gibt es nach Lemma 3.9 und den Korollaren 3.4 und 3.15 eine eindimensionale komplexe T-Darstellung χ mit $T_0 \subset \ker \chi$ und $p, q \in \mathbb{N} - \{1, 0\}$, so dass für $j = 1, \dots, 4$ gilt

$$N(F_j, M) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq j} (n_i + 1)\chi_i \chi_j^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q.$$

Es seien F_0 eine Zusammenhangskomponente von Y^T, $x_0 \in F_0$ und für $j = 1, \dots, 4$ $T_j \subset T$ der Untertorus vom Korang 1, für den $F_j \subset X(T_j, F_0)$ gilt, und $x_j \in F_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_{x_0}M &\cong_{\mathbb{R}} T_{x_0}Y \oplus \bigoplus_{S^1 \not\subset \tilde{T} \subset T} N(F_0, X(\tilde{T}, F_0)) \\ &\cong_{\mathbb{R}} T_{x_0}Y \oplus \bigoplus_{i=1}^{4} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_{x_0}M \oplus \chi^{pq} \oplus \chi &\cong_{T_j, \mathbb{R}} T_{x_j}M \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \\ &\cong_{T_j, \mathbb{R}} T_{x_0}F_0 \oplus \bigoplus_{i \neq 0} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$N(F_0, Y) \oplus \chi^{pq} \oplus \chi \cong_{T_j, \mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0, F_i \subset Y} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1} \oplus \chi^p \oplus \chi^q$$

Da die T Operation auf Y aber linear oder vom Petrie-Typ ist, gibt es eine eindimensionale T-Darstellung $\tilde{\chi}$ mit $S^1 \subset \ker \tilde{\chi}$ und $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{N} - \{1, 0\}$, so dass

$$N(F_0, Y) \oplus \tilde{\chi}^{\tilde{p}\tilde{q}} \oplus \tilde{\chi} \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{i \neq 0, F_i \subset Y} (n_i + 1)\chi_i \chi_0^{-1} \oplus \tilde{\chi}^{\tilde{p}} \oplus \tilde{\chi}^{\tilde{q}}.$$

Also gilt für $j = 1, \dots, 4$

$$\tilde{\chi}^{\tilde{p}\tilde{q}} \oplus \tilde{\chi} \ominus \tilde{\chi}^{\tilde{p}} \ominus \tilde{\chi}^{\tilde{q}} \cong_{T_j, \mathbb{R}} \chi^{pq} \oplus \chi \ominus \chi^p \ominus \chi^q.$$

Dies ist nur dann möglich, wenn $\tilde{\chi} \cong_{T_j, \mathbb{R}} \chi$, d.h. es gibt $a_1, \dots, a_4 \in \{\pm 1\}$ mit $\tilde{\chi}^{a_j} \cong_{T_j, \mathbb{C}} \chi$. Ohne Einschränkungen kann $a_1 = a_2$ angenommen werden.

Da T von T_1 und T_2 erzeugt wird, folgt $\tilde{\chi}^{a_1} \cong_{\mathbb{C}} \chi$. Insbesondere ist $S^1 \subset \ker \chi$. Daher ist χ die triviale Darstellung. Also ist die T-Operation auf M linear bei $F_1, \dots, F_4$. Außerdem ist die T-Opertation auf Y linear. Daher folgt die Behauptung mit Lemma 3.11. □

Theorem 3.20. *Es seien T ein Torus vom Rang r, M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie $\mathbb{C}P^n$ mit fast effektiver, differenzierbarer T-Operation. Falls M^T aus $4r$ Zusammenhangskomponenten besteht ist die Operation linear oder vom Petrie-Typ.*

Beweis. Der Beweis wird per Induktion nach r geführt. Im Fall $r = 1$ ist die zuzeigende Aussage ist die Aussage von Theorem 3.5.

Also kann $r \geq 2$ angenommen werden. Es seien F eine Zusammenhangskomponente von M^T und $T_0 \subset T$ ein Untertorus vom Korang 1 mit $X(T_0, F) \neq F$. Außerdem seien $S_0^1 \subset T_0$ und $T_1 \subset T$ wie in Lemma 3.12. Dann operiert T_1 fast effektiv auf $X(S_0^1, F)$. Insbesondere ist die T-Operation auf $X(S_0^1, F)$ nicht trivial.

Also ist die Operation auf M nach den Proposition 3.13 linear, falls $X(S_0^1, F)$ mindestens $4r - 3$ Zusammenhangskomponenten von M^T enthält.

Falls $X(S_0^1, F)$ $4r - 4$ Zusammenhangskomponenten von M^T enthält und die Bedingung (iii) aus Proposition 3.17 erfüllt ist die T-Operation auf M linear oder vom Petrie-Typ.

Falls $X(S_0^1, F)$ $4r - 4$ Zusammenhangskomponenten von M^T enthält und die Bedingung (iii) aus Lemma 3.19 erfüllt ist die T-Operation auf M linear, da die T_1-Operation und damit auch die T-Operation auf $X(S_0^1, F)$ nach Induktionsvoraussetzung linear oder vom Petrie-Typ ist.

Falls $X(S_0^1, F)$ $4r - 4$ Zusammenhangskomponenten von M^T enthält und die beiden obigen Bedingungen nicht erfüllt, ist die T-Operation auf $X(S_0^1, F)$ nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 3.18 linear. Nach Lemma 3.10 ist dann die T-Operation auf $X(T_0, F) \subset X(S_0^1, F)$ ebenfalls linear.

Falls höchstens $4r - 5$ Zusammenhangskomponenten von M^T in $X(S_0^1, F)$ enthalten sind, ist die T_1-Operation und damit auch die T-Operation auf $X(S_0^1, F)$ nach Theorem 3.14 linear. Also ist auch die T-Operation auf $X(T_0, F) \subset X(S_0^1, F)$ linear.

Treten für jede Wahl von F, T_0 und S_0^1 nur die letzten beiden Fälle auf, ist die T-Operation auf M nach Lemma 3.10 linear. □

Korollar 3.21. *In der Situation von Theorem 3.20 sei die T-Operation auf M vom Petrie-Typ. Außerdem sei T_0 die Zusammenhangskomponente der 1 von* $\ker \chi$.

Dann gilt

(i) M^{T_0} *besteht aus r Zusammenhangskomponenten* $X^1, \dots, X^r$.

(ii) Für alle k enthält $X^k \cap M^T$ vier Komponenten von M^T, etwa $F_1^k, \dots, F_4^k$.

(iii) $\dim F_1^k = \dots = \dim F_4^k$.

(iv) $\frac{1}{2} \dim M \equiv -1 \mod 4$.

Beweis. Die Beweise von 3.20 und 3.17 zeigen, dass es eine $S^1 \subset T$ mit den folgenden Eigenschaften gibt.

(i) M^{S^1} besteht aus zwei Komponenten Y_0, Y_1, wobei Y_0 $4r - 4$ der F_i und Y_1 vier der F_i enthält.

(ii) Die T-Operationen auf Y_0 und Y_1 sind vom Petrie-Typ.

(iii) Es gibt einen Untertorus $S^1 \not\subset T_1 \subset T$ vom Rang $r - 1$, der fast effektiv auf Y_0 operiert.

Der Beweis von Korollar 3.15 zeigt, dass es einen Untertorus $S^1 \subset \tilde{T} \subset T$ vom Rang $r - 1$ gibt, der trivial auf Y_1 operiert, und dass Y_1^T aus vier Komponenten gleicher Dimension besteht. Der Beweis von Lemma 3.10 zeigt $\tilde{T} = T_0$.

Wendet man dieses Argument wiederholt auf Y_0 und T_1 an, so erhält man die Punkte (i), (ii) und (iii).

Daher gilt

$$\frac{1}{2}\dim M + 1 = \sum_{k=1}^{r}(\frac{1}{2}\dim X^k + 1) = 4\sum_{k=1}^{r}(\frac{1}{2}\dim F_1^k + 1).$$

Dies zeigt (iv). □

Bemerkung. Bezeichnet in der Situation des Korollars χ_i^k die Hopfdarstellung bei F_i^k, so kann man ohne Einschränkungen

$$\chi_1^k(\chi_1^k)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} 1 \qquad \chi_2^k(\chi_1^k)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} \chi \qquad \chi_3^k(\chi_1^k)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} \chi^{pq} \qquad \chi_4^k(\chi_1^k)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} \chi^{pq+1}$$

annehmen. Für $k = 1, \ldots, r$ sei $\rho_k = \chi_1^k(\chi_1^1)^{-1}$. Dann gilt

$$\chi_1^k(\chi_1^1)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} \rho_k \quad \chi_2^k(\chi_1^1)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} \chi\rho_k \quad \chi_3^k(\chi_1^1)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} \chi^{pq}\rho_k \quad \chi_4^k(\chi_1^1)^{-1} \cong_{\mathbb{C}} \chi^{pq+1}\rho_k.$$

Korollar 3.22. *Es seien T ein Torus vom Rang r, M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie $\mathbb{C}P^n$ mit fast effektiver, differenzierbarer T-Operation. Falls $n = 4r - 1$, ist die Operation linear oder vom Petrie-Typ. Falls sie vom Petrie-Typ ist, sind alle Fixpunkte isoliert.*

3.5 Der Fall n = 4r

D.M. James [17] bewies, dass jede nicht triviale S^1-Operation auf einem Kohomologie $\mathbb{C}P^4$ von linearem Typ ist. Dieses Ergebnis lässt sich mit einer ähnlichen Argumentation wie in den beiden vorherigen Abschnitten verallgemeinern zu:

Theorem 3.23. *Es seien T ein Torus vom Rang r, M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie $\mathbb{C}P^{4r}$ mit fast effektiver, differenzierbarer T-Operation. Dann ist die Operation auf M vom linearen Typ.*

Beweis. Falls M^T aus weniger als $4r + 1$ Zusammenhangskomponenten besteht, ist die Operation auf M nach Theorem 3.14 und Korollar 3.21 linear. Es kann also angenommen werden, dass M^T aus $4r + 1$ isolierten Punkten besteht.

Wie in den Beweisen der Theoreme 3.14 und 3.20 wird eine Induktion über r ausgeführt. Der Fall $r = 1$ wurde von D.M. James [17] gezeigt. Es kann also gleich $r \geq 2$ angenommen werden.

Es seien $x \in M^T$, T_0 ein Untertorus von T vom Korang 1 und $X_0 = X(T_0, x)$ eine Zusammenhangskomponente von X^{T_0}. Nach Lemma 3.10 genügt es für jede Wahl von T_0 und x zu zeigen, dass die T-Operation auf X_0 linear ist. Dazu seien $S_0^1 \subset T_0$ und $T_1 \subset T$ wie in Lemma 3.12. Dann operiert T_1 fast effektiv auf $Y = X(S_0^1, x)$ und es genügt zu zeigen, dass die T-Operation auf Y linear ist.

Es treten die folgenden Fälle auf:

(i) $\frac{1}{2}\dim Y \leq 4r - 6$

(ii) $\frac{1}{2}\dim Y = 4r - 5$

(iii) $\frac{1}{2}\dim Y = 4r - 4$

(iv) $\frac{1}{2}\dim Y \geq 4r-3$

In den Fällen (i) und (iii) ist die T-Operation auf Y nach Korollar 3.16 bzw. Induktionvoraussetzung linear. Im Fall (iv) ist die T-Operation auf M nach Proposition 3.13 linear.

Im Fall (ii) ist die T-Operation auf Y nach Korollar 3.22 linear oder vom Petrie-Typ. Außerdem enthält Y alle bis auf fünf Fixpunkte der T-Operation auf M. Es seien $x_1,\dots,x_5$ die Fixpunkte, die nicht in Y enthalten sind. Dann gibt es eine weitere Zusammenhangskomponente Y_0 von M^{S^1}, die höchstens drei oder alle x_i enthält. Die T-Operation auf Y_0 ist also linear.

Es sei $S^1_0 \not\subset \tilde{T} \subset T$ ein Untertorus vom Korang 1 und X eine Zusammenhangskomponente von $M^{\tilde{T}}$ Dann treten die folgenden Fälle auf:

(i) X enthält höchstes drei oder fünf der Fixpunkte der T-Operation

(ii) $x_1,\dots,x_4 \in X$, $x_5 \notin X$, $Y \cap X = \emptyset$

(iii) $x_1,\dots,x_3 \in X$, $x_4, x_5 \notin X$, $Y \cap X = \{x_0\} \subset M^T$

(iv) $x_1,\dots,x_5 \in X$, $Y \cap X = \{x_0\} \subset M^T$.

Im ersten Fall ist die T-Operation auf X linear. Falls also für jede Wahl von $\tilde{T}$ und X nur dieser Fall auftritt, ist die T-Operation auf M nach Lemma 3.11 linear.

Im zweiten Fall kann ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.19 geschlossen werden, dass die T-Operation auf M linear ist. Die hier vorliegende Situation unterscheidet sich nämlich nur in den beiden folgenden für den Beweis unwesentlichen Punkten von der am Anfang des Beweises des Lemmas beschriebenen Situation:

- Es kann eine Zusammenhangskomponente von $M^{S^1_0}$ geben, die zwei der x_i enthält.
- Für einen Untertorus $\tilde{T} \neq \hat{T} \subset T$ vom Korang 1 mit $S^1_0 \not\subset \hat{T}$ kann es eine Zusammenhangskomponente von $M^{\hat{T}}$ geben, die drei Fixpunkte der T-Operation enthält.

In Fall (iii) kann ähnlich wie im Beweis von Proposition 3.17 geschlossen werden, dass die T-Operation auf M linear ist. In der hier vorliegenden Situation kann es allerdings einen Untertorus $\tilde{T} \neq \hat{T}_0 \subset T$ vom Korang 1 mit $S^1_0 \not\subset \hat{T}_0$ und eine Zusammenhangskomponente $\hat{X}_0$ von $M^{\hat{T}_0}$ geben, die vier Fixpunkte enthält. Nach Lemma 3.8 gilt dann zwingend $x_4, x_5 \in \hat{X}_0$, $\hat{X}_0 \cap Y \neq \emptyset$ und $\{x_1, x_2, x_3\} \supset \hat{X}_0 \cap X \neq \emptyset$. Für jede andere Wahl eines Untertorus $\tilde{T} \neq \hat{T} \subset T$ vom Rang $r-1$ kann daher jede Zusammenhangskomponente von $M^{\hat{T}}$ höchstens drei Fixpunkte der T-Operation enthalten. Es genügt also anstelle von F_5 aus dem Beweis von 3.17 ein $x_6 \in Y^T - (\hat{X}_0 \cup X)$ zu betrachten, um die Linearität der T-Operation auf X und $\hat{X}_0$ zu zeigen.

In Fall (iv) besteht $M^{\tilde{T}}$ aus X und $4r-5$ isolierten Punkten. Da $\frac{1}{2}\dim M \equiv 0 \mod 4$, ist die $\tilde{T}$-Operation auf M und damit auch die T-Operation auf Y linear. □

4 Konsequenzen

D. Montgomery und C.T. Yang [24], C.T.C. Wall [31] und W.C. Hsiang [14] haben gezeigt, dass es für $n \geq 3$ unendlich viele paarweise nicht diffeomorphe Homotopie-$\mathbb{C}P^n$s gibt. In diesem Kapitel soll mit Hilfe der Ergebnisse des vorherigen Kapitels gezeigt werden, dass nur endlich viele von ihnen eine effektive, differenzierbare Operation eines Torus vom Rang $\geq \frac{n}{4}$ zu lassen.

4.1 Spin^c-Strukturen

In diesem und dem folgenden Abschnitt, wird der Beweis der Petrie-Vermutung von A. Hattori [10] wiedergegeben. Dazu werden zunächst einige Aussagen über die Gruppen Spin$^c(n)$ für gerade n zusammengefasst, wie man sie zum Beispiel in [19, Chapter I, Appendix D] oder [16, Chapter 11,13] findet.

Es sei Cl_n die Clifford-Algebra der quadratischen Form $q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ gerade. Dann wird Cl_n von $\mathbb{R}^n$ erzeugt und $v, w \in \mathbb{R}^n$ erfüllen die Relation

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle$$

Bezeichnet $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, so gilt $Cl_n = Cl_n^0 \oplus Cl_n^1$, wobei Cl_n^0 von den Produkten der Form $e_{i_1} * \cdots * e_{i_k}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ und geradem k und Cl_n^1 den Produkten dieser Form mit ungeradem k aufgespannt wird.

Die Untergruppe der multiplikativen Gruppe von Cl_n, die von der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ erzeugt wird, wird mit Pin(n) bezeichnet. Die Gruppe Spin(n) ist der Schnitt $\mathrm{Pin}(n) \cap Cl_n^0$.

Es gibt genau eine irreduzible komplexe Cl_n-Darstellung S. Diese ist eine reduzible Spin(n)-Darstellung

$$S = \Delta_+ \oplus \Delta_-,$$

wobei Δ_+ und Δ_- die Eigenräume von $\omega = i^{n/2} e_1 * \cdots * e_n$ zu den Eigenwerten $+1$ bzw. -1 sind. Da für alle $v \in \mathbb{R}^n$ $v\omega = -\omega v$, ist

$$\theta : \mathbb{R}^n \times \Delta_+ \to \mathbb{R}^n \times \Delta_- \qquad\qquad \theta(v, \delta) = (v, v\delta)$$

elliptisch, d.h. für alle $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ist $\theta(v, \cdot) : \Delta_+ \to \Delta_-$ ein Isomorphismus.

Die Operation von $\mathrm{Spin}(n) \times S^1$ auf $\Delta_\pm$ faktorisiert über $(\mathrm{Spin}(n) \times S^1)/\mathbb{Z}_2$, wobei $\mathbb{Z}_2 = \{(1, 1), (-1, -1)\} \subset \mathrm{Spin}(n) \times S^1$. Dies gibt Anlass zu der Definition

$$\mathrm{Spin}^c(n) = (\mathrm{Spin}(n) \times S^1)/\mathbb{Z}_2$$

Im Folgenden bezeichne $[g, h] \in \mathrm{Spin}^c(n)$ die Restklasse von $(g, h) \in \mathrm{Spin}(n) \times S^1$.

Da für $v \in \mathbb{R}^n$ und $x \in S^{n-1}$

$$xvx^{-1} = -vxx^{-1} - 2\langle v, x\rangle x^{-1} = -v + 2\langle v, x\rangle x \in \mathbb{R}^n$$

gilt, gibt es eine Darstellung $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ mit $\rho(x)v = xvx^{-1}$ für $v \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathrm{Spin}(n)$.

Durch

$$\begin{aligned} \rho_1 : \ & \mathrm{Spin}^c(n) \to SO(n) & \qquad \rho_1([g,h]) &= \rho(g) \\ \rho_2 : \ & \mathrm{Spin}^c(n) \to S^1 & \qquad \rho_2([g,h]) &= h^2 \end{aligned}$$

sind dann $\mathrm{Spin}^c(n)$-Darstellungen gegeben. Man hat die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(n) \xrightarrow{\rho_1 \times \rho_2} SO(n) \times S^1 \longrightarrow 1 \ .$$

Dabei ist $\mathbb{Z}_2 = \{[1,-1],[1,1]\} \subset \mathrm{Spin}^c$.

Durch

$$T = \left\{ \omega(\theta) = \left[\prod_{j=1}^{n/2} (\cos 2\pi\theta_j + e_{2j-1}e_{2j} \sin 2\pi\theta_j), \exp(2\pi i \theta_{n/2+1}) \right] \ ; \ \theta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{n/2+1} \right\}$$

ist ein maximaler Torus von $\mathrm{Spin}^c(n)$ gegeben. Für $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ sei $\alpha_j : T \to S^1$, so dass $\alpha_j(\omega(\theta)) = e^{4\pi i \theta_j}$. Dann gilt in $R(\mathrm{Spin}^c(n)) \subset R(T)$

$$\begin{aligned} \Delta_+ \ominus \Delta_- &= \bigotimes_{j=1}^{n/2} (\alpha_j^{\frac{1}{2}} \ominus \alpha_j^{-\frac{1}{2}}) \otimes \rho_2^{\frac{1}{2}} \\ \Delta_+ \oplus \Delta_- &= \bigotimes_{j=1}^{n/2} (\alpha_j^{\frac{1}{2}} \oplus \alpha_j^{-\frac{1}{2}}) \otimes \rho_2^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und $\rho_1 \cong_{\mathbb{R}} \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_{n/2}$

Mit Hilfe der Überlagerungstheorie lässt sich zeigen, dass es eine Inklusion $\hat{\psi} : U(\frac{n}{2}) \to \mathrm{Spin}^c(n)$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U(\frac{n}{2}) \arrow[r, "\hat{\psi}"] \arrow[dr, "\psi \times \det"'] & \mathrm{Spin}^c(n) \arrow[d, "\rho_1 \times \rho_2"] \\ & SO(n) \times S^1 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei gilt für $(\theta_1, \ldots, \theta_{n/2}) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{n/2}$

$$\psi(\mathrm{diag}(e^{2\pi i \theta_1}, \ldots, e^{2\pi i \theta_{n/2}})) = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta_1 & -\sin 2\pi\theta_1 \\ \sin 2\pi\theta_1 & \cos 2\pi\theta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta_{n/2} & -\sin 2\pi\theta_{n/2} \\ \sin 2\pi\theta_{n/2} & \cos 2\pi\theta_{n/2} \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\hat{\psi}(\mathrm{diag}(e^{2\pi i \theta_1}, \ldots, e^{2\pi i \theta_{n/2}})) = \omega\left(\frac{\theta_1}{2}, \ldots, \frac{\theta_{n/2}}{2}, \sum_{j=1}^{n/2} \frac{\theta_j}{2} \right) .$$

Definition 4.1. Es sei $Q \to M$ ein $SO(n)$-Prinzipalbündel. Eine *Spin^c-Struktur* von Q ist ein $\mathrm{Spin}^c(n)$-Prinzipalbündel $P \to M$ zusammen mit einem $SO(n)$-Bündelisomorphismus $f : Q \to P \times_{\rho_1} SO(n)$. Durch $L = P \times_{\rho_2} S^1$ ist ein S^1-Bündel gegeben. Die erste Chern-Klasse von L wird auch als erste Chern-Klasse von P bzw. $c_1(P)$ bezeichnet.

Ist $E \to M$ ein orthogonales, orientiertes Vektorbündel und Q das Bündel der orientierten orthogonalen Rahmen von M, dann wird P auf als Spin^c-Struktur von E bezeichnet. In diesem Fall gilt $E \cong P \times_{\rho_1} \mathbb{R}^n$.

Eine Spin^c-Struktur des Tangentialbündels einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M wird auch als Spin^c-Struktur von M bezeichnet.

Im Folgenden wird Q mittels f mit $P \times_{\rho_1} SO(n)$ identifiziert, d.h. es wird $Q = P \times_{\rho_1} SO(n)$ angenommen.

Da $U(\frac{n}{2})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Spin}^c(n)$ ist, besitzt jedes Vektorbündels E, das eine komplexe Struktur besitzt, auch eine Spin^c-Struktur mit $c_1(P) = c_1(L) = c_1(\Lambda^{n/2}_{\mathbb{C}} E) = c_1(E)$.

Lemma 4.2. *Es seien $\alpha \in \pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}_2$ und $\beta \in \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ Erzeuger der jeweiligen Gruppe. Dann ist*

$$(\rho_1 \times \rho_2)_* \pi_1(\mathrm{Spin}^c(n)) = (\alpha, \beta)\mathbb{Z} \subset \pi_1(SO(n) \times S^1).$$

Beweis. Es seien $\gamma_1 : I \to SO(n)$ ein Repräsentant von α und $\gamma_2 : I \to S^1$, $t \mapsto e^{\pi t i}$. Da $\rho_1 : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ eine zweifache Überlagerung ist, gibt es einen Lift $\hat{\gamma}_1 : I \to \mathrm{Spin}(n)$ von γ_1 mit $\hat{\gamma}_1(0) = 1$ und $\hat{\gamma}_1(1) = -1$.

Durch $\gamma_3 : I \to \mathrm{Spin}^c(n)$, $\gamma_3(t) = [\hat{\gamma}_1(t), \gamma_2(t)]$, ist dann ein geschlossener Weg gegeben. Da $(\rho_1 \times \rho_2) \circ \gamma_3$ ein Repräsentant von $\pm(\alpha, \beta)$ ist und $\rho_1 \times \rho_2 : \mathrm{Spin}^c(n) \to SO(n) \times S^1$ eine zweifache Überlagerung ist, folgt die Behauptung. □

Theorem 4.3. *Es sei X ein CW-Komplex, $\psi : H^2(X; \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ die Reduktion der Koeffizienten und $Q \to X$ ein $SO(n)$-Prinzipalbündel. Dann gibt es zu jedem $c \in \psi^{-1}(w_2(Q))$ eine Spin^c-Struktur P von Q mit $c_1(P) = c$.*

Beweis. Es sei $L \to X$ ein S^1-Prinzipalbündel. Dann gibt es genau dann eine Spin^c-Struktur P für Q mit $L \cong P \times_{\rho_2} S^1$, wenn es eine Abbildung $F : X \to B\mathrm{Spin}^c(n)$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} & B\mathrm{Spin}^c(n) \arrow[d, "B\rho_1 \times B\rho_2"] \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f_Q \times f_L"'] & BSO(n) \times BS^1 \end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie kommutiert. Dabei bezeichnen f_L und f_Q die klassifizierenden Abbildungen für L bzw. Q.

Es sei Z eine Homotopiefaser von $B\rho_1 \times B\rho_2$ dann ist

$$\pi_k(Z) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gibt also ein $c \in H^2(BSO(n) \times BS^1; \mathbb{Z}_2)$, so dass $(f_Q \times f_L)^* c$ genau dann verschwindet, wenn es ein solches F gibt.

Um c zu bestimmen betrachte speziell $X = BS^1$, $f_L = \mathrm{id}$ und $f_Q = \mathrm{const}$ bzw. $X = BSO(n)$, $f_Q = \mathrm{id}$ und $f_L = \mathrm{const}$. Es gilt

$$(B\rho_1 \times B\rho_2)_*\pi_2(B\mathrm{Spin}^c) \cong (\rho_1 \times \rho_2)_*\pi_1(\mathrm{Spin}^c) = (\alpha, \beta)\mathbb{Z},$$

wobei $\alpha \in \pi_2(BSO(n)) \cong \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ und $\beta \in \pi_2(BS^1) \cong \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ jeweils ein Erzeuger ist. Da aber $(\alpha, 0)$ bzw. $(0, \beta)$ im Bild von $(f_Q \times f_L)_*$ enthalten sind, ist in beiden Fällen $(f_Q \times f_L)^*(c) \neq 0$.

Also ist $c = w_2 + c_1 \in H^2(BSO(n) \times BS^1; \mathbb{Z}_2) = H^2(BSO(n); \mathbb{Z}_2) \oplus H^2(BS^1; \mathbb{Z}_2)$ die Summe der zweiten universellen Stiefel-Whitney-Klasse und der $\mathbb{Z}_2$-Reduktion der universellen ersten Chern-Klasse.

Da die Elementen von $H^2(X; \mathbb{Z})$ bijektiv den Isomorphieklassen von S^1-Bündeln über X entsprechen, folgt die Behauptung. $\square$

Definition 4.4. Es sei $Q \to M$ ein $SO(n)$-Bündel und P eine Spin^c-Struktur von Q. Außerdem gebe es eine S^1-Operation auf Q, die mit der $SO(n)$-Operation auf Q kommutiert. Dann wird eine S^1-Operation auf P, die mit der Spin$^c(n)$-Operation auf P kommutiert und die S^1-Operation auf $Q = P \times_{\rho_1} SO(n)$ induziert, als *Lift* der S^1-Operation bezeichnet.

Gibt es in der Situation der Definition einen Lift der S^1-Operation von Q nach P, so ist P_{S^1} eine Spin^c-Struktur für Q_{S^1} und mit $L = P \times_{\rho_2} S^1$ gilt $L_{S^1} \cong P_{S^1} \times_{\rho_2} S^1$.

Operiert S^1 durch Isometrien auf der n-dimensionalen, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M und ist Q das Bündel der orientierten orthogonalen Rahmen von TM. Dann liefern die Differentiale dieser Operation eine Operation auf Q. Ein Lift dieser Operation in eine Spin^c-Struktur von M, wird auch als Lift der S^1-Operation auf M bezeichnet.

Proposition 4.5 ([25, S. 127]). *In der obigen Situation sei P eine Spin^c-Struktur von M und $H^1(M; \mathbb{Z}) = 0$. Dann gibt es einen Lift der S^1-Operation von M nach P.*

Beweis. Da die Sequenz

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(n) \xrightarrow{\rho_1} SO(n) \longrightarrow 1\ .$$

exakt ist, ist $\pi : P \to Q$ ein S^1-Prinzipalbündel. Da $n > 2$ ist, ist $H^1(Q; \mathbb{Z}) = 0$. Also gibt es eine S^1-Operation $\Phi : S^1 \times P \to P$, die π zu einer äquivarianten Abbildung macht und mit der Prinzipaloperation von S^1 auf P kommutiert (vgl. Abschnitt 2.4 und [11]). Diese kommutiert möglicherweise nicht mit der Spin$^c(n)$-Operation auf P. Im folgenden wird gezeigt, wie Φ verändert werden kann, so dass diese Operationen kommutieren. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Es seien $s \in S^1$, $h \in \mathrm{Spin}^c(n)$ und $x \in P$. Dann gibt es ein $\hat{\psi}(s, x, h) \in S^1$, so dass $\Phi(s, x)h = \Phi(s, xh)\hat{\psi}(s, x, h)$.

(ii) Für $t \in S^1$ gilt $\hat{\psi}(s, xt, h) = \hat{\psi}(s, x, h)$. Es gibt also ein $\psi : S^1 \times Q \times SO(n) \to S^1$, so dass $\hat{\psi}(s, x, h) = \psi(s, \pi(x), h)$.

(iii) $\psi(1, z, h) = 1 = \psi(s, z, 1)$ für alle $z \in Q$

(iv) $\psi(s_1 s_2, z, h) = \psi(s_1, s_2 z, h)\psi(s_2, z, h)$

(v) $\psi(s, z, h_1 h_2) = \psi(s, z h_1, h_2)\psi(s, z, h_1)$

Aus (iii) folgt, dass ψ nullhomotop ist. Es gibt also eine eindeutige Abbildung $\tilde{\psi} : S^1 \times Q \times SO(n) \to \mathbb{R}$, so dass $\psi = \exp \circ \tilde{\psi}$ und $\tilde{\psi}(1, z, 1) = 0$ für alle $z \in Q$.

Aufgrund der Eindeutigkeit von $\tilde{\psi}$, gelten die Gleichungen (iii) bis (v) für $\tilde{\psi}$ anstelle von ψ und Addition anstelle von Multiplikation. Insbesondere gilt:

$$\tilde{\psi}(s, zh', h'^{-1}h) - \tilde{\psi}(s, zh', h'^{-1}) = \tilde{\psi}(s, z, h)$$

Für $s \in S^1$ und $z \in Q$ sei

$$\gamma(s, z) = \int_{\mathrm{Spin}^c(n)} \tilde{\psi}(s, zh, h^{-1})\, dh,$$

wobei dh das normierte Haarsche Maß von $\mathrm{Spin}^c(n)$ bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned}\gamma(s, zh) - \gamma(s, z) &= \int \tilde{\psi}(s, zhh', h'^{-1})\, dh' - \int \tilde{\psi}(s, zh', h'^{-1})\, dh' \\ &= \int \tilde{\psi}(s, zh', h'^{-1}h) - \tilde{\psi}(s, zh', h'^{-1})\, dh' \\ &= \tilde{\psi}(s, z, h)\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\gamma(s_1 s_2, z) = \gamma(s_1, s_2 z) + \gamma(s_2, z)$$

Es sei $\bar{\gamma} = \exp \circ \gamma$. Dann wird durch $\tilde{\Phi}(s, x) = \Phi(s, x)\bar{\gamma}(s, \pi(x))$ eine neue S^1-Operation auf P definiert.

Für $h \in \mathrm{Spin}^c(n)$ erhält man:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(s, x)h &= \Phi(s, x)\bar{\gamma}(s, \pi(x))h \\ &= \Phi(s, xh)\psi(s, \pi(x), h)\bar{\gamma}(s, \pi(x))\end{aligned}$$

Wegen $\bar{\gamma}(s, \pi(x)h)\bar{\gamma}(s, \pi(x))^{-1} = \psi(s, \pi(x), h)$ folgt hieraus $\tilde{\Phi}(s, x)h = \tilde{\Phi}(s, xh)$.

Also ist $\tilde{\Phi}$ ein Lift der S^1-Operation. □

Theorem 4.6. *Operiert S^1 differenzierbar auf der n-dimensionalen, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit $H^1(M; \mathbb{Z}) = 0$, so gibt es zu jedem $c \in \psi^{-1}(w_2^{S^1}(M)) \subset H^2_{S^1}(M, \mathbb{Z})$ eine Spin^c-Struktur P auf M und einen Lift der S^1-Operation nach P mit $c_1^{S^1}(P) = c$.*

Beweis. Wegen $H^1(M; \mathbb{Z}) = 0$, ist $H^2_{S^1}(M; \mathbb{Z}) = H^2(M; \mathbb{Z}) \oplus H^2(BS^1; \mathbb{Z})$. Es seien c wie oben und P_0 die Spin^c-Struktur für TM_{S^1} mit $c_1(P_0) = c$. Außerdem seien $\alpha \in H^2(M)$ und $d_0 \in \mathbb{Z}$, so dass $c = \alpha + d_0 t_1$. Die Einschränkung P von P_0 auf M ist eine Spin^c-Struktur für M und es gilt $c_1(P) = \alpha$. Nach Lemma 4.5 gibt es einen Lift $\Phi : S^1 \times P \to P$ der S^1-Operation auf M.

Es sei $P_1 = ES^1 \times_\Phi P$. Dann ist P_1 eine Spin^c-Struktur für TM_{S^1} und es gibt ein $d_1 \in \mathbb{Z}$, so dass $c_1(P_1) = \alpha + d_1 t_1$. Wegen $\psi(c_1(P_0)) = w_2^{S^1}(M) = \psi(c_1(P_1))$, gibt es ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $d_0 - d_1 = 2d$.

Durch $\Phi' : S^1 \times P \to P$ $\Phi'(g,x) = \Phi(g,x)g^d$ für $g \in S^1$ und $x \in P$ ist ein weiterer Lift der S^1-Operation gegeben. Es seien $\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}'$ die durch Φ bzw. Φ' induzierten S^1-Operationen auf $L = P \times_{\rho_2} S^1$ für $g, y \in S^1$ und $x \in P$ gilt dann

$$\tilde{\Phi}'(g,[x,y]) = [\Phi'(g,x),y] = [\Phi(g,x),g^{2d}y] = [\Phi(g,x),y]g^{2d} = \tilde{\Phi}(g,[x,y])g^{2d}.$$

Also ist $c_1(ES^1 \times_{\tilde{\Phi}} P) = c_1(ES^1 \times_{\Phi} P) + 2dt_1 = c_1(P_0)$. □

Lemma 4.7. *In der Situation des obigen Theorems sei Φ ein Lift der S^1-Operation von M in eine Spin^c-Struktur P. Außerdem seien F_i eine Zusammenhangskomponente von M^{S^1} und $x_i \in F_i$, ω_i das Gewicht der S^1-Darstellung $P \times_{\rho_2} \mathbb{C}|_{x_i}$ und w_{ik} die lokalen Gewichte der S^1-Operation (vgl. 2.4).*

Dann gibt es ein $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ mit

$$\omega_i = 2\lambda_i + \sum_k w_{ik}d_{ik}.$$

Beweis. Es gilt

$$c_1^{S^1}(P|_{F_i}) = c_1(P|_{F_i}) + \omega_i t_1 \quad c_1^{S^1}(\nu_{F_i}^M) = c_1(\nu_{F_i}^M) + \sum_k w_{ik}d_{ik}t_1 \quad w_2^{S^1}(TF_i) = w_2(TF_i).$$

Wegen

$$c_1^{S^1}(P|_{F_i}) \equiv w_2^{S^1}(TM|_{F_i}) \equiv w_2^{S^1}(TF_i) + c_1^{S^1}(\nu_{F_i}) \mod 2$$

folgt die Behauptung. □

4.2 Der Index-Homomorphismus

M.F. Atiyah und I.M. Singer [4] definierten für eine kompakte G-Mannigfaltigkeit M den *Index-Homomorphismus* $\mathrm{ind}_G : K_G(TM) \to R(G)$. Er wird in diesem Abschnitt dazu verwendet, die Petrie-Vermutung für S^1-Operationen auf Kohomologie komplex projektiven Räumen vom linearen und vom Petrie-Typ zu beweisen.

Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Es seien Y eine G-Mannigfaltigkeiten, $M \subset Y$ eine kompakte G-Untermannigfaltigkeit von Y und $i : M \hookrightarrow Y$ die Inklusion. Dann ist das Normalenbündel N von TM in TY gegeben durch das Pullback von $\nu_M^Y \oplus \nu_M^Y$ nach TM. Durch eine geeignete Wahl einer äquivarianten Tubenumgebung von TM in TY wird der erste Summand mit Punkten in Y und der zweite Summand mit Tangenten an Y identifiziert.

$\nu_M^Y \oplus \nu_M^Y$ ist als reelles Vektorbündel isomorph zu $\nu_M^Y \otimes \mathbb{C}$ Also besitzt N eine komplexe Struktur. Nun hat man einen Homomorphismus

$$i_! : \; K_G(TM) \xrightarrow{\Phi} K_G(N) \xrightarrow{i_*} K_G(TY) \; ,$$

wobei Φ den Thom-Isomorphismus bezeichnet und i_* durch die oben gewählte Tubenumgebung von TM in TY induziert wird.

Ist E eine reelle lineare G-Darstellung und j die Inklusion des Ursprungs, dann ist

$$j_! : \; R(G) \xrightarrow{\Phi} K_G(E \oplus E) \xrightarrow{=} K_G(TE)$$

ein Isomorphismus.

Da es zu jeder kompakten G-Mannigfaltigkeit eine Einbettung i in eine lineare G-Darstellung E gibt, erhält man einen Homomorphismus

$$\mathrm{ind}_G = j_!^{-1} \circ i_! : K_G(TM) \to R(G).$$

Er wird als *Index-Homomorphismus* bezeichnet und hängt nicht von der Wahl von i und E ab.

Es sei nun speziell M eine kompakte, orientierte Riemannschen Mannigfaltigkeit gerader Diemension $n \geq 4$ mit $H^1(M;\mathbb{Z}) = 0$, auf der S^1 differnzierbar operiert. Außerdem sei P eine Spin^c-Struktur für M. Nach Theorem 4.5 gibt es dann einen Lift der S^1-Operation von M nach P. Also sind durch $E_+ = P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} (\rho_1 \times \Delta_+)$ und $E_- = P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} (\rho_1 \times \Delta_-)$ komplexe S^1-Vektorbündel über TM gegeben. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\theta : E_+|_{TM-M} &\to E_-|_{TM-M} \\ (p, v, \delta) &\mapsto (p, v, v\delta)\end{aligned}$$

ein Isomorphismus von S^1-Vektorbündeln. Daher wird durch θ ein Element $\delta(P) = [E_+, E_-, \theta] \in K_{S^1}(TM)$ definiert.

Theorem 4.8. *In der obigen Situation gilt:*

$$\mathrm{ind}_{S^1}(\delta(P)) = \sum_i (-1)^{\sigma_i} \left\{ e^{\frac{f_i^* c_1(P)}{2}} t^{\lambda_i} \hat{\mathcal{A}}(F_i) \prod_k \mathcal{F}(\nu_i(w_{ik}), t^{w_{ik}}) \right\} [F_i] \in R(S^1) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

und

$$\mathrm{ind}_{S^1}(\delta(P))(1) = \{e^{c_1(P)/2} \hat{\mathcal{A}}(M)\}[M]$$

Dabei hängt σ_i von der Wahl einer Orientierung von F_i ab. Außerdem werden die folgenden Bezeichnungen verwenden: Für ein m-dimensionales, komplexes Vektorbündel E mit Chern-Klasse $c(E) = \prod_{k=1}^m (1 + x_k)$ ist $\mathcal{F}(E, t) = \prod_k \frac{1}{e^{x_k/2} - e^{-x_k/2} t^{-1}}$. Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X mit Pontrjagin-Klasse $p(X) = \prod_k (1 + t_k^2)$ ist $\hat{\mathcal{A}}(X) = \prod_k \frac{t_k}{e^{t_k/2} - e^{-t_k/2}}$. $f_i : F_i \hookrightarrow M$ bezeichnet die Inklusion. Ansonsten werden die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.4 verwendet.

Beweis. Es sei $n_i = \dim F_i$.

Da S^1 trivial auf F_i operiert, ist $K_{S^1}(F_i) = K(F_i) \otimes R(S^1)$. Also erhält man einen Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{S^1} : K_{S^1}(F_i) &\to H^*(F_i, \mathbb{Q}) \otimes R(S^1) \\ E \otimes V &\mapsto \mathrm{ch}(E) \otimes V.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{ch} : K(F_i) \to H^*(F_i, \mathbb{Q})$ den Chern-Charakter. Nach [3, S.538] und [5, S.556] gilt nun:

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_{S^1}(\delta(P)) &= \sum_i (-1)^{\sigma_i} \left\{ \frac{\mathrm{ch}_{S^1}(Df_i^* \delta(P))}{\mathrm{ch}_{S^1}(\lambda_{-1}(\nu_{F_i}^M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))} \hat{\mathcal{A}}(F_i)^2 \right\} [TF_i] \\ &= \sum_i (-1)^{\sigma_i} \left\{ \frac{\mathrm{ch}_{S^1}(f_i^*(P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \Delta_+ - P \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \Delta_-))}{\mathrm{ch}_S^1(\lambda_{-1}(\nu_{F_i}^M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))} \frac{\hat{\mathcal{A}}(F_i)^2}{e(F_i)} \right\} [F_i]\end{aligned}$$

Der Zerlegung

$$f_i^* TM = TF_i \oplus \bigoplus_k \nu_i(w_{ik})$$

entspricht eine Reduktion der Strukturgruppe von $SO(n)$ nach $\hat{H} = SO(n_i) \times \prod_k U(d_{ik})$, d.h. es gibt ein $\hat{H}$-Prinzipalbündel $\bar{Q} \to F_i$ mit $\bar{Q} \subset f_i^* Q$. Bezeichnet $\pi : P \to Q$ die Projektion, dann ist $\bar{P} = \pi^{-1}(\bar{Q}) \subset f_i^* P$ ein H-Prinzipalbündel, $H = \mathrm{Spin}^c(n_i) \times \prod_k U(d_{ik})$. $\bar{Q}$ und $\bar{P}$ sind invariant unter der S^1-Operation auf Q bzw. P.

Nun hat man die folgenden Isomorphismen von H-Darstellungen

$$\begin{aligned} \Delta_+ &\cong \Delta'_+ \otimes \Delta''_+ \oplus \Delta'_- \otimes \Delta''_- \\ \Delta_- &\cong \Delta'_- \otimes \Delta''_+ \oplus \Delta'_+ \otimes \Delta''_- \\ \rho_2 &\cong \rho'_2 \otimes \rho''_2 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $\Delta''_\pm, \rho''_2$ Einschränkungen von $\mathrm{Spin}^c(n-n_i)$-Darstellungen auf $\prod_k U(d_{ik})$ und $\Delta'_\pm, \rho'_2$ $\mathrm{Spin}^c(n_i)$-Darstellugen.

Also erhält man

$$\begin{aligned} f_i^*(P \times_{\mathrm{Spin}^c} \Delta_+ - P \times_{\mathrm{Spin}^c} \Delta_-) &\cong (\bar{P} \times_H \Delta'_+ - \bar{P} \times_H \Delta'_-) \otimes (\bar{P} \times_H \Delta''_+ - \bar{P} \times_H \Delta''_-) \\ f_i^*(P \times_{\mathrm{Spin}^c} \rho_2) &\cong \bar{P} \times_H \rho'_2 \otimes \bar{P} \times_H \rho''_2 \end{aligned}$$

Die S^1-Operation auf einer Faser von $\bar{P}$ liefert, einen Gruppenhomomorphismus $\phi : S^1 \to T \subset H$, so dass für jede H-Darstellung ψ die S^1-Operation auf den Fasern von $\bar{P} \times_H \psi$ gegeben ist durch $\psi \circ \phi$.

Es sei $B = \bar{P}/T$ und $\pi : B \to M$. Dann operiert S^1 trivial auf B. Außerdem ist $\pi^* : H^*(M; \mathbb{Q}) \to H^*(B; \mathbb{Q})$ injektiv [15, S.35] und für jede H-Darstellung ψ gilt

$$\pi^*(\bar{P} \times_H \psi) = \bar{P} \times_T \psi.$$

Indem man $H^*(M; \mathbb{Q})$ mit seinem Bild unter π^* identifiziert, erhält man mit $c(\nu_i(w_{ik})) = \prod_j (1 + x_{jk})$ [16, S.281-282]:

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_{S^1}(\bar{P} \times_H \Delta'_+ - \bar{P} \times_H \Delta'_-) &= e^{c_1(\bar{P} \times_H \rho'_2)/2} \hat{\mathcal{A}}^{-1}(F_i) e(F_i) \\ \mathrm{ch}_{S^1}(\bar{P} \times_H \Delta''_+ - \bar{P} \times_H \Delta''_-) &= e^{c_1(\bar{P} \times_H \rho''_2)/2} t^{\omega_i/2} \prod_{kj} (e^{x_{jk}/2} t^{w_{ik}/2} - e^{-x_{jk}/2} t^{-w_{ik}/2}) \\ \mathrm{ch}_{S^1}(\lambda_{-1}(\nu_{F_i}^M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})) &= \prod_{jk} (1 - e^{x_{jk}} t^{w_{ik}})(1 - e^{-x_{jk}} t^{-w_{ik}}) \end{aligned}$$

Es folgt der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich aus einer zu den obigen Ausführungen analogen Argumentation und der Kommutativität des folgenden Diagramms.

$$\begin{array}{ccccc} K_{S^1}(M) & \xrightarrow{\mathrm{ind}_{S^1}} & R(S^1) & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_1(M) & \xrightarrow{\mathrm{ind}_1} & R(1) & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z} \end{array}$$

□

Korollar 4.9. *In der obigen Situtation gelte mit den Bezeichnungen aus Lemma 4.7* $|\omega_i| < \sum_k |w_{ik}| d_{ik}$ *für alle* F_i. *Dann ist*

$$\{e^{c_1(P)/2}\hat{\mathcal{A}}(M)\}[M] = 0.$$

Beweis. Da die lokalen Gewichte der S^1-Operation nur bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt sind, kann angenommen werden, dass sie alle positiv sind. Nach Voraussetzung gilt dann $0 > \lambda_i > -\sum_k w_{ik} d_{ik}$. Daher ist für alle i

$$\lim_{z\to 0}\left\{e^{\frac{f_i^* c_1(P)}{2}} z^{\lambda_i}\hat{\mathcal{A}}(F_i)\prod_k \mathcal{F}(\nu_i(w_{ik}), z^{w_{ik}})\right\}[F_i] = 0$$
$$\lim_{z\to \infty}\left\{e^{\frac{f_i^* c_1(P)}{2}} z^{\lambda_i}\hat{\mathcal{A}}(F_i)\prod_k \mathcal{F}(\nu_i(w_{ik}), z^{w_{ik}})\right\}[F_i] = 0.$$

Es sei

$$h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \quad h(z) = \mathrm{ind}_{S^1}(\delta(P))(z).$$

Dann ist h eine holomorphe Funktion und es gilt

$$\lim_{z\to 0} h(z) = 0 \qquad\qquad \lim_{|z|\to \infty} h(z) = 0.$$

Mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz und dem Satz von Liouville sieht man nun, dass h konstant 0 ist. Wegen $\{e^{c_1(P)/2}\hat{\mathcal{A}}(M)\}[M] = h(1)$ folgt die Behauptung. □

Satz 4.10. *Es sei* M *ein* $\mathbb{Z}$*-Kohomologie komplex projektiver Raum der Dimension* $2n$. *Dann sind äquivalent:*

(i) $p(M) = (1+\xi_0^2)^{n+1}$

(ii) $\{e^{k\xi_0/2}\hat{\mathcal{A}}(M)\}[M] = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $k = n+1 \mod 2$ *und* $|k| < n+1$

Beweis. Es sei $k = 2j-(n+1)$, wie oben. Dann gilt $1 \le j \le n$. Falls (i) gilt, so hat man

$$\begin{aligned} e^{k\xi_0/2}\hat{\mathcal{A}}(M) &= e^{k\xi_0/2}\left(\frac{\xi_0}{e^{\xi_0/2}-e^{-\xi_0/2}}\right)^{n+1} \\ &= e^{j\xi_0}\left(\frac{\xi_0}{e^{\xi_0}-1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \{e^{k\xi_0/2}\hat{\mathcal{A}}(M)\}[M] &= \mathrm{res}(e^{jz}(e^z-1)^{-(n+1)};0) \\ &= I_1+I_2+I_3+I_4 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$I_1 = \int_{\gamma_2} e^{jz}(e^z-1)^{-(n+1)}dz = -\int_{\gamma_1} e^{jz}(e^z-1)^{-(n+1)}dz = -I_3$$
$$I_2 = \int_{\gamma_1} e^{jz}(e^z-1)^{-(n+1)}dz = -\int_{-\pi}^{\pi} ie^{j(-ix+w)}(e^{-ix+w}-1)^{-(n+1)}dx \overset{w\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$I_4 = \int_{\gamma_4} e^{jz}(e^z-1)^{-(n+1)}dz = \int_{-\pi}^{\pi} ie^{j(ix-w)}(e^{ix-w}-1)^{-(n+1)}dx \overset{w\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$w > 0$ und

$$\gamma_1 : [-w, w] \to \mathbb{C} \;\; \gamma_1(x) = x + i\pi \qquad \gamma_2 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \;\; \gamma_1(x) = -ix + w$$
$$\gamma_3 : [-w, w] \to \mathbb{C} \;\; \gamma_3(x) = -x - i\pi \qquad \gamma_4 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \;\; \gamma_4(x) = ix - w$$

Es gilt also (ii).

Um die Umkehrung zu zeigen genügt es zu zeigen, dass $p(M)$ eindeutig durch die Gleichungen $\{e^{k\xi_0/2}\hat{\mathcal{A}}(M)\}[M]$, $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \equiv n+1 \mod 2$ und $|k| < n+1$, bestimmt ist. Es seien nun $a_1, \ldots, a_{[n/2]} \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\hat{\mathcal{A}}(M) = \begin{cases} 1 + (n-2)! a_1 \xi_0 + \cdots + 2! a_{\frac{n}{2}-1} \xi_0^{\frac{n}{2}-1} + a_{\frac{n}{2}} \xi_0^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z} \\ 1 + (n-2)! a_1 \xi_0 + \cdots + 2! a_{\frac{n-1}{2}-1} \xi_0^{\frac{n-1}{2}-1} + a_{\frac{n-1}{2}} \xi_0^{\frac{n-1}{2}} & \text{falls } n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\{e^{\frac{k}{2}\xi_0}\hat{\mathcal{A}}(M)\}[M] = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{k}{2}\right)^n + \left(\frac{k}{2}\right)^{n-2} a_1 + \cdots + \left(\frac{k}{2}\right)^2 a_{\frac{n}{2}-1} + a_{\frac{n}{2}} & \text{für } n \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{1}{n!}\left(\frac{k}{2}\right)^n + \left(\frac{k}{2}\right)^{n-2} a_1 + \cdots + \left(\frac{k}{2}\right)^2 a_{\frac{n-1}{2}-1} + \frac{k}{2} a_{\frac{n-1}{2}} & \text{für } n \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

Da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0,$$

falls $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$, folgt, dass $\hat{\mathcal{A}}(M)$ eindeutig durch die obigen Gleichungen bestimmt ist. Da M ein Kohomologie komplex projektiver Raum ist, ist $p(M)$ eindeutig durch $\hat{\mathcal{A}}(M)$ bestimmt. Also folgt die Behauptung. □

Theorem 4.11. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum der Dimension $2n$, auf dem S^1 differenzierbar operiert. Falls für jedes F_i die Ungleichung*

$$\frac{n-1}{n+1} \Big| \sum_{j \neq i} (n_j + 1)(a_i - a_j) \Big| < \sum_k |w_{ik}| d_{ik}$$

erfüllt ist, gilt $p(M) = (1 + \xi_0^2)^{n+1}$.

Beweis. Für $n < 2$ ist die Aussage trivial. Also kann gleich $2n \geq 4$ angenommen werden. Betrachte zunächst den Fall, in dem $a = \frac{1}{n+1}\sum_j (n_j + 1) a_j$ und alle a_i, w_{ik} gerade, ganze Zahlen sind. Es sei $k \in \mathbb{Z}$, so dass $|k| < n+1$ und $k \equiv n+1 \mod 2$.

Da es auf M eine S^1-invariante Riemannsche Metrik gibt und $w_2(M) = (n+1)\xi_0$ ist, gibt es nach Theorem 4.6 eine Spin^c-Struktur P auf M und einen Lift der S^1-Operation nach P, so dass eine der beiden folgenden Gleichungen erfüllt ist.

$$c_1^{S^1}(P) = k(\xi - at_1) \qquad c_1^{S^1}(P) = k(\xi - at_1) + t_1$$

Im ersten Fall ist

$$|\omega_i| = |k||a_i - a| = \frac{|k|}{n+1} \Big| \sum_{j \neq i} (n_j + 1)(a_i - a_j) \Big| < \sum_k |w_{ik}| d_{ik}.$$

Im zweiten Fall hat man

$$|\omega_i| \geq |k||a_i - a| + 1 < \sum_k |w_{ik}|d_{ik}.$$

Mit Korollar 4.9 und Satz 4.10 folgt also die Behauptung.

Falls die Voraussetzungen an a, a_i, w_{ik} nicht erfüllt sind kann wie folgt geschlossen werden. Durch $\Phi : S^1 \times M \to M \quad \Phi(g, x) = g^{2(n+1)}x$ ist eine weitere S^1-Operation auf M gegeben. Die lokalen und globalen Gewichte dieser Operation ergeben sich aus denen der ursprünglichen durch Multiplikation mit $2(n + 1)$. Also erfüllt die neue Operation die Voraussetzungen des ersten Falls. □

Korollar 4.12. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum, der eine nicht triviale S^1-Operation von linearem Typ zulässt. Dann ist $p(M) = (1 + \xi_0^2)^{n+1}$.*

Beweis. Falls die Operation auf M von linearem Typ ist, ist die Ungleichung aus Theorem 4.11 efüllt. □

Korollar 4.13. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum der Dimension $2n = 2(4h-1)$, der eine S^1-Operation vom Petrie-Typ zulässt. Außerdem sei $b_1, \ldots, b_{4h}$ die Folge der ganzen Zahlen, in der jedes globale Gewicht a_i dieser Operation genau $(n_i + 1)$-mal auftritt.*

Falls es ganze Zahlen $\rho_1, \ldots, \rho_h$ und $d \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die $b_1, \ldots b_{4h}$ durch

$$\rho_1, \ldots, \rho_h, \rho_1 + d, \ldots, \rho_h + d, \rho_1 + dpq, \ldots, \rho_h + dpq, \rho_1 + d(pq + 1), \ldots \rho_h + d(pq + 1)$$

gegeben sind, gilt $p(M) = (1 + \xi_0^2)^{n+1}$.

Beweis. Für alle i gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\neq i}(n_j + 1)|a_j - a_i| &= \sum_{j=1}^{4h} |b_j - a_i| \\
&= \sum_{j=1}^{h}(|a_i - \rho_j| + |a_i - \rho_j - d| \\
&\quad + |a_i - \rho_j - dpq| + |a_i - \rho_j - d(pq + 1)|) \\
&\geq \sum_{j=1}^{h}(|\rho_j + d - \rho_j| + |\rho_j + d - \rho_j - d| \\
&\quad + |\rho_j + d - \rho_j - dpq| + |\rho_j + d - \rho_j - d(pq + 1)|) \\
&= 2hdpq
\end{aligned}$$

Also erhält man:

$$\begin{aligned}
\sum_k |w_{ik}|d_{ik} - \frac{n-1}{n+1}|\sum_{j\neq i}(n_j + 1)(a_j - a_i)| &\geq \sum_{j\neq i}(n_j + 1)|a_j - a_i| + dp + dq \\
&\quad - d(pq + 1) - \frac{4h-2}{4h}\sum_{j\neq i}(n_j + 1)|a_j - a_i| \\
&\geq dpq - d(p - 1)(q - 1) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Also ist die Ungleichung aus Theorem 4.11 erfüllt. □

Die Bedingungen, die in Korollar 4.13 an die S^1-Operation gestellt werden, sind bei den in Abschnitt 2.6 und Kapitel 3 diskutierten Operationen erfüllt. Also ergibt sich:

Korollar 4.14. *Es sei M ein $\mathbb{Z}$-Kohomologie komplex projektiver Raum der Dimension $2n$ und T ein Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$. Falls M eine effektive T-Operation zulässt, ist $p(M) = (1 + \xi_0^2)^{n+1}$.*

4.3 Chirurgie

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe einfach zusammenhängender Chirugie gezeigt, dass es im Homotopietyp einer geschlossenen Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 5$ bis auf Diffeomorphie nur endlich viele weitere Mannigfaltigkeiten mit den gleichen Pontrjagin-Klassen gibt.

Es sei $(X, \partial X)$ eine einfach zusammenhängende, kompakte, m-dimensioale, orientierte Mannigfaltigkeit und $\xi \to X$ ein k-dimensionales orientiertes Vektorbündel ($k > m + 2$, $m \geq 5$).

Definition 4.15. Es sei $(M, \partial M)$ eine kompakte m-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. $(M, \partial M)$ kann so in (D^{m+k}, S^{m+k-1}) mit Normalenbündel ν_M eingebettet werden, dass $\nu_M|_{\partial M}$ das Normalenbündel von ∂M in S^{n+k-1} ist. Die Isomorphieklasse von ν_M ist unabhängig von der Wahl der Einbettung.

Ein *Kobordismus* einer Abbildung $f : (M, \partial M) \to (X, \partial X)$ besteht aus einer $m+1$-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit W mit $\partial W = M \cup U^m \cup M'^m$, $\partial U^m = \partial M \cup \partial M'$, $U \cong \partial M \times I$ und einer Fortsetzung $F : W \to X$ von f mit $F(x,t) = f(x)$ für $(x,t) \in \partial M \times I = U$.

Eine *normale Abbildung* $f : (M, \partial M) \to (X, \partial X)$ ist eine Abbildung vom Grad 1 zusammen mit einer orientierungserhaltenden Bündelabbildung $b : \nu_M \to \xi$ über f.

Ein *normaler Kobordismus* (W, F, B) von f ist ein Kobordismus (W, F) von f zusammen mit einer Fortsetzung $B : \omega \to \xi$ von b. Dabei ist ω das Normalenbündel von W in $D^{m+k} \times I$ und

$$\begin{aligned} &(M, \partial M) \subset (D^{m+k} \times 0, S^{m+k-1} \times 0) \qquad (M', \partial M') \subset (D^{m+k} \times 1, S^{m+k-1} \times 1) \\ &\qquad U \subset S^{m+k-1} \times I. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Chirugie-Theorie wird die Frage untersucht, ob eine normale Abbildung kobordant zu einer Homotopieäquivalenz ist. Das folgende Theorem beinhaltet die Antwort auf diese Frage.

Theorem 4.16 ([7, S.31])**.** *Es sei (f, b) eine normale Abbbildung, so dass $f|_{\partial M}$ einen Isomorphismus in der Homologie induziert. Dann gibt es eine Invariante*

$$\sigma(f,b) \in \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{falls } m \equiv 0 \bmod 4 \\ \mathbb{Z}_2 & \textit{falls } m \equiv 2 \bmod 4 \\ 0 & \textit{falls } m \equiv 1,3 \bmod 4 \end{cases},$$

die genau dann verschwindet, wenn (f, b) normal kobordant zu einer normalen Abbildung (f', b') ist, so dass $f' : M' \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Falls $m \equiv 0 \bmod 4$ ist, ist $\sigma(f, b) = \frac{1}{8}(\mathrm{sign} M - \mathrm{sign} X)$

Ab jetzt sei $\partial X = \emptyset$.

Theorem 4.17 ([7, S.38]). *Die normalen Kobordismenklassen entsprechen bijektiv den Elementen $\alpha \in \pi_{n+k}(T(\xi))$ mit*

$$h(\alpha) \cap U = [X] \in H_n(X),$$

wobei $h : \pi_{n+k}(T(\xi)) \to H_{n+k}(T(\xi))$ den Hurewicz-Homomorphismus, U die Thom-Klasse und $T(\xi)$ den Thom-Raum von ξ bezeichnen.

Beweis. Es sei $f : M \to X$ eine normale Abbildung. Dann induziert b eine Abbildung

$$T(b) : T(\nu_M) \to T(\xi)$$

Es sei $\eta : (D^{n+k}, S^{n+k-1}) \to (T(\nu_M), \infty)$ eine Abbildung, die in einer Tubenumgebung von M mit der Projektion $\nu_M \to T(\nu_M)$ übereinstimmt und alle Punkte außerhalb dieser Umgebung auf den Basispunkt von $T(\nu_M)$ abbildet. Dann ist durch $T(b) \circ \eta$ ein Element β von $\pi_{n+k}(T(\xi))$ gegeben und es gilt:

$$[X] = f_*[M] = f_*(\eta_*(\iota) \cap T(b)^*U) = T(b)_*\eta_*(\iota) \cap U = h(\beta) \cap U. \tag{4.1}$$

Dabei bezeichnet ι einen Erzeuger von $H_{n+k}(D^{n+k}, S^{n+k-1})$.

Es sei W ein normaler Kobordismus von f, so dass $\partial W = M \cup M'$ und $B|_{\nu_M} = b$, $B|_{\nu_{M'}} = b'$. Definiert man

$$\zeta : (D^{n+k} \times I, S^{n+k-1} \times I) \to (T(\omega), \infty) \qquad \eta' : (D^{n+k}, S^{n+k-1}) \to (T(\nu_{M'}), \infty)$$

analog zu η, so gilt $T(B) \circ \zeta|_{D^{n+k} \times 0} = T(b) \circ \eta$ und $T(B) \circ \zeta|_{D^{n+k} \times 1} = T(b) \circ \eta'$, d.h. $T(b) \circ \eta$ und $T(b) \circ \eta'$ sind homotop. Also hängt β nur von der normalen Kobordismenklasse von f ab.

Es sei nun $\alpha \in \pi_{n+k}(T(\xi))$, so dass $h(\alpha) \cap U = [X]$. Dann gibt es einen Repräsentanten $f : (D^{n+k}, S^{m+k-1}) \to (T(\xi), \infty)$ von α, der transversal zu $X \subset T(\xi)$ ist. Also ist $M = f^{-1}(X)$ eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und man erhält eine Bündelabbildung $b : \nu_M \to \xi$ über $g = f|_M$. Außerdem lässt sich M so orientieren, dass b orientierungserhaltend ist.

Da $T(\xi) - X$ kontrahierbar ist, sind f und $T(b) \circ \eta$ homotop und eine zu (4.1) analoge Rechnung zeigt, dass g eine normale Abbildung ist.

Ist $f' : (D^{n+k}, S^{n+k-1}) \to (T(\xi), \infty)$ ein weiterer Repräsentant von α, der transversal zu $X \subset T(\xi)$ ist. Dann gibt es eine zu $X \subset T(\xi)$ transversale Abbildung $H : (D^{n+k} \times I, S^{n+k-1} \times I) \to (T(\xi), \infty)$, so dass $H|_{D^{n+k} \times 0} = f$ und $H|_{D^{n+k} \times 1} = f'$. $W = H^{-1}(X)$ ist dann ein normaler Kobordismus von f und f'. □

In der obigen Situation ist $T(\xi)$ ein $(k-1)$-fach zusammenhängender CW-Komplex. Daher ist der Kern von h endlich [23, 205-209]. Also gibt es nur endlich viele normale Kobordismenklassen.

Definition 4.18. Zwei Faserbündel $E \to X$ und $E' \to X$ heißen *faserhomotopieäquivalent*, falls es fasererhaltende Abbildungen $f : E \to E'$ und $f' : E' \to E$ und fasererhaltende Homotopien $h : E \times I \to E$ und $h' : E' \times I \to E'$ gibt, so dass

$$h_0 = f' \circ f \qquad h_1 = f \circ f'$$
$$h'_0 = f \circ f' \qquad h'_1 = f' \circ f$$

Definition 4.19. Es seien $\eta_1, \eta_2 \to X$ zwei Vektorbündel. η_1 und η_2 heißen *stabil faserhomotopieäquivalent*, falls es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $S(\eta_1 \oplus \mathbb{R}^{n_1})$ und $S(\eta_2 \oplus \mathbb{R}^{n_2})$ faserhomotopieäquivalent sind. Dabei bezeichnet $\mathbb{R}^n$ das n-dimensionale triviale Vektorbündel über X und $S(\eta_1 \oplus \mathbb{R}^{n_1})$ das zu $\eta_1 \oplus R^{n_1}$ assoziierte Sphärenbündel.

Die stabile Faserhomotopieklasse von η_1 wird mit $J(\eta_1)$ bezeichnet. Die Menge der stabilen Faserhomotopieklassen von Vektorbündeln auf X wird mit $J(X)$ bezeichnet.

Durch die direkte Summe von Vektorbündeln über X erhält man eine Gruppenstruktur auf $J(X)$ und einen surjektiven Homomorphismus

$$J : \widetilde{KO}(X) \to J(X)$$

Es lässt sich zeigen, dass es genau dann ein $\alpha \in \pi_{n+k}(T(\xi))$ mit $h(\alpha) \cap U = [X]$ gibt, wenn ξ und ν_X stabil faserhomotopieäquivalent sind. Wegen $k > n+2$ ist dies genau dann der Fall, wenn $S(\xi)$ und $S(\nu_X)$ faserhomotopieäquivalent sind [7, S.24,S.28]. Daher gibt es genau dann eine normale Abbildung $f : M \to X$, wenn $J(\xi - \nu_X) = 0$ ist.

Theorem 4.20. *Es seien $f_i : M_i \to X$, $i = 0, 1$, normale Abbildungen. Ist m gerade und sind f_0, f_1 normal kobordante Homotopieäquivalenzen. Dann sind M_0 und M_1 diffeomorph.*

Beweis. Es sei (W, F, B) ein normaler Kobordismus zwischen (f_0, b_0) und (f_1, b_1). Dann wird durch

$$\tilde{F} : (W, \partial W) \to (X \times I, X \times \{0\} \cup X \times \{1\}) \quad x \mapsto (F(x), \rho(x)),$$

eine normale Abbildung definiert. Dabei ist $\rho : W \to I$ eine Funktion mit $\rho|_{M_i} = i$.

Da $m+1$ ungerade ist, ist $\tilde{F}$ nach Theorem 4.17 normal kobordant zu einer Homotopieäquivalenz $F' : (W', \partial W') \to (X \times I, X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$ mit $\partial W' = M_0 \cup M_1$ und $F'|_{M_i} = f_i$. Daher sind die vertikalen Abbildungen in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "f_i"] & W' \arrow[d, "F'"] \\ X \times \{i\} \arrow[r] & X \times I \end{tikzcd}$$

Homotopieäquivalenzen.

Also ist ι_i eine Homotopieäquivalenz und W' ein h-Kobordismus. Nach dem h-Kobordismentheorem [22] sind M_0 und M_1 diffeomorph. $\square$

Bemerkung. Ist m in der obigen Situation ungerade, so gibt es eine Homotopie-Sphäre Σ, die Rand einer parallelisierbaren Mannigfaltigkeit ist, so dass die zusammenhängende Summe von M_1 und Σ diffeomorph zu M_2 ist. Bis auf Diffeomorphie gibt es endlich viele solcher Σ [7, S.43-44].

Satz 4.21. *Es sei m gerade. Dann gibt es bis auf Diffeomorphie nur endlich viele zu X homotopieäquivalente geschlossene Mannigfaltigkeiten M mit $p(X) = h^* p(M)$, wobei h eine Homotopieäquivalenz $h : X \to M$ bezeichnet.*

Beweis. Durch eventuelles Ändern der Orientierung auf X, lässt sich erreichen, dass h orientierungserhaltend ist. Ist $\tilde{h}$ ein Homotopieinverses zu h und wählt man $\xi = h^*\nu_M$, so wird $\tilde{h}$ zu einer normalen Abbildung. Außerdem gilt für die rationalen Pontrjagin-Klassen von ξ und das Normalenbündel ν_X von X in $\mathbb{R}^{n+k}$

$$p(\xi)p(X) = h^*p(\nu_M)h^*p(M) = 1 = p(\nu_X)p(X)$$

Also ist $p(\xi) = p(\nu_X)$.

Da es zu einem gegebenen Vektorbündel ξ über X nur endlich viele normale Kobordismenklassen gibt, gibt es nach Theorem 4.20 bis auf Diffeomorphie nur endlich viele Mannigfaltigkeiten M, die eine normale Abbildung $f : M \to X$ zulassen, so dass f eine Homotopieäquivalenz ist. Es genügt also zu zeigen, dass es nur endlich viele k-dimensionale Vektorbündel ξ über X mit $p(\xi) = p(\nu_X)$ gibt.

Ist ξ ein solches Vektorbündel, so ist $\xi - \nu_X$ ein Element des Kerns von

$$\mathrm{ph} : \widetilde{KO}(X) \xrightarrow{c} \tilde{K}(X) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \tilde{H}^{2*}(X;\mathbb{Q}) ,$$

wobei c durch $\mu \mapsto \mu \otimes \mathbb{C}$ gegeben ist und ch den Chern-Charakter bezeichnet. Es sei $r : K(X) \to KO(X)$ der natürliche Homomorphismus.

Da $rc = 2$, ist der Kern von c in der Untergruppe der 2-Torsion von $\widetilde{KO}(X)$ enthalten.

Da X kompakt ist, sind $\widetilde{KO}(X)$ und $\tilde{K}(X)$ sind endlich erzeugte abelsche Gruppen. Außerdem induziert ch einen Isomorphismus $\tilde{K}(X) \otimes \mathbb{Q} \to \tilde{H}^{2*}(X;\mathbb{Q})$. Daher sind die Kerne von c und ch endlich. Also ist auch der Kern von ph endlich.

Wegen $k > m$, gibt es also bis auf Isomorphie nur endlich viele solcher ξ. □

Korollar 4.22. *Für alle $n \geq 3$ gibt es bis auf Diffeomorphie nur endlich viele Homotopie komplex projektive Räume der Dimension $2n$, die eine effektive differenzierbare Operation eines Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$ zulassen.*

4.4 Tangentiale Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt werden der Begriff der tangentialen Homotopieäquivalenz von Mannigfaltigkeiten diskutiert und die Korollare 1.3 und 1.4 bewiesen.

Definition 4.23. Es seien M_1, M_2, nicht notwendig kompakte, Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und $h : M_1 \to M_2$ eine Homotopieäquivalenz. Falls h^*TM_2 und TM_1 stabil isomorph sind wird h als *tangentiale Homotopieäquivalenz* bezeichnet.

Es seien M_1 und M_2 zwei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. Falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $M_1 \times \mathbb{R}^k$ und $M_2 \times \mathbb{R}^k$ diffeomorph sind, sind M_1 und M_2 tangential homotopieäquivalent. Im Folgenden wird untersucht, wann die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Es werden die folgenden Bezeichnungen verwendet. Zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen *eigentlich homotop*, falls es eine eigentliche Abbildung $F : X \times I \to Y$ gibt mit $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ wird als eigentliche Homotopieäquivalenz bezeichnet, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $f \circ g$ eigentlich homotop zu id_Y und $g \circ f$ eigentlich homotop zu id_X ist.

Theorem 4.24. *Es sei $f : M_1 \to M_2$ eine eigentliche tangentiale Homotopieäquivalenz von unberandeten Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 gleicher Dimension und $k > \dim M_1 + 2$.*
Dann gibt es einen Diffeomorphismus $F : M_1 \times \mathbb{R}^k \to M_2 \times \mathbb{R}^k$, so dass

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "F"] \arrow[d] & M_2 \times \mathbb{R}^k \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie kommutiert.

Der hier gegebene Beweis von Theorem 4.24 folgt der Argumentation von M.W.Hirsch [12] und J. Milnor [21] und benötigt einige Lemmata.

Lemma 4.25. *Es seien V und M Mannigfaltigkeiten mit $\dim V > 2 \dim M + 2$ und $f, g : M \to V - \partial V$ eigentliche Einbettungen mit trivialem Normalenbündeln. Falls f und g eigentlich homotop sind, gibt es einen Diffeomorphismus $h : V \to V$ mit:*

(i) $h \circ f = g$

(ii) $h = \mathrm{id}$ *in einer Umgebung von ∂V.*

Beweis. Falls $f(M) \cap g(M) = \emptyset$ ist, gibt es, wegen $\dim V > 2 \dim M \times I$, eine eigentliche Einbettung $F : M \times I \to V - \partial V$ mit $F|_{M\times\{0\}} = f$ und $F|_{M\times\{1\}} = g$. F lässt sich zu einer Einbettung $H : M \times [-3, 3] \to V$ fortsetzen. Es sei $i : M \times \{0\} \hookrightarrow M \times I$, dann gilt

$$\nu_f = f^*TV - TM = i^*(H^*TV - TM \times I + \mathbb{R}) = i^*\nu_H + \mathbb{R}$$

Da i eine Homotopieäquivalenz ist und das Normalenbündel ν_f von f trivial ist, ist auch das Normalenbündel ν_H von H trivial. Daher gibt es eine Einbettung $G : M \times [-3, 3] \times \mathbb{R}^k \to V$ mit $G(x, y, 0) = H(x, y)$ und $k = \dim V - \dim M \times [-3, 3]$.
Nun gibt es einen Diffeomorphismus von $M \times [-3, 3] \times \mathbb{R}^k$ mit

(i) $(x, 0, 0) \mapsto (x, 1, 0)$ für $x \in M$

(ii) $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ für $|y| > 2, \|z\| > 1$

Dieser Diffeomorphismus setzt sich zu einem Diffeomorphismus von V fort. Dieser leistet das Verlangte.
Falls $f(M) \cap g(M) \neq \emptyset$, gibt es eine eigentliche Einbettung $f_1 : M \to V$ mit

(i) f_1 und f sind eigentlich homotop

(ii) $f_1(M) \cap f(M) = \emptyset = g(M) \cap f_1(M)$.

Nach dem ersten Fall gibt es also Diffeomorphismen h_1, h_2 von V mit

$$h_1 \circ f = f_1 \qquad\qquad h_2 \circ f_1 = g$$

und $h_1 = h_2 = \mathrm{id}$ in einer Umgebung von $V - \partial V$. $h_2 \circ h_1$ leistet dann das Verlangte. □

Es sei $p : E \to M$ ein orthogonales Bündel mit Faser D^k. Für eine differenzierbare Abbildung $\lambda : M \to]0, 1[$ sei $\lambda E = \{x \in E; \|x\| \leq \lambda(p(x))\}$.

Lemma 4.26. *In der obigen Situation sei $f : \frac{1}{2}E \to \mathit{int}\ E$ eine Einbettung mit $f|_M = \mathrm{id}$. Dann lässt sich f zu einem Diffeomorphismus von E fortsetzen.*

Beweis. Es sei $\lambda : M \to]0, \frac{1}{2}[$ Da jeder Diffeomorphismus ∂E zu einem Diffeomorphismus von $I \times \partial E$ fortgesetzt werden kann, lässt sich $f|_{\lambda E}$ genau dann zu einem Diffeomorphismus von E fortsetzen, wenn $E - \mathrm{int}\ f(\lambda E)$ und $I \times \partial E$ diffeomorph sind.

Außerdem ist

$$E - \mathrm{int}\ f(\lambda E) = \left(E - \mathrm{int}\ f(\frac{1}{2}E)\right) \cup_{f|_{\partial \frac{1}{2}E}} \left(\frac{1}{2}E - \mathrm{int}\ \lambda E\right)$$

Da $\frac{1}{2}E - \mathrm{int}\ \lambda E$ diffeomorph zu $I \times \partial E$ ist, sind $E - \mathrm{int}\ f(\lambda E)$ und $E - \mathrm{int}\ f(\frac{1}{2}E)$ diffeomorph. Also lässt sich f genau dann zu einem Diffeomorphismus von E fortsetzen, wenn es ein $\lambda : M \to]0, \frac{1}{2}[$ gibt, so dass $f|_{\lambda E}$ zu einem Diffeomorphismus von E fortgesetzt werden kann.

Durch $\frac{1}{2}E \hookrightarrow E$ und $f : \frac{1}{2}E \to E$ sind zwei Tubenumgebungen von M in E gegeben. Also gibt es eine differenzierbare Funktion $\mu : M \to]0, \frac{1}{2}[$ und eine Diffeotopie $g : E \times I \to E$, so dass $g|_{\mu E \times \{1\}} = f|_{\mu E}$ [13, S.181]. □

Aus diesen beiden Lemmata ergibt sich

Lemma 4.27. *Es sei $f : M \times \frac{1}{2}D^k \to M \times D^k$ eine Einbettung, so dass $f|_{M \times \{0\}}$ und id_M eigentlich homotop sind und $k > \dim M + 2$. Dann lässt sich f zu einem Diffeomorphismus von $M \times D^k$ fortsetzen.*

Beweis von Theorem 4.24. Wegen $k > \dim M_1 + 2$ gibt es eine zu f homotope Einbettung $f_1 : M_1 \to M_2 \times D^k$. Da f eine tangentiale Homotopieäquivalenz ist, ist das Normalenbündel von f_1 trivial. f_1 lässt sich also zu einer Einbettung $\tilde{f} : M_1 \times D^k \to M_2 \times D^k$ fortsetzen.

Analog erhält man für ein Homotopieinverses $g : M_2 \to M_1$ von f eine Einbettung $\tilde{g} : M_2 \times D^k \to M_1 \times D^k$, so dass $\tilde{g}|_{M_2 \times \{0\}}$ und g eigentlich homotop sind.

Mit Lemma 4.27 erhält man nun zwei Folgen von Diffeomorphismen $h_i : M_1 \times 2^i D^k \to M_1 \times D^k$ und $\tilde{h}_i : M_2 \times 2^i D^k \to M_2 \times D^k$, so dass $h_0 = \mathrm{id}$, $\tilde{h}_0 = \mathrm{id}$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & M_2 \times 2^i D^k \arrow[rr] \arrow[d, "\tilde{h}_i"] & & M_2 \times 2^{i+1} D^k \arrow[rr] \arrow[d, "\tilde{h}_{i+1}"] & & M_2 \times 2^{i+2} D^k \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{h}_i+2"] & \cdots \\
M_1 \times D^k \arrow[r, "\tilde{f}"] & M_2 \times D^k \arrow[r, "\tilde{g}"] & M_1 \times D^k \arrow[r, "\tilde{f}"] & M_2 \times D^k \arrow[r, "\tilde{g}"] & M_1 \times D^k \arrow[r, "\tilde{f}"] & M_2 \times D^k \arrow[r] & \cdots \\
M_1 \times 2^i D^k \arrow[u, "h_i"] \arrow[rr] & & M_1 \times 2^{i+1} D^k \arrow[u, "h_{i+1}"] \arrow[rr] & & M_1 \times 2^{i+2} D^k \arrow[u, "h_i+2"] \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

für alle $i \geq 0$ kommutiert. Also ist der Limes V der mittleren Sequenz diffeomorph zu $M_1 \times \mathbb{R}^k$ und $M_2 \times \mathbb{R}^k$. Ein Diffeomorphismus von $M_1 \times \mathbb{R}^k$ und $M_2 \times \mathbb{R}^k$ ist durch $F = (\varinjlim \tilde{h}_i)^{-1} \circ \varinjlim h_i$ gegeben. Es ist nur noch zuzeigen, dass das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "F"] \arrow[d] & M_2 \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "="] \\
M_1 \arrow[r, "F|_{M_1 \times \{0\}}"] \arrow[d, "="'] & M_2 \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi"] \\
M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2
\end{tikzcd}$$

Da $M_1 \times \mathbb{R}^k \to M_1$ eine Homotopieäquivalenz ist, kommutiert das obere Quadrat bis auf Homotopie. Es muss also nur noch das untere Quadrat betrachte werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\pi \circ F|_{M_1 \times \{0\}} &= \pi \circ (\varinjlim \tilde{h}_i)^{-1} \circ \varinjlim h_i|_{M_1 \times \{0\}} \\
&= \pi \circ \varinjlim (\tilde{h}_i^{-1} \circ \tilde{f} \circ h_i)|_{M_1 \times \{0\}} \\
&= \pi \circ \tilde{h}_0^{-1} \circ \tilde{f} \circ h_0|_{M_1 \times \{0\}} = \pi \circ f_1
\end{aligned}$$

Da f_1 nach Konstruktion homotop zu f ist, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 4.28. *Es sei $X = \mathbb{C}P^n$, M ein Homotopie $\mathbb{C}P^n$ und $h : X \to M$ eine Homotopieäquivalenz mit $h^*p(M) = p(X)$. Dann ist h eine tangentiale Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Nach [28] gilt

$$KO(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\omega]/(\omega^{[n/2]+1}) & \text{falls } n \not\equiv 1 \mod 4 \\ \mathbb{Z}[\omega]/(2\omega^{[n/2]+1}, \omega^{[n/2]+2}) & \text{falls } n \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

Dabei ist $\omega = r(\gamma - 1)$, wobei γ das Hopfbündel bezeichnet.

Im ersten Fall ist $\ker \mathrm{ph} = 0$ also gilt $h^*\nu_M = \nu_X$. Also ist $h^*TM - TX = 0$, d.h. h^*TM und TX sind stabil isomorph.

Im zweiten Fall sei $\tilde{h}$ ein Homotopieinverses zu h. Setzt man $\xi = h^*\nu_M$ und ändert gegebenenfalls die Orientierung auf X, so wird $\tilde{h}$ zu einer normalen Abbildung. Also ist $J(TX - h^*TM) = J(h^*\nu_M - \nu_X) = 0$.

Nach Voraussetzung ist außerdem $TX - h^*TM \in \ker \mathrm{ph} = \{0, \omega^{[n/2]+1}\} \cong \mathbb{Z}_2$. Mit dem folgenden Lemma folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 4.29 ([1]). *In der obigen Situation sei $n = 4w + 1$. Dann ist $J(\omega^{2w+1}) \neq 0$.*

Beweis. Entscheidet für die folgende Argumentation ist, dass $J : \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^u) \to J(\mathbb{R}P^u)$ ein Isomorphismus ist [16, S.225].

Es sei $f : \mathbb{R}P^{8w+2} \hookrightarrow \mathbb{R}P^{8w+3} \to \mathbb{C}P^{4w+1}$ die gewöhnliche Projektion. Dann ist $f(\mathbb{R}P^{8w+1}) \subset \mathbb{C}P^{4w}$ und man erhält das folgende komutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{4w+1}/\mathbb{C}P^{4w}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"] & \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{4w+1}) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{4w}) \arrow[d, "f^*"] \\
\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{8w+2}/\mathbb{R}P^{8w+1}) \arrow[r, "j^*"] & \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{8w+2}) \arrow[r] & \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{8w+1})
\end{tikzcd}$$

Da f den Grad 1 hat, induziert es einen Isomorphismus

$$\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{4w+1}/\mathbb{C}P^{4w}) \cong \widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{8w+2}/\mathbb{R}P^{8w+1}) \cong \widetilde{KO}(S^{8w+2}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Es sei η ein Erzeuger von $\widetilde{KO}(\mathbb{C}P^{4w+1}/\mathbb{C}P^{4w})$.

Da die obere Zeile des Diagramms exakt ist, ist $j^*(\eta) = \omega^{2w+1}$. Da $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{8w+1})$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $2 * 16^w$ und $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^{8w+2})$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $4 * 16^w$ ist, erhält man

$$f^*\omega^{2w+1} = f^*j^*\eta = j^*f^*\eta \neq 0.$$

Daher ist $f^*J(\omega^{2w+1}) = J(f^*\omega^{2w+1}) \neq 0$ und es folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 4.30. *Es sei M ein Homotopie $\mathbb{C}P^n$, der eine effektive differenzierbare Operation eines Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$ zuläßt. Dann ist M tangential homotopieäquivalent zu $\mathbb{C}P^n$.*

Korollar 4.31. *Es sei X ein Homotopie komplex projektiver Raum der Dimension $2n$ der eine effektive differenzierbare Operation eines Torus vom Rang $r \geq \frac{n}{4}$ zulässt und $k > 2n+2$. Dann sind $X \times \mathbb{R}^k$ und $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{R}^k$ diffeomorph.*

Die folgende äquivariante Version von Theorem 4.24 wurde von S. Kwasik [18] bewiesen.

Theorem 4.32. *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und M_1, M_2 geschlossene zusammenhängende G-Mannigfaltigkeiten. Außerdem sei $f : M_1 \to M_2$ eine äquivariante tangentiale Homotopieäquivalenz, d.h. f ist eine G-Homotopieäquivalenz und es gibt eine G-Darstellung V, so dass $F^*TM_2 \oplus V \cong TM_1 \oplus V$. Dann gibt es eine G-Darstellung $\tilde{V}$ und einen äquivarianten Diffeomorphismus $F : M_1 \times \tilde{V} \to M_2 \times \tilde{V}$, so dass das Diagramm aus Theorem 4.24 bis auf G-Homotopie kommutiert.*

Literaturverzeichnis

1 Adams, J.F. ; Walker, G.: On complex Stiefel manifolds. In: *Proc. Camb. Philos. Soc.* 61 (1965), S. 81–103

2 Atiyah, M.F.: *K-Theory.* W.A. Benjamin, Inc., 1967

3 Atiyah, M.F. ; Segal, G.B.: The Index of Elliptic Operators: II. In: *Ann. Math., 2nd Ser.* 87 (1968), Nr. 3, S. 531–545

4 Atiyah, M.F. ; Singer, I.M.: The Index of Elliptic Operators: I. In: *Ann. Math., 2nd Ser.* 87 (1968), Nr. 3, S. 484–530

5 Atiyah, M.F. ; Singer, I.M.: The Index of Elliptic Operators: III. In: *Ann. Math., 2nd Ser.* 87 (1968), Nr. 3, S. 546–604

6 Bredon, G.E.: *Introduction to Compact Transformation Groups.* Academic Press, 1972 (Pure and Applied Mathematics; Vol. 46)

7 Browder, W.: *Surgery on Simply-Connected Manifolds.* Springer-Verlag, 1972 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; Band 65)

8 Dejter, I.J.: Smooth S^1-manifolds in the homotopy type of $\mathbb{C}P^3$. In: *Michigan Math. J.* 23 (1976), S. 83–95

9 Dessai, A. ; Wilking, B.: Torus actions on homotopy complex projective spaces. In: *Math. Z.* 247 (2004), S. 505–511

10 Hattori, A.: Spin^c-Structures and S^1-Actions. In: *Inventiones math.* 48 (1978), S. 7–31

11 Hattori, A. ; Yoshida, T.: Lifting compact group actions in fiber bundles. In: *Japan. J. Math.* 2 (1976), Nr. 1, S. 13–25

12 Hirsch, M.W.: On tagential equivalence of manifolds. In: *Ann. Math., 2nd Ser.* 83 (1966), S. 211–217

13 Hirsch, M.W.: *Differential Topology.* Springer-Verlag, 1976 (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 33)

14 Hsiang, W.C.: A Note on Free Differentiable Actions of S^1 and S^3 on Homotopy Spheres. In: *Ann. Math., 2nd Ser.* 83 (1966), Nr. 2, S. 266–272

15 Hsiang, W.Y.: *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups.* Springer-Verlag, 1975 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; Band 85)

16 Husemoller, D.: *Fibre Bundles.* Second Edition. Springer-Verlag, 1975 (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 20)

17 JAMES, D.M.: Smooth S^1 actions on homotop $\mathbb{C}P^{4}$'*s*. In: *Mich. Math. J.* 32 (1985), S. 259–266

18 KWASIK, S.: Tangential Equivalence of Group Actions. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 283 (1984), Nr. 2, S. 563–573

19 LAWSON, H.B. ; MICHELSOHN, M.-L.: *Spin Geometry.* Princeton University Press, 1989 (Princeton mathematical series; Vol.38)

20 MASUDA, M.: On smooth S^1-actions on cohomology complex projective spaces. The case whre the fixed point set consists of four connected components. In: *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 28 (1981), S. 127–167

21 MILNOR, J.: Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. In: *Ann. Math., 2nd Ser.* 74 (1961), S. 575–590

22 MILNOR, J.: *Lectures on the h-cobordism theorem.* Princeton University Press, 1965

23 MILNOR, J. ; STASHEFF, J.: *Characeristic Classes.* Princeton University Press, 1974 (Annals of Mathematics Studies; Vol. 76)

24 MONTGOMERY, D. ; YANG, C.T.: Differentiable actions on homotopy seven spheres. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 122 (1966), S. 480–498

25 PETRIE, T.: Smooth S^1 actions on homotopy complex projecive spaces and related topics. In: *Bull. Math. Soc.* 78 (1972), Nr. 2, S. 105–153

26 PETRIE, T.: Torus Actions on Homotopy Complex Projective Spaces. In: *Inventiones math.* 20 (1973), S. 139–146

27 PETRIE, T.: A setting for smooth S^1 actions with applications to real algebraic actions on $P(\mathbb{C}^{4n})$. In: *Topology* 13 (1974), S. 363–374

28 SANDERSON, B.J.: Immersions and embeddings of projective spaces. In: *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser* 14 (1964), S. 137–153

29 SU, J.C.: Integral weight system of S^1 actions on cohomology complex projective spaces. In: *Chinese J. Math.* 2 (1974), S. 77–112

30 TSUKADA, E. ; WASHIYAMA, R.: S^1-actions on cohomology comples projective spaces with three components of the fixed point sets. In: *Hiroshima Math. J.* 9 (1979), S. 41–46

31 WALL, C.T.C.: Classification Problems in Differential Topology. V. In: *Invent. math.* 1 (1966), S. 355–374