Preprintreihe

SFB 478 – Geometrische Strukturen in der Mathematik

Heft 154

Eine triangulierte Kategorie äquivarianter Motive

C. Serpé

ISSN 1435-1188

Preprintreihe

des SFB 478 – Geometrische Strukturen in der Mathematik

des Mathematischen Instituts
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Heft 154

Eine triangulierte Kategorie äquivarianter Motive

C. Serpé

Februar 2001

ISSN 1435-1188

Diese Arbeit ist im Sonderforschungsbereich 478, Geometrische Strukturen in der Mathematik, Münster, entstanden und wurde auf seine Veranlassung unter Verwendung der ihm von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellten Mittel gedruckt.

Einleitung

Friedlander, Suslin und Voevodsky haben mit [VSF00] wichtige Beiträge zur Theorie der Motive geleistet. Ein Hauptergebnis befindet sich in dem Aufsatz [Voe00] aus [VSF00]. Dort wird eine triangulierte Tensor-Kategorie gemischter Motive $DM(k)$ zusammen mit kovarianten Funktoren

$$M : Sch/k \longrightarrow DM(k)$$

und

$$M^c : Sch/k^{prop} \longrightarrow DM(k)$$

konstruiert. Für ein $X \in Sch/k$ ist dann $M(X)$ das Motiv von X und $M^c(X)$ das Motiv mit kompaktem Träger von X. Es werden viele gute Eigenschaften dieser Funktoren wie z. B. Künneth-Formel oder Mayer-Vietoris Sequenz gezeigt. Die triangulierte Kategorie $DM(k)$ erlaubt es, verschiedene Kohomologie- und Homologietheorien in einer kohärenten Form direkt in Termen von Hom-Gruppen in $DM(k)$ zu schreiben, und wesentliche Eigenschaften folgen dann sofort aus den entsprechenden Eigenschaften des Funktors M. Diese Kohomologie- und Homologietheorien stehen in engem Zusammenhang zu anderen Konstruktionen. Die motivische Borel-Moore Homologie ist in $DM(k)$ für ein $X \in Sch/k$ zum Beispiel durch

$$H_j^{BM}(X, \mathbb{Z}(i)) := \mathrm{Hom}_{DM(k)}(\mathbb{Z}(i)[j], M^c(X))$$

definiert. Dabei ist $\mathbb{Z}(i)$ die i-te Tensorpotenz des Tate-Objektes $\mathbb{Z}(1)$. In [VSF00] wird gezeigt, dass sich diese motivische Borel-Moore Homologie mit den höheren Chowgruppen von Bloch identifiziert. Außerdem wurde in [Hub98] gezeigt, dass es einen triangulierten Realisierungsfunktor

$$DM(k) \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{MR}_k}$$

in die triangulierte Kategorie der gemischten Realisierungen von Huber aus [Hub95] gibt.

Weiter zeigt sich, dass die in Termen von $DM(k)$ definierte motivische Kohomologietheorie viele der von Beilinson geforderten Eigenschaften erfüllt. So wird z. B. in einer weiteren Arbeit von Friedlander und Suslin [FS00] die Existenz einer Spektralsequenz gezeigt, deren E^2-Term obige motivische Kohomologie ist und die gegen Quillens K-Theorie konvergiert. Es sei noch darauf hingewiesen, dass es von Levine [Lev98] und Hanamura [Han95] zwei unabhängige Konstruktionen einer triangulierten Kategorie gemischter Motive gibt. Levine zeigt in [Lev98], dass seine Konstruktion für einen perfekten Grundkörper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, mit der aus [Voe00] übereinstimmt.

Erste Ansätze, die Theorie der Motive bzw. der motivischen Kohomologie äquivariant zu machen, finden sich in der Arbeit [EG98] von Edidin und Graham. Dort werden äquivariante Chowgruppen und äquivariante höhere Chowgruppen eingeführt und grundlegende Eigenschaften bewiesen. Vorbild dafür ist die Borelkonstruktion aus der Topologie. Mit diesen äquivarianten Chowgruppen konstruiert Laterveer in [Lat98] äquivariante Chowmotive. Außerdem beweisen Edidin und Graham in ihrer Arbeit [EG00] einen Komplettierungssatz, der einen Zusammenhang zwischen den von ihnen definierten äquivarianten Chowgruppen und äquivarianter K-Theorie herstellt.

In der vorliegenden Arbeit wird für eine diskrete Gruppe G eine äquivariante Version von Voevodskys triangulierter Kategorie von Motiven ${}^{G}DM(k)$ zusammen mit kovarianten Funktoren

$$^{\mathrm{G}}\mathrm{M} : {}^{G}Sch/k \longrightarrow {}^{G}DM(k)$$

und

$$^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{c} : {}^{G}Sch/k^{prop} \longrightarrow {}^{G}DM(k)$$

konstruiert. Es bereitet keine Schwierigkeiten, eine triangulierte Kategorie ${}^{G}DM(k)$ analog zur garbentheoretischen Version von $DM(k)$ aus [Voe00] zu definieren. Wie sich zeigen wird, entspricht dabei unser Vorgehen auch der Borelkonstruktion aus der Topologie. Viele Eigenschaften von $DM(k)$ lassen sich auf ${}^{G}DM(k)$ übertragen, weil man die Hom-Gruppen in ${}^{G}DM(k)$ über abgeleitete Funktoren interpretieren kann. Dies ist zunächst nicht klar, weil die Objekte von ${}^{G}DM(k)$ nach unten unbeschränkte kohomologische Komplexe sind. Im nicht-äquivarianten Fall ist dies unproblematisch, weil bestimmte auftretende Objekte endliche kohomologische Dimension haben. Dies ist aber in der äquivarianten Situation nicht der Fall. Um aber dennoch die auftretenden Hom-Gruppen über abgeleitete Funktoren berechnen zu können, werden im ersten Kapitel dieser Arbeit Ergebnisse aus der homologischen Algebra so verallgemeinert, dass man sie auf unsere Situation anwenden kann. Damit lassen sich dann die meisten Resultate aus [Voe00] relativ leicht auf die äquivariante Situation übertragen. Dabei reicht es meist aus zu fordern, dass der Grundkörper k Auflösung von Singularitäten zulässt, und man braucht nicht eine äquivariante Auflösung von Singularitäten. Weiter ergeben sich enge Zusammenhänge zu den oben erwähnten äquivarianten Theorien. Zumindest rational stimmen die äquivarianten höheren Chowgruppen aus [EG98] auch hier mit der Borel-Moore-Homologie überein und die Kategorie der äquivarianten Chowmotive aus [Lat98] ist als volle Unterkategorie in ${}^{G}DM(k)$ enthalten. Weiter ergibt sich in geeigneter Situation ein Vergleich mit der Borelkohomologie aus der Topologie. Es sei schließlich noch bemerkt, dass es nicht zu erwarten ist, mit der in ${}^{G}DM(k)$ definierten motivischen Kohomologie ein äquivariantes Analogon zu der oben beschriebenen Spektralsequenz zu bekommen. Zum einen deuten die oben beschriebenen Ergebnisse aus [EG00] darauf hin und zum anderen zeigen die Resultate der Topologie, die an vielen Stellen Vorbild für die Theorie ist, dass es dafür nötig wäre, eine äquivariante Version nach dem Vorbild der Bredonkohomologie zu konstruieren.

Wir wollen nun kurz eine Inhaltsübersicht der einzelnen Kapitel geben.

Im ersten Kapitel werden Ergebnisse der homologischen Algebra so verallgemeinert, dass ein Umgang mit nach unten unbeschränkten Komplexen keine Schwierigkeiten mehr bereitet. Im zweiten Kapitel geht es um äquivariante Geometrie. Es wird versucht, möglichst konzeptionell zu erklären, was G-Garben und äquivariante Kohomologie ist. Wichtig ist außerdem eine äquivariante Version des Satz 90 von Hilbert, da dieser es später erlaubt, das Motiv des projektiven Bündels zu zerlegen. Im dritten Kapitel folgt dann die eigentliche Konstruktion von ${}^{G}DM(k)$. Mit den bis dahin bereitgestellten Mitteln ist es relativ leicht, die wichtigsten Eigenschaften auf den äquivarianten Fall zu übertragen. Im vierten und letzten Kapitel folgt schließlich der oben beschriebene Vergleich mit anderen äquivarianten Theorien.

An dieser Stelle möchte ich noch den Personen, die mich beim Schreiben dieser Arbeit unterstützt haben, meinen Dank aussprechen. An erster Stelle danke ich Prof. Dr. Christopher Deninger für die Betreuung dieser Arbeit. Zum einem entsprach die Wahl des Themas voll meinen Interessen und Vorlieben und zum anderem war er stets zu Diskussionen bereit, die mir insbesondere in schwierigen Momenten immer weitergeholfen haben. PD Dr. Annette Huber-Klawitter danke ich für ihre Hilfsbereitschaft in allen Fragen aus der motivischen Welt. PD Dr. Bernhard Köck danke ich für hilfreiche Beratung und nützliche Hinweise aus dem Bereich der äquivarianten Geometrie. Bei Dr. Elmar Grosse-Klönne bedanke ich mich für den für die Entstehung dieser Arbeit sehr wichtigen Hinweis auf die Arbeit von Spaltenstein. Der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Wolfgang Lück danke ich für die vielen hilfreichen Erklärungen aus dem Bereich der Topologie. Insbesondere sind hier Dr. Michael Joachim und Dr. Holger Reich zu nennen. Meinen Kollegen Francesc Bars, Wolfgang Büchner, Dr. Stephan Feil, Henning Frommer, Stefan Gille, Niko Naumann, Gottfried Standfest und Dr. Thomas Wenger danke ich für viele mathematische Disskussionen und das Korrekturlesen dieser Arbeit. Meiner Freundin Anette Rohmann danke ich ganz besonders für ihre Unterstützung vor allem in den letzten Wochen der Fertigstellung dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Auflösung von unbeschränkten Komplexen

In diesem Kapitel wollen wir die für diese Arbeit notwendigen Hilfsmittel aus der homologischen Algebra beweisen. Dabei sind die Ergebnisse über die Auflösung von unbeschränkten Komplexen neu. Unabhängig davon und mit anderen Methoden wurde aber in der kürzlich erschienen Arbeit [ATJLSS00] von Alonso Tarrío, Jeremías López und Souto Salorio das gleiche Resultat bewiesen.

In der Konstruktion der triangulierten Kategorie von gemischten Motiven in [Voe00] treten auf Grund der verwendeten simplizialen Methoden nach unten unbeschränkte kohomologische Komplexe auf. Im nicht-äquivarianten Fall bereitet dies keine technischen Probleme, da dort die beteiligten Objekte endliche kohomologische Dimension haben und man daher alles auf nach unten beschränkte Komplexe zurückführen kann. Da diese Endlichkeit der kohomologischen Dimension im äquivarianten Fall nicht gegeben ist, werden in diesem Kapitel die Methoden aus [Spa88] von Spaltenstein so verallgemeinert, dass sie in unserer Situation angewendet werden können und wir so in der Lage sind, mit nach unten unbeschränkten Komplexen geeignet umzugehen.

Im ersten Abschnitt geben wir eine allgemeine Einführung in die Problemstellung. Nachdem im zweiten Abschnitt an allgemeine Hilfsmittel aus der Kategorientheorie und der Theorie der Ordinalzahlen erinnert wurde, folgt im dritten Abschnitt der Beweis des Hauptresultates dieses Kapitels über die Existenz von K-injektiven Auflösungen in geeigneten Kategorien. Im vierten Abschnitt werden schließlich Folgerungen aus dem Hauptresultat gezogen, die standardmäßig folgen und die im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder gebraucht werden.

1.1 Einführung

Möchte man Garbenkohomologie bzw. Garbenhyperkohomologie oder auch Gruppenkohomologie definieren, so trifft man auf das folgende, hier ein wenig allgemeiner dargestellte Problem. Gegeben sei eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und eine triangulierte Unterkategorie $\mathcal{J}$ der Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, eine triangulierte Kategorie $\mathcal{E}$ und ein Funktor von triangulierten Kategorien $F : \mathcal{J} \to \mathcal{E}$. Dann ist man daran interessiert, die Existenz der Rechtsableitung

$$RF : \mathcal{D}_{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{E}$$

zu zeigen. Dabei bezeichnet $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ die zu $\mathcal{J}$ assozierte derivierte Kategorie.

Es wird eigentlich immer nach dem folgenden Prinzip vorgegangen. Man sucht eine triangulierte Unterkategorie $\mathcal{J}'$ von $\mathcal{J}$, so dass

(i) es zu jedem Objekt $X \in \mathcal{J}$ ein Objekt $A_X \in \mathcal{J}'$ und einen Quasiisomorphismus $\varphi_X : X \to A_X$ gibt, und

(ii) die Verknüpfung der Inklusion $\mathcal{J}' \to^i \mathcal{J}$ mit F Quasiisomorphismen in $\mathcal{J}'$ in Isomorphismen in $\mathcal{E}$ überführt.

Dann existiert nämlich wegen (ii) nach der universellen Eigenschaft von $\mathcal{D}_{\mathcal{J}'}$ die Rechtsableitung von $F \circ i$ und es läßt sich mit Hilfe von (i) zeigen, dass durch $X \mapsto R(F \circ i)(A_X)$ ein Funktor $\mathcal{D}_{\mathcal{J}} \to \mathcal{E}$ definiert wird, der die Rechtsableitung von F ist.

Wir wollen dies an einem bekannten Beispiel kurz veranschaulichen.

Beispiel 1.1.1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten, und sei $\mathcal{J} = \mathcal{K}^+(\mathcal{A})$. Dann wählt man $\mathcal{J}'$ als die volle Unterkategorie von $\mathcal{J}$, die als Objekte Komplexe $K^\bullet$ hat, deren einzelne Einträge K^i injektive Objekte in $\mathcal{A}$ sind. Dann überlegt man sich, dass es zu jedem nach unten beschränkten Komplex eine Rechtsauflösung in $\mathcal{J}'$ gibt und hat somit Punkt (i) gezeigt. Weiter zeigt man, dass ein Quasiisomorphismus zwischen zwei Objekten in $\mathcal{J}'$ bereits eine Homotopieäquivalenz ist, was insbesondere bedeutet, dass $\mathcal{J}' = \mathcal{D}_{\mathcal{J}'}$ ist, woraus (ii) für jeden additiven Funktor folgt.

Möchte man auch nach unten unbeschränkte Komplexe mit einschließen bzw. $\mathcal{J} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ wählen, so muss man, wie das folgende Beispiel zeigt, $\mathcal{J}'$ anders wählen.

Beispiel 1.1.2. Dazu betrachten wir die Kategorie $(\mathbb{Z}/4 - Mod)$ der $\mathbb{Z}/4$-Moduln und den Komplex

$$A^\bullet := \cdots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\cdot 2} \cdots$$

sowie den Funktor

$$\_ \otimes \mathbb{Z}/2 : \mathcal{K}(\mathbb{Z}/4 - Mod) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Z} - Mod).$$

Nun ist der Komplex $A^\bullet$ quasiisomorph zum 0-Komplex, aber dies gilt nicht für den Komplex

$$A^\bullet \otimes \mathbb{Z}/2 = \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \cdots .$$

Wir wollen nun erläutern, wie man vorgehen kann, wenn $\mathcal{J} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ sein soll. Dazu zunächst die folgende

Definition 1.1.3. Ein Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ heißt *K-injektiv*, falls für jeden Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Gleichheit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)$ gilt.

Sei nun $\mathcal{J}'$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, die als Objekte gerade die K-injektiven Komplexe hat. Es ist sofort klar, dass die Bedingung (ii) erfüllt ist. Es wurden verschiedene Bedingungen gefunden, unter denen (i) erfüllt ist. Spaltenstein zeigt in seiner Arbeit [Spa88], dass (i) erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ die Kategorie der R-Moduln für einen Ring R ist oder wenn $\mathcal{A}$ die Kategorie der $\mathcal{O}$-Moduln auf einem topologischen Raum und $\mathcal{O}$ eine Garbe von Ringen ist. Außerdem bemerkt er, dass seine Methode auch auf die etale Topologie anwendbar ist. Böckstedt und Neeman zeigen in ihrer Arbeit [BN93], dass (i) erfüllt ist für eine abelsche Kategorie, die genügend viele injektive Objekte hat und in der AB 4*) gilt. Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass in einer abelschen Kategorie mit AB 5) und einem Generator die Bedingung (i) immer erfüllt ist. [1]

1.2 Allgemeine Hilfsmittel

Wir erinnern zunächst an zwei Begriffe aus der Theorie der abelschen Kategorien aus [Gro57].

Definition 1.2.1. Ein Objekt U aus einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ mit beliebigen direkten Summen heißt *Generator*, falls für jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ die kanonische Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus\limits_{\mathrm{Hom}(U,A)} U & \longrightarrow & A \\ u_f & \longmapsto & f(u) \end{array}$$

surjektiv ist.

Wohlbekannt ist die folgende

Proposition 1.2.2. *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit einem Generator und $A \in \mathcal{A}$, so ist die Klasse aller Unterobjekte von A eine Menge.*

Beweis: [Gro57, 1.9]

Definition 1.2.3. Eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ erfüllt *AB 5)*, wenn sie kovollständig und der filtrierte Colimes von exakten Sequenzen exakt ist.

[1] In dem kürzlich erschienenen Artikel [ATJLSS00] wurde dieses Resultat mit anderen Methoden bewiesen. Außerdem wird dort auch darauf hingewiesen, dass es dafür unveröffentlichte Beweise von Morel und Franke gibt.

Bemerkung 1.2.4. Eine von vielen äquivalenten Charakterisierungen der zweiten Bedingung ist die folgende:

Ist $A \to^u B$ ein Morphismus und $B_j \to B$ eine aufsteigende Familie von Unterobjekten, so gilt $u^{-1}(\mathrm{colim}_{j \in J} B_j) = \mathrm{colim}_{j \in J} u^{-1}(B_i)$.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ die Kategorie der Komplexe in $\mathcal{A}$.

Nun kommen wir zu verschiedenen Charakterisierungen der K-Injektivität.

Proposition 1.2.5. *Für jeden Komplex* $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $A^\bullet$ *ist K-injektiv.*

(ii) für jeden azyklischen Komplex $S^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ *ist der Komplex* $\mathrm{Hom}^\bullet(S^\bullet, A^\bullet)$ *exakt.*

(iii) der Funktor $\mathrm{Hom}^\bullet(\_, A^\bullet) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}(Ab)$ *erhält Quasiisomorphismen.*

Beweis: [Spa88, Prop.1.5]

Die Charakterisierung (ii) ist für unsere Zwecke besonders wichtig, da sie nur in Termen von $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ formuliert ist.

Definition 1.2.6. Wir sagen, dass es in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ *genügend viele K-injektive Komplexe* gibt, falls es zu jedem Komplex $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ eine Rechtsauflösung $A^\bullet \to I^\bullet$ gibt, so dass $I^\bullet$ ein K-injektiver Komplex ist.

Wir möchten diesen Abschnitt mit ein paar Bemerkungen aus der Theorie der Ordinal- und Kardinalzahlen beenden. Wir setzen die Theorie der Ordinal- und Kardinalzahlen im Umfang von [Jec97, Kapitel 1] voraus und wollen hier nur kurz folgendes wiederholen.

Definition 1.2.7. Eine Ordinalzahl $\alpha \in Ord$ heißt *regulär*, falls gilt: Ist $X \subseteq \alpha$ eine Teilmenge mit $|X| < \alpha$, so wird X durch ein $\alpha_0 < \alpha$ beschränkt.

Dass dieser Begriff in den Arbeiten [Gro57] und [Spa88] nicht explizit auftaucht, liegt an folgendem Korollar aus dem Lemma von Zorn:

Lemma 1.2.8. *Für jede Ordinalzahl* α *ist* $\aleph_{\alpha+1}$ *regulär.*

Beweis:
[Jec97, Korollar in 1.5]

Aus diesem Korollar folgt insbesondere die Existenz beliebig großer regulärer Ordinalzahlen.

1.3 Existenz von genügend vielen K-injektiven Komplexen

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit AB 5) und einem Generator U. Wir wollen nun zeigen, dass es in diesem Fall genügend viele K-injektive Komplexe gibt.

Wir beginnen mit zwei Lemmata, die genauso wie in [Spa88] bewiesen werden können.

Lemma 1.3.1. *Sei $(S^\bullet{}_j)_{j\in J}$ eine Familie von azyklischen Komplexen und $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ ein beliebiger Komplex. Dann existiert eine Rechtsauflösung $s : A^\bullet \to B^\bullet$, die in jedem Grad injektiv ist und so dass für jedes $j \in J$ und jeden Morphismus $w : S_j^\bullet \to A^\bullet$ der Morphismus $s \circ w$ homotop zur Nullabbildung ist.*

Beweis: Siehe [Spa88, 4.1].

Lemma 1.3.2. *Für jedes $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ existiert eine Rechtsauflösung $m : A^\bullet \to B^\bullet$, so dass m injektiv ist und für alle $i \in \mathbb{Z}$ das Bild $m(A^i)$ in einem injektiven Unterobjekt von B^i enthalten ist.*

Beweis: Siehe [Spa88, 4.2].

In [Spa88] wird die Kardinalität einer Garbe auf einem topologischen Raum als Kardinalität des assoziierten Überlagerungsraumes definiert. Wir ersetzen dies hier durch die folgende

Definition 1.3.3. Für ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ definieren wir seine *Kardinalität* durch

$$|A| := |\{A' \subseteq A\}|.$$

Bemerkung 1.3.4. Hierbei soll $A' \subseteq A$ bedeuten, dass A' ein Unterobjekt von A ist. Weil $\mathcal{A}$ einen Generator besitzt, ist $\{A' \subseteq A\}$ nach 1.2.2 auch wirklich eine Menge.

Lemma 1.3.5. *(i) Ist $A' \to A$ injektiv, so gilt $|A'| \leq |A|$*

(ii) Ist $A \to^v A''$ surjektiv, so gilt $|A''| \leq |A|$

Beweis:
(i) Klar.
(ii) Die Abbildung $\{B'' \subseteq A''\} \to \{B \subseteq A\}, B'' \longmapsto v^{-1}(B'')$ hat, da v surjektiv ist, den Schnitt $B \longmapsto v(B)$ und ist daher injektiv. □

Wichtig für das Folgende ist das

Lemma 1.3.6. *Sei $A \in \mathcal{A}$ und κ eine reguläre Ordinalzahl, die echt größer als $|A|$ ist, und sei $(B_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ ein induktives System in $\mathcal{A}$, in dem alle Abbildungen injektiv sind. Dann faktorisiert jeder Morphismus*

$$v : A \longrightarrow \operatorname*{colim}_{\lambda<\kappa} B_\lambda$$

bereits für ein $\lambda_0 < \kappa$ über die kanonische Abbildung $B_{\lambda_0} \to \mathrm{colim}_{\lambda<\kappa} B_\lambda$.

Beweis:
Da $\mathcal{A}$ die Eigenschaft AB 5) hat, ist dann für jedes $\lambda_0 < \kappa$ die kanonische Abbildung $B_{\lambda_0} \to \mathrm{colim}_{\lambda<\kappa} B_\lambda$ injektiv. Sei $A_\lambda := v^{-1}(B_\lambda)$. Dann gilt wegen 1.2.4 $\mathrm{colim}_{\lambda<\kappa} A_\lambda = A$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\lambda_0 < \kappa$ mit $A_{\lambda_0} = A$ gibt. Dazu definieren wir wie folgt eine Teilmenge E von κ:

$$E := \{\lambda \in \kappa | \lambda = 0 \vee A_\lambda \neq \operatorname*{colim}_{\lambda'<\lambda} A_{\lambda'}\}$$

Es gilt offenbar $A = \mathrm{colim}_{\lambda<\kappa} A_\lambda = \mathrm{colim}_{\lambda\in E} A_\lambda$. Außerdem wird durch $E \ni \lambda \mapsto A_\lambda$ eine injektive Abbildung $E \to \{A' \subseteq A\}$ definiert. Daher ist $|E| \leq |A| < \kappa$ und E ist durch ein $\lambda_0 < \kappa$ beschränkt, weil κ regulär ist. Daher folgt die Behauptung. □

Damit können wir nun das folgende Lemma beweisen.

Lemma 1.3.7. *Es sei wie in Lemma 1.3.1 $(S_j^\bullet)_{j\in J}$ eine Familie von azyklischen Komplexen in $\mathcal{A}$ und $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ ein beliebiger Komplex. Dann gibt es eine Rechtsauflösung $A^\bullet \to B^\bullet$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) für alle $j \in J$ ist $\mathrm{Hom}^\bullet(S_j^\bullet, B^\bullet)$ azyklisch,

(ii) für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist B^i ein injektives Objekt in $\mathcal{A}$.

Beweis:
Durch transfinite Induktion definieren wir für jede Ordinalzahl α ein induktives System von Komplexen $\{B_{\alpha'}\}_{\alpha'\leq\alpha}$:

- $B_0^\bullet := A$,
- ist α eine Limesordinalzahl, so definieren wir

$$B_\alpha^\bullet := \operatorname*{colim}_{\alpha'<\alpha} B_{\alpha'}^\bullet,$$

- ist α Nachfolger von $\alpha - 1$, so gehen wir wie folgt vor: Nach Lemma 1.3.1 und Lemma 1.3.2 können wir eine Rechtsauflösung $u_\alpha : B_{\alpha-1}^\bullet \to B_\alpha^\bullet$ mit den folgenden Eigenschaften wählen:
  (a) für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist, $u_\alpha^i : B_{\alpha-1}^i \to B_\alpha^i$ injektiv
  (b) für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $u_\alpha^i(B_{\alpha-1}^i)$ in einem injektiven Unterobjekt von B_α^i enthalten,
  (c) für jedes $j \in J$ und jeden Morphismus $w : S_j^\bullet \to B_{\alpha-1}^\bullet$ ist der Morphismus $u_\alpha \circ w$ homotop zur Nullabbildung.

Nun wählen wir eine reguläre Ordinalzahl κ mit

1) für alle $i \in \mathbb{Z}$ und $j \in J$ gilt $|S_j^i| < \kappa$,

2) für den Generator U von $\mathcal{A}$ gilt $|U| < \kappa$,

3) $|\mathbb{N}| \leq \kappa$.

Nun definieren wir $B^\bullet := B_\kappa$ und $A^\bullet = B_0^\bullet \to B_\kappa^\bullet$ als den kanonischen Morphismus in den Colimes.

Offensichtlich ist dies eine Rechtsauflösung.

Wegen (a) und weil $\mathcal{A}$ die Eigenschaft AB 5) hat, erfüllt das induktive System $(B_\lambda^i)_{\lambda<\kappa}$ für jedes $i \in \mathbb{Z}$ die Bedingungen von Lemma 1.3.6. Für jedes $j \in J$ faktorisiert daher jeder Morphismus $S_j^\bullet \to B^\bullet$ aufgrund von Lemma 1.3.6 und der Eigenschaften 1)-3) sowie der Regularität von κ über ein $B_\lambda^\bullet \to B_{\lambda+1}^\bullet \to B_\kappa^\bullet$ für ein $\lambda < \kappa$. Wegen (c) folgt dann Eigenschaft (i).

Um (ii) zu zeigen, reicht es aufgrund von [Gro57, I,Lemma 1], die Liftungseigenschaft für Unterobjekte von U zu zeigen. Sei daher V ein Unterobjekt von U und $V \to B^i$ für ein $i \in \mathbb{Z}$ ein Morphismus. Zu zeigen ist, dass sich dieser zu einem Morphismus nach U fortsetzen lässt. Da $|V| \leq |U| < \kappa$ ist, faktorisiert $V \to B^i$ wieder nach Lemma 1.3.6 für ein $\lambda < \kappa$ über $B_\lambda^i \to B_{\lambda+1}^i \to B_\kappa^i$. Aus (b) folgt nun, dass eine Fortsetzung existiert und somit ist das Lemma bewiesen. □

Das nächste Ziel ist zu zeigen, dass jeder Komplex einen Unterkomplex hat, der in einem gewissen Sinne beschränkt ist. Dazu benötigen wir zunächst einige weitere Eigenschaften unserer Kardinalitätsfunktion.

Lemma 1.3.8. *Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \mathrm{Hom}(U, A)$ mit*

(i) $|J| \leq |A|$,

(ii) $\bigoplus_J U \to A$ *ist surjektiv.*

Beweis:
Dazu versehen wir die Menge $\mathrm{Hom}(U, A)$ mit einer Wohlordnung. Es sei also $\mathrm{Hom}(U, A) = \{f_\nu | \nu \leq \kappa\}$ für eine Ordinalzahl κ. Dann definieren wir wie im Beweis von Lemma 1.3.6 eine Teilmenge

$$J := \{f_\nu \in \mathrm{Hom}(U, A) | \nu = 0 \vee \mathrm{Bild}(f_\nu) \nsubseteq \operatorname*{colim}_{\mu<\nu} \mathrm{Bild}(f_\mu)\}.$$

Offenbar ist der Morphismus

$$\bigoplus_J U \longrightarrow A$$

surjektiv und die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \{A' \subset A\} \\ \nu & \longmapsto & \mathrm{colim}_{\mu\leq\nu} \mathrm{Bild}(f_\mu) \end{array}$$

nach Konstruktion injektiv. Daher folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 1.3.9. *Zu einer vorgegebenen Kardinalität β bilden die Isomorphieklassen von Objekten $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ mit der Eigenschaft, dass $|A^i| \leq \beta$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt, eine Menge.*

Beweis:
Jedes Objekt $B \in \mathcal{A}$ mit $|B| \leq \beta$ ist nach Lemma 1.3.8 ein Quotient von $\oplus_\beta U$. Und da $\mathcal{A}$ einen Generator hat, bilden die Unterobjekte von diesem eine Menge. $\square$

Wir definieren nun eine Folge von Kardinalzahlen:

$$\begin{array}{rrcc} & a_0 & = & |\mathbb{N}| \\ \text{für } n \geq 1: & a_{2n-1} & := & |\operatorname{Hom}(U, \oplus_{a_{2n-2}} U)| \\ & a_{2n} & := & |\bigoplus_{a_{2n}} U| \end{array}$$

Wir kommen nun zu dem entscheidenen Hilfsmittel.

Proposition 1.3.10. *Seien $A, A'' \in \mathcal{A}$, $A \to A''$ eine surjektive Abbildung, und für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $|A''| \leq a_{2n}$. Dann gibt es ein Unterobjekt $A_0 \subseteq A$ mit*

(i) $A_0 \to A \to A''$ *ist surjektiv und*

(ii) $|A_0| \leq a_{2n+2}$.

Beweis:
Nach Lemma 1.3.8 gibt es einen surjektiven Morphismus $\oplus_{a_{2n}} U \to A''$. Weiter gibt es nach Wahl von a_{2n+1} einen Morphismus $\oplus_{a_{2n+1}} U \to A \times_{A''} \oplus_{a_{2n}} U$, so dass die Verkettung $\oplus_{a_{2n+1}} U \to A \times_{A''} \oplus_{a_{2n}} U \to \oplus_{a_{2n}} U$ surjektiv ist. Wir definieren nun $A_0 \subset A$ als $\operatorname{Bild}(\oplus_{a_{2n+1}} U \to A)$. Offenbar bleibt $A_0 \to A''$ surjektiv und mit Lemma 1.3.5 (ii) gilt $|A_0| \leq |\oplus_{a_{2n+1}} U| = a_{2n+2}$. $\square$

Wir wählen nun eine Kardinalzahl β, die größer ist als jedes Element der Folge

$$\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

und können jetzt den wichtigen folgenden Satz beweisen.

Satz 1.3.11. *Jeder azyklische Komplex $0 \neq S^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ hat einen azyklischen Unterkomplex $S_0^\bullet \neq 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ dann $|S_0^i| \leq \beta$ gilt.*

Beweis:
Sei $S^{i_0} \neq 0$ für ein $i_0 \in \mathbb{Z}$. Man wähle einen von Null verschiedenen Morphismus $U \to S^{i_0}$. Dieser existiert, da U ein Generator ist. Wir definieren den Unterkomplex $S_0^\bullet \subseteq S^\bullet$ nun wie folgt:

- $S_0^{i_0} := \mathrm{Bild}(U \to S^{i_0})$
- $S_0^{i_0+1} := \mathrm{Bild}(U \to S^{i_0} \xrightarrow{d} S^{i_0+1})$
- $S_0^i = 0$ für $i > i_0 + 1$
- für $i < i_0$ definieren wir S_0^i induktiv: ist S_0^{i+1} definiert, so können wir nach Proposition 1.3.10 ein Unterobjekt S_0^i von $d^{-1}(\mathrm{Kern}(S_0^{i+1} \to S_0^{i+2}))$ finden, so dass $S_0^i \to \mathrm{Kern}(S_0^{i+1} \to S_0^{i+2})$ surjektiv bleibt und induktiv

$$|S_0^i| \leq a_{2(i_0-i)}$$

gilt. Dieser Unterkomplex erfüllt dann die gewünschten Bedingungen.

□

Wir benötigen noch ein letzten Lemma bevor wir das Hauptergebnis beweisen können.

Lemma 1.3.12. *Es sei I eine wohlgeordnete Menge. Wir betrachten die Kategorie der projektiven Systeme $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit surjektiven Übergangsabbildungen in der Kategorie der abelschen Gruppen. Auf dieser Kategorie ist der Funktor $\lim_I$ exakt.*

Beweis:
Dies beweist man wie den klassischen Satz von Mittag-Leffler. Der entscheidene Punkt ist, dass der projektive Limes eines Systems $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ von nichtleeren Mengen mit surjektiven Übergangsabbildungen nicht leer ist. Dies sieht man leicht mit transfiniter Induktion. □

Mit diesen Vorbereitungen kann man jetzt den folgenden Satz zeigen.

Satz 1.3.13. *Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit AB 5) und einem Generator, so gibt es genügend viele K-injektive Komplexe in* $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$.

Beweis:
Wir wählen mit Hilfe von Korollar 1.3.9 eine Menge von azyklischen Komplexen $\{S_j^\bullet\}_{j \in J}$ mit den Eigenschaften:

(i) für alle $j \in J$ und alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $|S_j^i| < \beta$ und

(ii) für jeden azyklischen Komplex $T^\bullet$, für den Bedingung (i) erfüllt ist, gibt es ein $j \in J$ und einen Isomophismus $S_j^\bullet \to T^\bullet$ in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$

Nun sei $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$. Wir wählen mit Lemma 1.3.7 bzgl. obiger Familie von Komplexen eine Rechtsauflösung $A^\bullet \to I^\bullet$ mit den dort aufgeführten Eigenschaften und wollen nun zeigen, dass dieses $I^\bullet$ ein K-injektiver Komplex ist. Dazu sei also $T^\bullet$ ein beliebiger azyklischer Komplex. Durch transfinite Induktion definieren wir für jede Ordinalzahl α einen azyklischen Unterkomplex $T_\alpha^\bullet \subset T^\bullet$:

- Es sei $T_0^\bullet$ ein von Null verschiedener azyklischer Unterkomplex von $T^\bullet$ mit $|T_0^i| \leq \beta$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Ein solcher existiert nach Satz 1.3.11.
- Ist α eine Limesordinalzahl, so definieren wir
$$T_\alpha^\bullet := \operatorname*{colim}_{\alpha' < \alpha} T_{\alpha'}^\bullet.$$
- Ist α der Nachfolger von $\alpha - 1$, so betrachten wir die Projektion $\pi : T^\bullet \to T^\bullet / T_{\alpha-1}^\bullet$. $T^\bullet / T_{\alpha-1}^\bullet$ ist wieder azylisch. Ist $T^\bullet / T_{\alpha-1}^\bullet \neq 0$, so wählen wir wieder mit Satz 1.3.11 einen azyklischen Unterkomplex $\tilde{T}^\bullet{}_\alpha \subset T^\bullet / T_{\alpha-1}^\bullet$ mit $|\tilde{T}_\alpha^i| \leq \beta$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir $T_\alpha^\bullet := \pi^{-1}(\tilde{T}^\bullet{}_\alpha)$.

Wir zeigen nun durch transfinite Induktion, dass $\operatorname{Hom}^\bullet(T_\alpha^\bullet, I^\bullet)$ für jede Ordinalzahl α exakt ist.

- Der Komplex $T_0^\bullet$ ist zu einem Komplex aus $\{S_j^\bullet\}_{j \in J}$ isomorph und somit folgt die Behauptung aus der Konstruktion von $I^\bullet$.
- Ist $\alpha = \alpha' + 1$ so betrachten wir die exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow T_{\alpha'}^\bullet \longrightarrow T_\alpha^\bullet \longrightarrow \tilde{T}^\bullet{}_\alpha \longrightarrow 0.$$
$\tilde{T}^\bullet{}_\alpha$ ist nach Wahl wieder isomorph zu einem Komplex aus der Familie $\{S_j^\bullet\}_{j \in J}$ und daher folgt wieder, dass $\operatorname{Hom}^\bullet(\tilde{T}^\bullet{}_\alpha, I^\bullet)$ azyklisch ist. Der Komplex $\operatorname{Hom}^\bullet(T_{\alpha'}^\bullet, I^\bullet)$ ist nach Induktionsvoraussetzung azyklisch. Weil I^i für alle $i \in \mathbb{Z}$ injektive Objekte sind, folgt die Behauptung.
- Für eine Limesordinalzahl α wollen wir zeigen, dass der Komplex $\operatorname{Hom}^\bullet(T_\alpha^\bullet, I^\bullet) = \lim_{\alpha' < \alpha} \operatorname{Hom}^\bullet(T_{\alpha'}^\bullet, I^\bullet)$ azyklisch ist. Nun ist für Ordinalzahlen $\lambda \leq \lambda'$ der Morphismus $T_\lambda^\bullet \to T_{\lambda'}^\bullet$ injektiv und daher $\operatorname{Hom}^n(T_{\lambda'}^\bullet, I^\bullet) \to \operatorname{Hom}^n(T_\lambda^\bullet, I^\bullet)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ surjektiv, weil I^i für alle $i \in \mathbb{Z}$ injektiv ist. Nach Lemma 1.3.12 folgt, dass auch $\lim_{\alpha' < \alpha} \operatorname{Hom}^\bullet(T_{\alpha'}^\bullet, I^\bullet)$ azyklisch ist.

Wählen wir nun ein Ordinalzahl ψ die grösser als $\prod_{i \in \mathbb{Z}} |T^i|$ ist, so gilt $T^\bullet = T_\psi^\bullet$ und somit folgt die Behauptung des Satzes. □

1.4 Folgerungen

Wir wollen in diesem Abschnitt Folgerungen aus der Existenz genügend vieler K-injektiver Komplexe festhalten.

Satz 1.4.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit AB 5) und einem Generator. Dann gilt* *(i) Ist $\mathcal{E}$ eine triangulierte Kategorie und $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$ ein Funktor von triangulierten Kategorien, so existiert die Rechtsableitung*

$$\mathbf{R}F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{E}.$$

(ii) Betrachten wir für ein Objekt $A^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ den Funktor

$$\mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, \_) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(Ab).$$

Die Rechtsableitung induziert einen Funktor

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}} : \mathcal{D}(\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(Ab),$$

der in jeder Variable ein Funktor von triangulierten Kategorien ist. Außerdem gilt für $A^\bullet, B^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Gleichheit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet[i]) = h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, B^\bullet)).$$

Beweis: Siehe z. B. [Lip, 2. Kap.].

Um ein allgemeines Resultat über die Ableitung von einer Verkettung von zwei Funktoren formulieren zu können, erinnern wir an die folgende Definition.

Definition 1.4.2. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und F ein Funktor triangulierter Kategorien von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ in eine triangulierte Kategorie $\mathcal{E}$. Ein Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ heißt *rechts-F-azyklisch*, wenn es zu jedem Quasiisomorphismus $u : A^\bullet \to B^\bullet$ in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ einen Quasiisomorphismus $v : B^\bullet \to C^\bullet$ in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ gibt, so dass $F(vu) : F(A^\bullet) \to F(C^\bullet)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{E}$ ist.

Bemerkung 1.4.3. Man kann zeigen, dass es in obiger Situation eine Rechtsableitung von F gibt, wenn jeder Komplex eine Rechtsauflösung durch einen rechts-F-azyklischen Komplex besitzt. K-injektive Komplexe sind gerade die, die bezüglich eines jeden Funktors F wie oben rechts-F-azyklisch sind. Das kann man zum Beispiel in [Lip, Kap. 2] nachlesen.

Wir kommen nun zu dem schon angekündigten Satz.

Satz 1.4.4. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ zwei abelsche Kategorien und $\mathcal{E}$ eine triangulierte Kategorie. $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}(\mathcal{A}')$ und $G : \mathcal{K}(\mathcal{A}') \to \mathcal{E}$ seien Funktoren triangulierter Kategorien. Wir nehmen weiter an, dass sowohl $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ als auch $\mathcal{K}(\mathcal{A}')$ genügend viele K-injektive Komplexe haben und F K-injektive Komplexe von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ in rechts-G-azyklische Komplexe in $\mathcal{K}(\mathcal{A}')$ abbildet. Dann ist die natürliche Transformation von triangulierten Funktoren*

$$\mathbf{R}(G \circ F) \longrightarrow \mathbf{R}G \circ \mathbf{R}F$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Siehe z. B. [Lip, Cor. 2.2.7].

Diese Situation liegt insbesondere dann vor, wenn der Funktor F K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe überführt. Wir benötigen später folgendes bekannte Kriterium.

Lemma 1.4.5. *Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ein Funktor, der rechtsadjungiert zu einem exakten Funktor ist. Dann überführt der induzierte Funktor $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{K}(\mathcal{A}')$ K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe.*

□

Wir kommen nun zum dualen Begriff von K-injektiv.

Definition 1.4.6. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Komplex $P^\bullet$ heißt *K-projektiv*, falls für jeden Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Gleichheit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P^\bullet, A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P^\bullet, A^\bullet)$ gilt.

Ist ein Komplex nach oben beschränkt, so hat man die folgende hinreichende Bedingung K-projektiv zu sein.

Lemma 1.4.7. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $A^\bullet$ ein nach oben beschränkter Komplex, für den für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Objekte A^i projektiv in $\mathcal{A}$ sind. Dann ist $A^\bullet$ bereits K-projektiv.*

Beweis:
Dies ist die duale Version von [Har66, I, Lemma 4.5].

Wir wollen nun zeigen, dass man den Funktor $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ auch ausrechnen kann, indem man die erste Variable nach links K-projektiv auflöst.

Satz 1.4.8. *In der Situation von Satz 1.4.1 sei $A^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ und $P^\bullet_{A^\bullet} \to A^\bullet$ eine K-projektive Linksauflösung von $A^\bullet$. Dann ist der eindeutig bestimmte Morphismus*

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, \_) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(P^\bullet_{A^\bullet}, \_)$$

ein Isomorphismus zwischen Funktoren triangulierter Katgorien.

Beweis:
Analog zu 1.2.5 ist ein Komplex $P^\bullet$ genau dann K-projektiv, wenn der Funktor

$$\mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(P^\bullet, \_) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{K}(Ab)$$

Quasiisomorphismen erhält (vgl. [Spa88, Prop 1.4]). Daher definiert $\mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(P^\bullet_{A^\bullet}, \_)$ einen Funktor

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(Ab)$$

von triangulierten Kategorien. Der Quasiisomorphismus $P^\bullet_{A^\bullet} \to A^\bullet$ induziert außerdem eine natürliche Transformation

$$\mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, \_) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(P^\bullet_{A^\bullet}, \_).$$

Nach der universellen Eigenschaft von $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(A^\bullet, \_)$ existiert daher eine eindeutig bestimmte natürliche Transformation

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, \_) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(P^\bullet_{A^\bullet}, \_).$$

Für ein $B^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ und seine gewählte K-injektive Auflösung $B^\bullet \to I^\bullet_{B^\bullet}$ ist die obige Transformation Verkettung von

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, B^\bullet) = \mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(A^\bullet, I^\bullet_{B^\bullet}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet{}_{A^\bullet}(P^\bullet_{A^\bullet}, I^\bullet_{B^\bullet})$$

und der Umkehrung des Quasiisomorphismus

$$\mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(P^\bullet_{A^\bullet}, B^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathcal{A}}(P^\bullet_{A^\bullet}, I^\bullet_{B^\bullet}).$$

Da beides Quasiisomorphismen sind, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.4.9. Dies ist natürlich auch alles funktoriell in $A^\bullet$. Vergleiche dazu z. B. [Har66, I.6.3]. Diese Feststellung legitimiert im Übrigen die Bezeichnungweise $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$.

Kapitel 2

Äquivariante Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir die benötigten Resultate aus der äquivarianten Geometrie bereitstellen. Im ersten Abschnitt wird der Begriff der G-Garbe und der äquivarianten Kohomologie erklärt. Für den weiteren Verlauf ist besonders die Faktorisierung 2.1 wichtig, die es später erlaubt, viele Ergebnisse auf die äquivariante Situation zu übertragen. Im zweiten Abschnitt folgt eine äquivariante Version vom Satz 90 von Hilbert. Diese ermöglicht es uns später, das Motiv des projektiven Bündels zu zerlegen. Im letzten Abschnitt folgt schließlich eine Konstruktion, die die Analogie zwischen der hier definierten äquivarianten Kohomologie und der Borelkonstruktion aus der Topologie deutlich macht.

2.1 G-Garben und äquivariante Kohomologie

Für einen Körper k und ein k-Schema X sei Sm/X die Kategorie der Schemata über X, die glatt und von endlichem Typ über X sind. Es sei $\mathcal{T}$ die etale, Nisnevich- oder Zariski-Topologie auf Sm/X. Die folgenden Resultate gelten in allgemeinerer Form und werden dort ähnlich bewiesen. Da wir aber nur an der obigen Situation interessiert sind und wir die Bezeichnungen nicht unnötig kompliziert machen wollen, beschränken wir uns von vornherein auf diese spezielle Situation. Es sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen oder die Kategorie der A-Moduln für einen Ring A. Mit $Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/X)$ bezeichnen wir die Kategorie Garben auf Sm/X mit Werten in $\mathcal{C}$ bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$. Ist G ein Gruppenschema über k, so bezeichnen wir mit ${}^{G}Sm/k$ die Kategorie der G-Schemata, die glatt und von endlichem Typ über k sind. Wir wollen nun definieren, was eine G-Garbe auf Sm/X für ein G-Schema X ist.

Definition 2.1.1. Eine *G-Garbe* auf Sm/X in der Topologie $\mathcal{T}$ mit Werten in $\mathcal{C}$ ist eine Garbe $F \in Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/X)$ zusammen mit einem Isomorphismus

$$\phi : \sigma^* F \longrightarrow p_2^* F,$$

so dass die Kozykelbedingung

$$(p_{2,3}^*\phi) \circ ((1 \times \sigma)^*\phi) = (\mu \times 1)^*\phi$$

erfüllt ist, wobei $\sigma : G \times X \to X$ die Operation von G auf X ist, $\mu : G \times G \to G$ die Multiplikation des Gruppenschemas G und $p_2 : G \times X \to X$ und $p_{2,3} : G \times G \times X \to G \times X$ die offensichtlichen Projektionen sind. Weiter bezeichne für einen Morphismus $f : Y \to Z$

$$f^* : \ Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/Z) \longrightarrow \ Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/Y)$$

den Rückzug von Garben. Morphismen von G-Garben sind Garbenmorphismen, die in offensichlicher Weise mit der zusätzlichen Struktur verträglich sind. Die Kategorie der G-Garben auf Sm/X in der Topologie $\mathcal{T}$ bezeichnen wir mit ${}^{G}Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/X)$.

Für eine diskrete Gruppe G wollen wir nun diese Definition möglichst explizit machen. Sei also G eine abstrakte Gruppe. Ist X ein G-Schema, so haben wir für jedes $g \in G$ einen Morphismus $X \to X$ gegeben, den wir wieder mit g bezeichnen wollen. Dieser induziert einen Funktor

$$g^* : \ Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/X) \longrightarrow \ Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/X),$$

den wir explizit durch

$$(g^*F)(U \longrightarrow X) = F(\ {}^{g}(U \longrightarrow X))$$

mit ${}^{g}(U \to X) := (U \to X \xrightarrow{g} X)$ beschreiben können. Dann ist eine G-Garbe auf Sm/X eine Garbe $F \in \ Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/X)$ mit einem Morphismus

$$\phi_g : g^*F \longrightarrow F$$

für jedes $g \in G$, so dass für alle $g, h \in G$ und $(U \to X) \in Sm/X$ folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
F(\ {}^{gh}(U \to X)) \arrow[r, "\phi_{gh}(U \to X)"] \arrow[d, equal] & F(U \to X) \\
F(\ {}^{g}(\ {}^{h}(U \to X))) \arrow[r, "\phi_g(\ {}^{h}(U \to X))"] & F(\ {}^{h}(U \to X)). \arrow[u, "\phi_h(U \to X)"']
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.1.2. Operiert G trivial auf X, so gilt offenbar

$${}^{G}Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{C}}(Sm/X) = \ Shv_{\mathcal{T}}^{{}^{G}\mathcal{C}}(Sm/X).$$

Dabei bezeichnen wir mit ${}^{G}\mathcal{C}$ die Kategorie der G-Objekte in $\mathcal{C}$.

Um die Topostheorie anwenden zu können, wollen wir noch einen etwas konzeptionelleren Zugang zu G-Garben aufzeigen. Dazu betrachten wir den Topos $(Sm/k)^{\sim}_{\mathcal{T}}$ der mengenwertigen Garben auf Sm/k in der Topologie $\mathcal{T}$. Ist G ein Gruppenschema über k, so fassen wir G als Gruppenobjekt in $(Sm/k)^{\sim}_{\mathcal{T}}$ auf. Die Kategorie der G-Objekte in $(Sm/k)^{\sim}_{\mathcal{T}}$ bezeichnen wir mit B_G. Diese ist nach [SGA72a, IV.1.2] wieder ein Topos und wird klassifizierender Topos von G genannt. Ist nun X ein G-Schema, so fassen wir es als Objekt in B_G auf. Es macht also Sinn die Kategorie B_G/X der Objekte in B_G über X zu betrachten. Der Zusammenhang zur vorigen Definition wird durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 2.1.3. *Sei G eine diskrete Gruppe und $X \in {}^G Sm/k$. Dann sind die Kategorien B_G/X und ${}^G Shv^{Sets}_{\mathcal{T}}(Sm/X)$ auf natürliche Weise äquivalent.*

Bemerkung 2.1.4. Da wir in dieser Arbeit nur an diskreten Gruppen interessiert sind, formulieren und beweisen wir diesen Satz auch nur für diesen Fall, wenngleich er sicher auch allgemeiner gilt.

Beweis:
Nach [SGA72a, III.5.4] hat man folgende Kategorienäquivalenz:

$$\Psi : \; Shv^{Sets}_{\mathcal{T}}(Sm/k)/X \xrightarrow{\sim} Shv^{Sets}_{\mathcal{T}}(Sm/X).$$

Dabei ist Ψ wie folgt gegeben. Ist $H \to X \in \; Shv^{Sets}_{\mathcal{T}}(Sm/k)/X$ und $Z \to X \in Sm/X$, so ist

$$\Psi(H \to X)(Z \to X) = \mathrm{Hom}_{(Sm/k)^{\sim}_{\mathcal{T}}/X}(Z \to X, H \to X).$$

Für die Beschreibung von Ψ^{-1} erinnern wir zunächst daran, dass der Funktor $j_X : Sm/X \to Sm/k$ einen Funktor

$$j_{X!} : (Sm/X)^{\sim}_{Nis} \longrightarrow (Sm/k)^{\sim}_{\mathcal{T}}$$

induziert (vgl. [SGA72a, III.5]). Ist nun $F \in (Sm/X)^{\sim}_{Nis}$, so gibt es einen eindeutigen Morphismus $F \to X$, da X finales Objekt in $(Sm/X)^{\sim}_{Nis}$ ist. Damit ist

$$\Psi^{-1}(F) = (j_{X!}(F) \longrightarrow j_{X!}(X) = X).$$

Ist nun $H \in B_G$ und $H \to X$ äquivariant, so wird $\Psi(H \to X)$ zur G-Garbe. Dabei ist die Kozykelbedingung erfüllt, weil G auf H eine Gruppenoperation ist.

Sei nun umgekehrt F eine G-Garbe. Man überlegt sich, dass für alle $g \in G$ dann $j_{X!}(g^*F) = j_{X!}(F)$ ist und so F zu einem Objekt von B_G wird, so dass der Morphismus $j_{X!}(F) \to X$ äquivariant wird. Dies liefert dann die gewünschte Kategorienäquivalenz. □

Beispiel 2.1.5. (i) Wir betrachten die Garbe $\mathbb{G}_{a,X}$ auf Sm/X für ein G-Schema X. Es gilt offenbar

$$p_2^*\mathbb{G}_{a,X} \cong \mathbb{G}_{a,G\times X} \cong \mu^*\mathbb{G}_{a,X}$$

und man erhält so eine G-Garbenstruktur auf $\mathbb{G}_{a,X}$.

(ii) Wie in (i) überlegt man sich, dass $\mathbb{G}_{m,X}$ auf kanonische Weise für ein G-Schema X eine G-Garbenstruktur besitzt.

Wir wollen nun äquivariante Kohomologie definieren. Aus Sicht der Topostheorie ist klar, was äquivariante Kohomologie ist, nämlich einfach Kohomologie im Topos B_G. Wir wollen dies hier nun ausführen. Dazu betrachten wir die Kategorie $(B_G)_{Ab}$ der abelschen Objekte in B_G. Für diese abelsche Kategorie gilt AB 5) und es gibt einen Generator. Dies folgt aus allgemeinen Ergebnissen der Topostheorie aus SGA 4. Daher sind also die Ergebnisse aus Kapitel 1 anwendbar und es gibt also genügend viele K-injektive Komplexe in Kom(B_G). Insbesondere erhalten wir aus Satz 1.4.1 einen Funktor

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}} : \mathcal{D}((B_G)_{Ab})^{op} \times \mathcal{D}((B_G)_{Ab}) \longrightarrow \mathcal{D}(Ab),$$

der in jeder einzelnes Variablen ein Funktor triangulierter Kategorien ist. Ist $X \in {}^GSm/k$, so fassen wir X als Objekt in B_G auf und bezeichnen mit ${}^G\mathbb{Z}(X)$ den über X frei erzeugten $\mathbb{Z}$-Modul. Dann schreiben wir auch kurz für ein Objekt $A^\bullet \in \mathcal{D}((B_G)_{Ab})$

$$H^i((B_G)_{Ab}; X, A^\bullet) := H^i(G; X, A^\bullet) := h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}}({}^G\mathbb{Z}(X), A^\bullet)$$

und nennen dies die äquivariante Kohomologie von X mit Werten in $A^\bullet$.

Wir kommen nun zu einer Faktorisierung von $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}}$, die es uns später erlauben wird, Ergebnisse aus der nicht äquivarianten Theorie auf den äquivarianten Fall zu übertragen. Es sei T der Topos $(Sm/k)^{\sim}_{\mathcal{T}}$ und T_{Ab} wieder die Kategorie der abelschen Objekte in T. Wir betrachten zunächst für ein Objekt $A \in \mathrm{Kom}((B_G)_{Ab})$ den Funktor

$$\mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(A, \_) : (B_G)_{Ab} \longrightarrow \mathbb{Z}[G] - \mathrm{Mod}\,.$$

Dabei wird $\mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(M, N)$ für $N, M \in (B_G)_{Ab}$ durch

$$(g \cdot f)(m) := gf(g^{-1}m)$$

zu einem $\mathbb{Z}[G]$-Modul. Mit dem Invarianten-Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod}}(\mathbb{Z}, \_) : \mathbb{Z}[G] - \mathrm{Mod} \longrightarrow Ab$$

gilt die Faktorisierung

$$\mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}}(A, \_) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod}}(\mathbb{Z}, \_) \circ \mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(A, \_).$$

Um für $A = {}^G\mathbb{Z}(X)$ die Faktorisierung auch auf derivierten Niveau zu erreichen, beweisen wir folgende

Proposition 2.1.6. *Für ein $X \in {}^GSm/k$ überführt der Funktor* $\mathrm{Hom}_{T_{Ab}}({}^G\mathbb{Z}(X), \_)$ *K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe.*

Wir beweisen zunächst folgendes

Lemma 2.1.7. *Für ein* $\mathcal{F} \in (B_G)_{Ab}$ *ist der Funktor* $\mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(\mathcal{F}, \_)$ *rechtsadjungiert zum Funktor*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod} & \longrightarrow & (B_G)_{Ab} \\ M & \longmapsto & M \otimes \mathcal{F} \end{array}$$

Beweis:
Für $M \in \mathbb{Z}[G] - Mod$ und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in (B_G)_{Ab}$ müssen wir natürliche und zueinander inverse Abbildungen

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

und

$$\mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Psi^{-1}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$$

konstruieren.

Ist $f : M \to \mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ein $\mathbb{Z}[G]$-Modulhomomorphismus, so sei $\Psi(f)$ für eine Schnitt s von $\mathcal{F}$ und ein $a \in M$ durch $\Psi(f)(a \otimes s) := f(a)(s)$ definiert. Man überprüft leicht, dass dies einen Morphismus in $\mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}}(M \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G})$ definiert. Ist andererseits $h : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus in $(B_G)_{Ab}$, so definiert $\Psi^{-1}(h)(s) := h(a \otimes s)$ für ein $a \in M$ und einen Schnitt s in $\mathcal{F}$ einen Morphismus in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, \mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$. Es kann nun leicht nachgerechnet werden, dass diese Mophismen natürlich in allen drei Variablen und invers zueinander sind. □

Beweis von Proposition 2.1.6
Für ein $X \in {}^G Sm/k$ ist der Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod} & \longrightarrow & (B_G)_{Ab} \\ M & \longmapsto & M \otimes {}^G\mathbb{Z}(X) \end{array}$$

aus Lemma 2.1.7 exakt. Zusammen mit 1.4.5 folgt die Behauptung der Proposition. □

Also erhalten wir für ein $X \in {}^G Sm/k$ mit 1.4.4 auch auf derivierten Niveau die Faktorisierung

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(B_G)_{Ab}}({}^G\mathbb{Z}(X), \_) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod}}(\mathbb{Z}, \_) \circ \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{T_{Ab}}({}^G\mathbb{Z}(X), \_). \tag{2.1}$$

Wir wollen uns nun überlegen, dass die Vergissfunktoren

$$\mathrm{Ver} : (B_G)_{Ab} \longrightarrow T_{Ab}$$

und

$$\mathrm{Ver} : \mathbb{Z}[G] - \mathrm{Mod} \longrightarrow Ab$$

einen kanonischen Morphismus zwischen äquivarianter und nicht-äquivarianter Kohomologie definieren. Nach Definition des rechtsabgeleiteten Funktors gibt es einen Morphismus

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod}}(\mathbb{Z}, \_) \longrightarrow \mathrm{Ver}(\_).$$

Außerdem erhält

$$\mathrm{Ver}: (B_G)_{Ab} \longrightarrow T_{Ab}$$

K-injektive Komplexe (vgl. 3.1.5). Daher hat man folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}((B_G)_{Ab}) \arrow[r, "\mathrm{Ver}"] \arrow[d, "\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{T_{Ab}}({}^G\mathbb{Z}(X), _)"'] & \mathcal{D}(T_{Ab}) \arrow[d, "\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{T_{Ab}}(\mathbb{Z}(\mathrm{Ver}(X)), _)"] \\
\mathcal{D}(\mathbb{Z}[G] - \mathrm{Mod}) \arrow[r, "\mathrm{Ver}"] & \mathcal{D}(Ab),
\end{tikzcd}$$

und wir erhalten somit für alle $A^\bullet \in \mathcal{D}((B_G)_{Ab})$ und $X \in {}^GSm/k$ einen natürlichen Morphismus

$$\mathrm{Ver}: H^i(G, X; A^\bullet) \longrightarrow H^i(\mathrm{Ver}(X), \mathrm{Ver}(A^\bullet)). \tag{2.2}$$

2.2 Äquivarianter Hilbert 90

Wir wollen in diesem Abschnitt eine äquivariante Version vom Hilbert 90 beweisen. Mit dieser wird es möglich sein, im dritten Kapitel eine Zerlegung des projektiven Bündels zu finden.

Zunächst untersuchen wir Geradenbündel ganz allgemein in einem geringten Topos. Dazu sei also (E, A) ein kommutativ geringter Topos, $e = e_E$ sei das finale Objekt in E und ${}_AE$ bezeichne die Kategorie der A-Moduln in E.

Definition 2.2.1. Ein *Geradenbündel* in ${}_AE$ ist ein A-Modul L, so dass es eine Überdeckung $\{U_i \to e\}_{i \in I}$ von e gibt mit der Eigenschaft, dass für alle $i \in I$ dann L_{U_i} als A_{U_i}-Modul isomorph zu A_{U_i} ist.

Wir wollen nun Geradenbündel in Verbindung mit Torseuren bringen. Dazu definieren wir wie folgt ein Objekt in E_{Ab}:

$$A^*: U \in E \longmapsto Isom_{A_{|U}}(A_{|U}, A_{|U}).$$

Analog zu [Del77, Prop.2.3] beweisen wir den folgenden

Satz 2.2.2. *Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von Geradenbündeln in (E, A) und den Isomorphieklassen von A^*-Torseuren.*

Beweis:
Ist L ein Geradenbündel, so wird durch

$$L^*: U \in E \longmapsto Isom_{A|U}(A_{|U}, L_{|U})$$

eine mengenwertige A^*-Garbe definiert, die offensichtlich über einer L-trivialisierenden Überdeckung auch selbst trivialisiert. Also ist L^* ein A^*-Torseur. Ist nun umgekehrt T ein A^*-Torseur, der über einer Überdeckung $\{U_i \to e\}$ trivialisiert, so erhält man wegen

$$Isom_{A^*_{|U_i \cap U_j}}(A^*_{|U_i \cap U_j}, A^*_{|U_i \cap U_j}) = A^*(U_i \cap U_j)$$

durch Zusammenkleben ein Geradenbündel. Offensichtlich erhält man so eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen. Weiter überlegt man sich, dass diese Bijektion mit den Gruppenstrukturen auf beiden Seiten verträglich ist. □

In [Gir71, Bem. 3.5.4] werden auf einem Topos Isomorphiesklassen von Torseuren mit der ersten Kohomologie identifiziert. Für Details verweisen wir auf [Gir71, Kap. 3]. Zusammen damit erhalten wir den folgenden

Satz 2.2.3. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus zwischen der Gruppe der Isomorphiesklassen von Geradenbündeln in (E, A) und $H^1(E; e, A^*)$.* □

Wir betrachten nun einen Topos T, eine diskrete Gruppe G und ein G-Objekt X. B_G sei der klassifizierende Topos von G, und wir fassen X als Objekt von B_G auf. E sei nun der Topos B_G/X und A sei ein kommutatives Ringobjekt in E. Wir betrachen den Funktor

$$\mathrm{ver} : E = B_G/X \longrightarrow T/X,$$

der einfach die G-Struktur vergisst. Dann ist $\mathrm{ver}(A)$ wieder ein kommutatives Ringobjekt in T/X. Um gleich den Zusammenhang zur üblichen äquivarianten Picardgruppe herstellen zu können, benötigen wir das folgende

Lemma 2.2.4. *Ein A-Modul L ist genau dann ein Geradenbündel, wenn der* $\mathrm{ver}(A)$*-Modul* $\mathrm{ver}(L)$ *ein Geradenbündel ist.*

Beweis:
Die Hinrichtung ist klar. Für die Rückrichtung überlegt man sich zunächst, dass L auf $(U \to X) \in B_G/X$ genau dann trivial ist, wenn $\mathrm{ver}(L)$ auf $\mathrm{ver}(U \to X) \in T/X$ trivial ist. Ist $\{U_i \xrightarrow{\pi_i} X\}$ eine Überdeckung von X in T, auf der $\mathrm{ver}(L)$ trivialisiert, dann trivialisiert $\mathrm{ver}(L)$ auch auf der äquivarianten Überdeckung $\{G \times U_i \to X,\ (g, u) \mapsto g\pi_i(u)\}$ und es folgt die Behauptung. □

Wir kehren nun zu unserer eigentlichen Situation zurück. Dazu sei also $T = (Sm/k)^{\sim}_{\mathcal{T}}$ mit $\mathcal{T} = et, Nis$ oder Zar, G eine abstrakte Gruppe, B_G der klassifizierende Topos und X ein G-Schema über k, welches wir als Objekt in B_G auffassen. Es sei E nun B_G/X und A die G-Garbe $\mathcal{O}_X$ in B_G. Nun gilt in der nichtäquivarianten Situation für ein Schema X

$$H^1_{et}(X, \mathcal{O}^*_X) = H^1_{Nis}(X, \mathcal{O}^*_X) = H^1_{Zar}(X, \mathcal{O}^*_X).$$

Mit einem Spektralsequenzargument (vgl. [Gro68, §2]) überlegt man sich, dass für ein G-Schema auch

$$H^1_{et}(G, X; \mathcal{O}^*_X) = H^1_{Nis}(G, X; \mathcal{O}^*_X) = H^1_{Zar}(G, X; \mathcal{O}^*_X)$$

gilt. In [MFK94] wird für ein $X \in {}^G Sm/k$ die äquivariante Picardgruppe $\mathrm{Pic}^G(X)$ wie folgt definiert. Man betrachtet auf X Isomorphiesklassen von invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln mit einer G-Struktur als $\mathcal{O}_X$-Modul. Für Details verweisen wir auf [MFK94, 1.3]. Aus dem obigen Vergleich der Kohomologiegruppen, Satz 2.1.3, Satz 2.2.3 und Lemma 2.2.4 erhalten wir nun den folgenden

Satz 2.2.5 (Äquivarianter Hilbert 90). *Es gibt einen in X natürlichen Isomorphismus*

$$Pic^G(X) \xrightarrow{\sim} H^1(G; X, \mathcal{O}^*_X).$$

Außerdem ergibt sich aus der Konstruktion, dass das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} Pic^G(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^1(G; X, \mathcal{O}^*_X) \arrow[d] \\ Pic(X) \arrow[r, "\sim"] & H^1(X, \mathcal{O}^*_X) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dabei werden die senkrechten Pfeile gerade vom Vergissfunktor induziert (vgl. auch 2.2).

2.3 Simpliziale klassifizierende Räume und äquivariante Kohomologie

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass man äquivariante Kohomologie mit Koeffizienten mit trivialer G-Operation auch in der nicht-äquivarianten Kategorie ausdrücken kann. Die Ergebnisse dieses Abschnittes werden im weiteren Verlauf der Arbeit nicht benötigt. Es soll aber die Analogie zwischen der Kohomologie im klassifizierenden Topos und der Borelkonstruktion aus der Topologie aufgezeigt werden. Unabhängig von diesem Abschnitt wird darauf noch einmal im Kapitel 4.2 eingegangen.

Die Idee ist, dass äquivariante Garbenkohomologie eine Mischung aus Garbenkohomologie und Gruppenkohomologie ist. Nun kann man durch geeignetes Auflösen in der ersten Variable erreichen, dass der Gruppenkohomologieanteil wegfällt und nur noch gewöhnliche Garbenkohomologie übrig bleibt.

Wir betrachten also einen Situs C und die zugehörigen Topoi $C^{\sim}$ der mengenwertigen Garben und $C^{\wedge}$ der mengenwertigen Prägarben auf C. Es sei G ein Gruppenobjekt in $C^{\sim}$.

Es sei $C_G^\wedge$ der Topos der G-Objekte in $C^\wedge$ und es sei $C_G^\sim$ der Topos der G-Objekte in $C^\sim$. Wir betrachten die natürliche Inklusion

$$\mathcal{H}^0 : (C_G^\sim)_{Ab} \longrightarrow (C_G^\wedge)_{Ab}.$$

Der Garbifizierungsfunktor induziert den Funktor

$$a : (C_G^\wedge)_{Ab} \longrightarrow (C_G^\sim)_{Ab},$$

der exakt und linksadjungiert zu $\mathcal{H}^0$ ist. Daher ist $\mathcal{H}^0$ linksexakt und überführt K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe. Mit

$$\mathbf{R}\mathcal{H}^0 : \mathcal{D}((C_G^\sim)_{Ab}) \longrightarrow \mathcal{D}((C_G^\wedge)_{Ab})$$

bezeichnen wir die totale Rechtsableitung. Für ein $A^\bullet \in \mathcal{K}((C_G^\sim)_{Ab})$ betrachten wir den Funktor

$$\mathrm{Hom}^\bullet{}_{(C_G^\wedge)_{Ab}}(\mathcal{H}^0(A^\bullet), \_) : \mathcal{K}((C_G^\wedge)_{Ab}) \longrightarrow \mathcal{D}(Ab).$$

Wegen

$$\mathrm{Hom}^\bullet{}_{(C_G^\sim)_{Ab}}(A^\bullet, \_) = \mathrm{Hom}^\bullet{}_{(C_G^\wedge)_{Ab}}(\mathcal{H}^0(A^\bullet), \mathcal{H}^0(\_))$$

gilt die folgende Faktorisierung

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(C_G^\sim)_{Ab}}(A^\bullet, \_) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(C_G^\wedge)_{Ab}}(\mathcal{H}^0(A^\bullet), \mathbf{R}\mathcal{H}^0(\_)).$$

Bei der ersten Ableitung wird Garbenkohomologie gebildet und bei der zweiten Gruppenkohomologie. Der Vorteil von $(C_G^\wedge)_{Ab}$ gegenüber $(C_G^\sim)_{Ab}$ ist, dass es in der ersteren mehr projektive Objekte gibt. Dies erlaubt es, für ein Objekt $X \in C_G^\sim$ eine projektive Auflösung zu konstruieren. Dazu betrachten wir das Produkt $G \times X$ mit der G-Operation $g(h,x) = (hg^{-1}, gx)$ und die Überdeckung $p_2 : G \times X \to X$. Wir identifizieren für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{G \times \cdots \times G}_{\text{n-mal}} \times X \xrightarrow{\sim} \underbrace{(G \times X) \times_X \cdots \times_X (G \times X)}_{\text{n-mal}},$$

wobei die G-Struktur auf der linken Seite durch

$$g(h_1, h_2, \ldots, h_n, x) = (h_1 g^{-1}, h_2 g^{-1}, \ldots, h_n g^{-1}, gx)$$

gegeben ist. Das simpliziale Objekt, welches zu der Überdeckung assoziert ist, bezeichnen wir mit $EG \times X$. Dieses entspricht einer simplizialen Borelkonstruktion. Den zugehörigen Komplex in $\mathcal{K}((C_G^\sim)_{Ab})$ bzw. in $\mathcal{K}((C_G^\wedge)_{Ab})$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}(EG \times X)$ bzw. $\mathbb{Z}^{ps}(EG \times X)$. Es folgt aus [SGA72b, 1.11], dass $\mathbb{Z}(EG \times X) \to \mathbb{Z}(X)$ und $\mathbb{Z}^{ps}(EG \times X) \to \mathbb{Z}^{ps}(X)$ Rechtsauflösungen sind. Nun können wir äquivariante Kohomologie auf X mit Koeffizienten in $B^\bullet \in \mathcal{K}(C_G^\sim)_{Ab}$ wie folgt schreiben:

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(C_G^\sim)_{Ab}}(\mathbb{Z}(X), B^\bullet) =$$
$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(C_G^\sim)_{Ab}}(\mathbb{Z}(EG \times X), B^\bullet) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(C_G^\wedge)_{Ab}}(\mathbb{Z}^{ps}(EG \times X), \mathbf{R}\mathcal{H}^0(B^\bullet)).$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathbb{Z}^{ps}(EG \times X)$ ein K-projektiver Komplex in $\mathcal{K}((C_G^\wedge)_{Ab})$ ist und damit dann den letzten Ausdruck weiter vereinfachen. Da $\mathbb{Z}^{ps}(EG \times X)$ nach oben beschränkt ist, reicht es nach Lemma 1.4.7 zu zeigen, dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ das Objekt $\mathbb{Z}^{ps}(EG \times X)^i$ projektiv in $(C_G^\wedge)_{Ab}$ ist. Dies besagt gerade das folgende

Lemma 2.3.1. *Die Objekte $\mathbb{Z}^{ps}(G^n \times X)$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ projektiv in $(C_G^\wedge)_{Ab}$.*

Beweis:
Wir beweisen das Lemma für $n = 1$. Für beliebiges n funktioniert der Beweis ganz analog. Dazu betrachten wir einen surjektiven Morphismus $M \to M'' \to 0$ in $(C_G^\wedge)_{Ab}$ und einen Morphismus $\mathbb{Z}^{ps}(G \times X) \to M''$. Wir müssen zeigen, dass sich dieser zu einem Morphismus $\mathbb{Z}^{ps}(G \times X) \to M$ fortsetzen lässt. Da $\mathbb{Z}^{ps}(G \times X)$ der von $G \times X$ frei erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul in $(C_G^\wedge)_{Ab}$ ist, reicht es, einen Morphismus $G \times X \to M''$ zu einem Morphismus $G \times X \to M$ fortzusetzen. Die Inklusion $X \to^i G \times Z, x \mapsto (e, x)$ induziert einen Morphismus $X \to M''$ der sich zu einem Morphismus $X \xrightarrow{\tilde{f}} M$ in $C_{Ab}^\wedge$ fortsetzen lässt. Wir definieren $f : G \times X \to M$ durch $f(h, x) := h^{-1}\tilde{f}(hx)$. Man rechnet leicht nach, dass f G-äquivariant ist und den Morphismus $G \times X \to M''$ fortsetzt. $\square$

Wegen 1.4.7 folgt also

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(C_G^\sim)_{Ab}}(\mathbb{Z}(X), B^\bullet) = \mathrm{Hom}^\bullet{}_{(C_G^\wedge)_{Ab}}(\mathbb{Z}^{ps}(EG \times X), \mathbf{R}\mathcal{H}^0(B^\bullet)).$$

Wir wollen dies nun weiter für den Fall, dass $B^\bullet \in \mathcal{D}((C_G^\sim)_{Ab})$ ein Komplex mit trivialer G-Operation ist, untersuchen. Das soll heißen, dass $B^\bullet$ im Bild des Funktors

$$triv^\sim : \mathcal{D}(C_{Ab}^\sim) \longrightarrow \mathcal{D}((C_G^\sim)_{Ab})$$

liegt, der dadurch definiert ist, dass man ein Objekt aus $C_{Ab}^\sim$ einfach mit der trivialen G-Struktur versieht. Da dieser Funktor exakt ist, induziert er auf natürliche Weise einen Funktor auf den derivierten Kategorien. Wir wollen uns zunächst überlegen, dass in dieser Situation auch $\mathbf{R}\mathcal{H}^0(B^\bullet)$ triviale G-Operation hat, das heißt $B^\bullet$ ist im Bild des Funktors

$$triv^\wedge : \mathcal{D}(C_{Ab}^\wedge) \longrightarrow \mathcal{D}((C_G^\wedge)_{Ab}).$$

Lemma 2.3.2. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\mathbf{R}\mathcal{H}^0 \circ triv^\sim = triv^\wedge \circ \mathbf{R}\mathcal{H}^0.$$

Beweis:
Dazu betrachten wir die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} (C_G^\sim)_{Ab} & \xrightarrow{ver^\sim} & C_{Ab}^\sim \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}^0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}^0} \\ (C_G^\wedge)_{Ab} & \xrightarrow{ver^\wedge} & C_{Ab}^\wedge \end{array}$$

und

$$\begin{tikzcd}
(C_G^{\sim})_{Ab} \arrow[d, "\mathcal{H}^0"] & C_{Ab}^{\sim} \arrow[l, "triv^{\sim}"'] \arrow[d, "\mathcal{H}^0"] \\
(C_G^{\wedge})_{Ab} & C_{Ab}^{\wedge}. \arrow[l, "triv^{\wedge}"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $ver^{\sim}$ bzw. $ver^{\wedge}$ der Funktor, der einfach die G-Struktur vergisst. Dieser ist rechtsadjungiert zu dem Funktor

$$\begin{array}{ccc} C_{Ab}^{\sim} & \longrightarrow & (C_G^{\sim})_{Ab} \\ F & \longmapsto & \mathbb{Z}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} F, \end{array}$$

welcher exakt ist. Daher erhält nach 1.4.5 $ver^{\sim}$ K-injektive Komplexe. Damit überlegen wir uns nun, dass $triv^{\sim}$ K-injektive Komplexe in $\mathcal{H}^0$-rechts-azyklische abbildet. Dazu sei also $I^\bullet$ ein K-injektiver Komplex in $C_{Ab}^{\sim}$ und $triv^{\sim}(I^\bullet) \to A^\bullet$ ein Quasiisomprphismus in $\mathcal{K}((C_G^{\sim})_{Ab})$. Wir wählen eine K-injektive Rechtsauflösung $A^\bullet \to J^\bullet$ von $A^\bullet$ in $\mathcal{K}((C_G^{\sim})_{Ab})$. Da $ver^{\sim}$ exakt ist und K-injektive Komplexe erhält, ist die Verkettung

$$I^\bullet = ver^{\sim}(triv^{\sim}(I^\bullet)) \longrightarrow ver^{\sim}(A^\bullet) \longrightarrow ver^{\sim}(J^\bullet)$$

ein Quasiisomorphismus zwischen K-injektiven Objekten und somit ist auch

$$\mathcal{H}^0(I^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^0(ver^{\sim}(A^\bullet)) \longrightarrow \mathcal{H}^0(ver^{\sim}(J^\bullet))$$

ein Quasiisomorphismus. Daher ist auch

$$\mathcal{H}^0(triv^{\sim}(I^\bullet)) \longrightarrow \mathcal{H}^0(A^\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}^0(J^\bullet)$$

ein Quasiisomorphismus, weil sich die Eigenschaft Quasiisomorphismus zu sein auch nach Anwendung von $ver^{\wedge}$ prüfen lässt. Also ist $triv^{\sim}(I^\bullet)$ $\mathcal{H}^0$-rechts-azyklisch. Damit haben wir die Faktorisierung

$$\mathbf{R}\mathcal{H}^0 \circ triv^{\sim} = triv^{\wedge} \circ \mathbf{R}\mathcal{H}^0$$

bewiesen. □

Somit können wir äquivariante Kohomologie auf X mit Koeffizienten in $B^\bullet \in \mathcal{K}((C_G^{\sim})_{Ab})$ mit trivialer G-Operation als

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{(C_G^{\sim})_{Ab}}(\mathbb{Z}(X), B^\bullet) = \\ &\qquad \mathrm{Hom}^\bullet{}_{C_{Ab}^{\wedge}}(\mathbb{Z}^{ps}(EG \times_G X), \mathbf{R}\mathcal{H}^0(B^\bullet)) = \mathrm{Hom}^\bullet{}_{C_{Ab}^{\wedge}}(\mathbb{Z}^{ps}(EG \times_G X), \mathbf{R}\mathcal{H}^0(B^\bullet)) \end{aligned}$$

schreiben, wobei $EG \times_G X := (EG \times X)/G$ sein soll.

Man kann nun auf ganz ähnliche Art zeigen, dass

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{C^{\sim}_{Ab}}(\mathbb{Z}(EG \times_G X), B^\bullet) = \mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{Z}^{ps}(EG \times_G X), \mathbf{R}\mathcal{H}^0(B^\bullet))$$

gilt.

Wir fassen die Ergebnisse von diesem Abschnitt im folgenden Satz zusammen.

Satz 2.3.3. *Sei $B^\bullet \in \mathcal{K}((C^{\sim}_G)_{Ab})$ ein Komplex mit trivialer G-Operation und X ein G-Objekt. Dann gilt*

$$H^i(G; X, B^\bullet) = h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{C^{\sim}_{Ab}}(\mathbb{Z}(EG \times_G X), B^\bullet))),$$

wobei wir letzteres auch kurz mit $H^i(EG \times_G X, B^\bullet)$ bezeichnen.

Kapitel 3

Konstruktion und Eigenschaften

In diesem Kapitel folgt nun die eigentliche Konstruktion der triangulierten Kategorie äquivarianter Motive. Im ersten Abschnitt wird die triangulierte Kategorie ${}^{G}DM^{eff}(k)$ und der kovariante Funktor

$$ {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M} : {}^{G}Sm/k \longrightarrow {}^{G}DM^{eff}(k) $$

definiert. Im zweiten Abschnitt wird ein Tensorprodukt auf ${}^{G}DM^{eff}(k)$ konstruiert, so dass die Künneth-Formel ${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X) \otimes {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y) = {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X \times Y)$ gilt. Im dritten Abschnitt wird das Tate-Objekt $\mathbb{Z}(1)$ definiert, welches die Zerlegung des projektiven Bündels wie in der nicht-äquivarianten Situation ermöglicht. Es folgen Mayer-Vietoris Sequenz, Homotopieinvarianz und das ausgezeichnete Dreieck für äquivariante Aufblasungen. Mit den bisher bewiesenen Resultaten folgen diese Eigenschaften leicht aus den nicht-äquivarianten Ergebnissen. Im vierten Abschnitt wird der Funktor ${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}$ auf die Kategorie aller G-Schemata von endlichem Typ über dem Grundkörper fortgesetzt, und es werden Motive mit kompakten Trägern definiert. Es folgen bis zum Ende des fünften Abschnittes weitere Eigenschaften von ${}^{G}DM^{eff}(k)$. Außerdem wird ${}^{G}DM(k)$ als Stabilisierung von ${}^{G}DM^{eff}(k)$ definiert. Im sechsten Abschnitt wird am Beispiel der motivischen Kohomologie gezeigt, wie sich die bisherigen Ergebnisse nutzen lassen, um Homologie- und Kohomologietheorien mit guten Eigenschaften zu definieren. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird eine rationale Version von ${}^{G}DM^{eff}(k)$ eingeführt und eine Restriktion sowie eine Transfer Abbildung für einen Wechsel der Gruppe G definiert.

3.1 Konstruktion der äquivarianten Kategorie

Wir wollen zunächst an die grundlegenden Definitionen aus [Voe00] erinnern. Für Einzelheiten verweisen wir auf [Voe00, Kap. 1 und 3]. Es sei k ein Körper und Sm/k die Kategorie der Schemata, die glatt und von endlichem Typ über k sind. Für zwei Schemata

$X, Y \in Sm/k$ sei

$$Cor(X,Y) := \mathbb{Z}\left[\left\{ Z \hookrightarrow X \times Y \,\middle|\, \begin{array}{c} Z \text{ ist integres Unterschema von } X \times Y, \\ \text{welches endlich und surjektiv über} \\ \text{einer Komponente von } X \text{ ist.} \end{array} \right\}\right].$$

Die Elemente von $Cor(X,Y)$ heißen endliche Korrespondenzen von X nach Y. Man kann sich leicht überlegen, dass man mit Hilfe des Schnittproduktes eine Kategorie $SmCor(k)$ erhält, deren Objekte die gleichen sind wie in der Kategorie Sm/k und deren Morphismen gerade endliche Korrespondenzen sind. Der Graph einer gewöhnlichen Abbildung zwischen Schemata liefert einen Funktor

$$\begin{array}{rccc} [\_] : & Sm/k & \longrightarrow & SmCor(k) \\ & X & \longmapsto & [X]. \end{array}$$

Mit

$$[X] \oplus [Y] = [X \amalg Y]$$

wird $SmCor(k)$ zu einer additiven Kategorie.

Eine Prägarbe mit Transfer auf Sm/k ist nun ein kontravarianter additiver Funktor $F : SmCor(k) \to Ab$. Eine Garbe mit Transfer bzgl. einer Topologie auf Sm/k ist eine Prägarbe mit Transfer, deren Einschränkung auf die Kategorie Sm/k eine Garbe bzgl. der gewählten Topologie ist. Die Kategorie der Prägarben mit Transfer auf Sm/k bezeichnen wir mit $PreShv(SmCor(k))$ und die Kategorie der Garben mit Transfer bzgl. einer Topologie $\mathcal{T}$ auf Sm/k mit $Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k))$. Allgemeiner kann man auch Prägarben und Garben mit Transfer in einer beliebigen additiven Kategorie $\mathcal{A}$ betrachten. Die entsprechenden Kategorien bezeichnen wir mit $PreShv^{\mathcal{A}}(SmCor(k))$ bzw. $Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{A}}(SmCor(k))$. Man überlegt sich außerdem, dass, wenn man in der Nisnevich oder der etalen Topologie arbeitet, beim Garbifizieren Transfer erhalten bleibt. Daraus folgt, dass $Shv_{Nis}(SmCor(k))$ und $Shv_{et}(SmCor(k))$ abelsche Kategorien sind. Für ein $X \in Sm/k$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}_{tr}(X)$ die Prägarbe mit Transfer, die durch $[X]$ dargestellt wird. Man überlegt sich leicht, dass $\mathbb{Z}_{tr}(X)$ eine Garbe in der Nisnevich und sogar in der etalen Topologie ist. Wir erhalten dadurch einen kovarianten Funktor

$$\mathbb{Z}_{tr} : Sm/k \longrightarrow Shv_{Nis}(SmCor(k)).$$

Wir wollen nun alles mit einer Gruppenoperation versehen. Dazu betrachten wir also eine diskrete Gruppe G. Eine G-Prägarbe mit Transfer auf Sm/k ist ein G-Objekt in $PreShv(SmCor(k))$. Eine G-Garbe mit Transfer auf Sm/k ist dementsprechend ein G-Objekt in $Shv_{Nis}(SmCor(k))$. Wir bezeichnen die Kategorie der G-Prägarben bzw. G-Garben mit Transfer auf Sm/k mit ${}^{G}PreShv(SmCor(k))$ bzw. ${}^{G}Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k))$. Offenbar gilt

$${}^{G}PreShv(SmCor(k)) = PreShv^{\mathbb{Z}[G]-Mod}(SmCor(k))$$

und

$${}^{G}Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k)) = Shv_{\mathcal{T}}^{\mathbb{Z}[G]-Mod}(SmCor(k)).$$

Daher ist klar, dass auch ${}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ und ${}^G Shv_{et}(SmCor(k))$ abelsche Kategorien sind.

Es sei ${}^G Sm/k$ die Kategorie der G-Objekte in Sm/k. Ist $X \in {}^G Sm/k$, so ist $[X]$ ein G-Objekt in $SmCor(k)$ und somit $\mathbb{Z}_{tr}(X) \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$. Zur besseren Unterscheidung wollen wir dieses mit ${}^G\mathbb{Z}_{tr}(X)$ bezeichnen. Dies liefert einen kovarianten Funktor

$$ {}^G\mathbb{Z}_{tr} : {}^G Sm/k \longrightarrow {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)). $$

Wir wollen nun genau wie in 2.1 den Funktor

$$ \mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, \_) : {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)) \longrightarrow Ab $$

für ein $A \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ faktorisieren. Dazu betrachten wir zunächst für ein $A \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ den Funktor

$$ \mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, \_) : {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)) \longrightarrow \mathbb{Z}[G] - Mod, $$

wobei die G-Struktur für ein $B \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$, ein $f \in \mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B)$ und ein $g \in G$ durch

$$ (g \cdot f)(a) := gf(g^{-1}a) $$

gegeben ist. Offensichtlich gilt damit die Faktorisierung

$$ \mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, \_) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]-Mod}(\mathbb{Z}, \_) \circ \mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, \_). $$

Die folgende Proposition beweist man wie Proposition 2.1.6.

Proposition 3.1.1. *Für ein $X \in {}^G Sm/k$ überführt der Funktor*

$$ \mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^G\mathbb{Z}_{tr}(X), \_) $$

K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe.

Um die Ergebnisse aus Kapitel 1 anwenden zu können, beweisen wir folgendes

Lemma 3.1.2. *Die Kategorie ${}^G Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k))$ besitzt für $\mathcal{T} = Nis$, $\mathcal{T} = Zar$ und $\mathcal{T} = et$ einen Generator.*

Beweis:
Die Klasse von Isomorphieklassen von Schemata in Sm/k ist eine Menge. Es sei $[Sm/k]$ ein Vertretersystem. Dann ist das Objekt

$$ \bigoplus_{X \in [Sm/k]} \mathbb{Z}_{tr}(X) \otimes \mathbb{Z}[G] \in {}^G Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k)) $$

ein Generator in ${}^G Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k))$. Dies folgt daraus, dass

$$\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k))}(\mathbb{Z}_{tr}(X) \otimes \mathbb{Z}[G], F) = F(X)$$

für alle $F \in {}^G Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k))$ gilt. $\square$

Wegen 1.4.4 erhalten wir also auch auf deriviertem Niveau die Faktorisierung

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \_) \circ \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^G\mathbb{Z}_{tr}(X), \_) \\ = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^G\mathbb{Z}_{tr}(Z), \_).\end{aligned}$$

Wir bezeichnen für eine Topologie $\mathcal{T}$ mit $Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{A}}(Sm/k)$ die Kategorie der Garben auf Sm/k mit Werten in $\mathcal{A}$ bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$. Entsprechend sei ${}^G Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{A}}(Sm/k)$ wieder die Kategorie der G-Objekte. Es gilt wieder

$${}^G Shv_{\mathcal{T}}^{\mathcal{A}}(Sm/k) = Shv_{\mathcal{T}}^{{}^G\mathcal{A}}(Sm/k).$$

Für ein $X \in {}^G Sm/k$ sei ${}^G\mathbb{Z}(X) \in Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k)$ der freie erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul von der von X dargestellten Garbe.

Man hat die exakten Funktoren

$$Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k)) \longrightarrow Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k)$$
$${}^G Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k)) \longrightarrow {}^G Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k)$$

und die beiden exakten Vergissfunktoren

$$\mathrm{Ver} : {}^G Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k) \longrightarrow Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k)$$
$$\mathrm{Ver} : {}^G Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k)) \longrightarrow Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k)).$$

Folgende Proposition werden dir häufig anwenden, um Resultate auf den äquivarianten Fall zu übertragen.

Proposition 3.1.3. *Es seien $A^\bullet, B^\bullet \in \mathcal{D}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ und $f : A^\bullet \to B^\bullet$ ein Morphismus in $\mathcal{D}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus in $\mathcal{D}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$, wenn der Morphismus $\mathrm{Ver}(f) : \mathrm{Ver}(A^\bullet) \to \mathrm{Ver}(B^\bullet)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ ist. Insbesondere ist $A^\bullet \in \mathcal{D}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ genau dann azyklisch, wenn $\mathrm{Ver}(A^\bullet) \in \mathcal{D}(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ azyklisch ist.*

Beweis:
Der Morphismus f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn der Kegel $C(f) = 0$ in $\mathcal{D}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ ist, das heißt $C(f)$ ist ein exakter Komplex. Es gilt $\mathrm{Ver}(C(f)) \cong C(\mathrm{Ver}(f))$ und $C(f)$ ist offenbar genau dann exakt, wenn $\mathrm{Ver}(C(f))$ exakt ist. Außerdem ist $\mathrm{Ver}(f)$ genau dann ein Isomorphismus in $\mathcal{D}(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$, wenn $C(\mathrm{Ver}(F)) = 0$ in $\mathcal{D}(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ ist. $\square$

Um gleich die Rechtsableitungen bestimmter Funktoren faktorisieren zu können, benötigen wir folgende Lemmata.

Lemma 3.1.4. *Der induzierte Funktor*

$$\mathrm{Ver} : \mathcal{K}({}^{G}Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k)) \longrightarrow \mathcal{K}(Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k))$$

überführt K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe.

Beweis:
Ver ist rechtsadjungiert zum Funktor

$$\_ \otimes \mathbb{Z}[G] : Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k) \longrightarrow {}^{G}Shv_{\mathcal{T}}(Sm/k),$$

welcher exakt ist. Daher folgt die Behauptung aus Lemma 1.4.5 □

Ebenso zeigt man

Lemma 3.1.5. *Der induzierte Funktor*

$$\mathrm{Ver} : \mathcal{K}({}^{G}Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k))) \longrightarrow \mathcal{K}(Shv_{\mathcal{T}}(SmCor(k)))$$

überführt K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe. □

Wir wollen nun äquivariante Nisnevich-Kohomologie mit Werten in einem Komplex von G-Garben mit Tranfer mit Hom-Gruppen in $\mathcal{D}({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ identifizieren.

Satz 3.1.6. *Es sei $X \in {}^{G}Sm/k$ und $A^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k)))$. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k)))}({}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X), A^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}({}^{G}Shv_{Nis}(Sm/k))}({}^{G}\mathbb{Z}(X), A^\bullet).$$

Beweis:
Mit 1.4.1(ii) können wir beide Seiten mit Hilfe von abgeleiteten Funktoren interpretieren. Es gilt nämlich nach 1.4.1(ii)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k)))}({}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X), A^\bullet) = h^0(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X), \_)(A^\bullet))$$

und

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}({}^{G}Shv_{Nis}(Sm/k))}({}^{G}\mathbb{Z}(X), A^\bullet) = h^0(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^{G}Shv_{Nis}(Sm/k)}({}^{G}\mathbb{Z}(X), \_)(A^\bullet)).$$

Die beiden rechtsabgeleiteten Funktoren auf den rechten Seiten haben wir bereits über $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]-Mod}(\mathbb{Z}, \_)$ faktorisiert und wir erhalten daher folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^-({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k))) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathcal{D}(\mathbb{Z}[G]-Mod) \arrow[r] & \mathcal{D}(Ab) \\
\mathcal{D}({}^{G}Shv_{Nis}(Sm/k)). \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Nach der universellen Eigenschaft von $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(Sm/k)}({}^G\mathbb{Z}(X), \_)$ gibt es einen natürlichen Morphismus

$$\phi : \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(Sm/k)}({}^G\mathbb{Z}(X), \_) \longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^G\mathbb{Z}_{tr}(X), \_),$$

und wir beweisen, dass dies ein Quasiisomorphismus ist. Dazu benötigen wir zunächst folgendes

Lemma 3.1.7. *Sei* $A^\bullet, B^\bullet \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}[G] - Mod)$ *und* $f : A^\bullet \to B^\bullet$ *ein Morphismus in* $\mathcal{D}(\mathbb{Z}[G] - Mod)$. *Ferner sei* $\mathrm{Ver} : \mathcal{D}(\mathbb{Z}[G] - Mod) \to \mathcal{D}(Ab)$ *der Funktor, der die* G*-Struktur vergisst. Dann ist* f *genau dann ein Isomorphismus, wenn* $\mathrm{Ver}(f)$ *ein Isomorphismus in* $\mathcal{D}(Ab)$ *ist.*

Beweis: Wird genauso wie Proposition 3.1.3 bewiesen. □

Nach diesem Lemma reicht es also zu zeigen, dass obiger Morphismus nach Anwendung von Ver ein Quasiisomorphismus ist. Dazu betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))) \arrow[r, "\mathrm{Ver}"] \arrow[d, "\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^G\mathbb{Z}_{tr}(X), _)"'] & \mathcal{D}^-(Shv_{Nis}(SmCor(k))) \arrow[d, "\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(\mathbb{Z}_{tr}(X), _)"'] \\
\mathcal{D}(\mathbb{Z}[G] - Mod) \arrow[r, "\mathrm{Ver}"] & \mathcal{D}(Ab) \\
\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(Sm/k)) \arrow[r, "\mathrm{Ver}"] \arrow[u, "\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(Sm/k)}({}^G\mathbb{Z}(X), _)"] & \mathcal{D}^-(Shv_{Nis}(Sm/k)). \arrow[u, "\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(Sm/k)}(\mathbb{Z}(X), _)"']
\end{tikzcd}$$

Nach Lemma 3.1.4 und 3.1.5 ist dieses Diagramm kommutativ. Nach Konstruktion stimmt $\mathrm{Ver}(\phi)$ mit dem nicht-äquivarianten natürlichen Morphismus

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(Sm/k)}(\mathbb{Z}(X), \mathrm{Ver}(A^\bullet)) \longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(\mathbb{Z}_{tr}(X), \mathrm{Ver}(A^\bullet)),$$

der nach der universellen Eigenschaft von $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(Sm/k)}(\mathbb{Z}(X), \_)$ existiert, überein. Dieser ist aber nach [Voe00, 3.1.9] ein Isomorphismus. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. □

Wir kommen nun zu homotopieinvarianten G-Prägarben und G-Garben mit Transfer.

Definition 3.1.8. Eine G-Prägarbe F mit Transfer heißt *homotopieinvariant*, wenn für alle $X \in Sm/k$ die Projektion $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ einen Isomorphismus $F(X) \to F(X \times \mathbb{A}^1)$ induziert. Eine G-Garbe mit Transfer heißt homtopieinvariant, wenn sie als G-Prägarbe mit Transfer *homotopieinvariant* ist.

Bemerkung 3.1.9. Auf Grund von Lemma 3.1.7 ist eine G-Prägarbe F mit Transfer genau dann homotopieinvariant, wenn $\mathrm{Ver}(F)$ homotopieinvariant ist.

Ist nun F eine G-Prägarbe mit Transfer, dann ist nach Konstruktion $\mathrm{Ver}(F^{\sim}) = \mathrm{Ver}(F)^{\sim}$. Außerdem ist nach [Voe00, 3.1.12] die Garbifizierung einer homotopieinvarianten Prägarbe mit Transfer wieder homotopieinvariant. Wegen obiger Bemerkung gilt daher das gleiche für die äquivariante Situation. Hieraus folgt

Proposition 3.1.10. *Es sei $HI(k) \subset {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ die volle Unterkategorie der homotopieinvarianten G-Garben mit Transfer. Diese Kategorie ist abelsch und die Inklusion ist exakt.*

Wir definieren nun eine triangulierte Kategorie von effektiven äquivarianten Motiven. Es sei

$$ {}^G DM^{eff}(k) \subset \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))) $$

die volle Unterkategorie der Komplexe, die homotopieinvariante Kohomologie haben.

Korollar 3.1.11. *${}^G DM^{eff}(k) \subset \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ ist eine triangulierte Unterkategorie.*

Beweis:
Dies folgt aus Proposition 3.1.10. □

Wir wollen als nächstes einen Funktor von ${}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ nach ${}^G DM^{eff}(k)$ definieren. Dabei gehen wir analog zur äquivarianten Situation vor. Wir betrachten das kosimpliziale Objekt $\Delta^\bullet$ in Sm/k und für eine G-Prägarbe F und ein $U \in Sm/k$ sei $C_n(F)(U) = F(U \times \Delta^n)$. So wird $C_*(F)$ zu einer simplizialen Prägarbe mit Transfer. Den assoziierten Kettenkomplex bezeichnen wir wieder mit $C_*(F)$ und definieren $C^*(F)$ durch $C^i(F) := C_{-i}(F)$, weil wir alles kohomologisch schreiben wollen. Da offenbar für ein $F \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ die Gleichheiten $C^*(\mathrm{Ver}(F)) = \mathrm{Ver}(C^*(F))$ und $h^i(\mathrm{Ver}(C^*(F))) = \mathrm{Ver}(h^i(C^*(F)))$ gelten, folgt aus den nicht-äquivarianten Ergebnissen, dass

$$ C^*(F) \in {}^G DM^{eff}(k) $$

gilt.

Hiermit können wir nun unseren Motivefunktor

$$ \begin{array}{rccc} {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}: & {}^G Sm/k & \longrightarrow & {}^G DM^{eff}(k) \\ & X & \longmapsto & C^*({}^G\mathbb{Z}_{tr}(X)) \end{array} $$

definieren.

Um den Funktor

$$ C^* : {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)) \longrightarrow {}^G DM^{eff}(k) $$

auf Komplexe fortzusetzen, zeigt man wie in der äquivarianten Situation folgendes

Lemma 3.1.12. *Für einen Komplex $A^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ ist der Totalkomplex $Tot(C^*(A^\bullet)) \in {}^G DM^{eff}(k)$.* □

Also setzt sich C^* zu einem Funktor

$$C^* : \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))) \longrightarrow {}^G DM^{eff}(k)$$

fort. Um C^* nun über $\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ zu faktorisieren, zeigen wir folgende

Proposition 3.1.13. *Ist $A^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ und hat homotopieinvariante Kohomologie, dann ist die natürliche Einbettung $A^\bullet \to C^*(A^\bullet)$ ein Quasiisomorphismus.*

Beweis:
Folgt zusammen mit Proposition 3.1.3 sofort aus dem entsprechenden nicht-äquivarianten Resultat. □
Damit setzt sich C^* zu einem Funktor

$$C^* : \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))) \longrightarrow {}^G DM^{eff}(k)$$

fort.

Wir benötigen folgende Definition aus [SV00].

Definition 3.1.14. Eine G-Prägarbe $\mathcal{F}$ mit Transfer heißt *zusammenziehbar*, wenn es einen Homomorphismus von G-Garben mit Transfer $\Phi : \mathcal{F} \to C^{-1}(\mathcal{F})$ gibt, so dass $\partial_0 \Phi = 0$ und $\partial_1 \Phi = Id_{\mathcal{F}}$ ist.

Für eine G-Prägarbe $\mathcal{F}$ mit Transfer bezeichnen wir mit $C_0^*(\mathcal{F})$ die konstante simpliziale G-Prägarbe mit Transfer bzw. den assozierten Kettenkomplex. Für Komplexe verwenden wir analoge Notationen. Aus den nicht-äquivarianten Ergebnissen folgt wieder mit Proposition 3.1.3, dass die natürliche Abbildung $A^\bullet \to C_0^*(A^\bullet)$ ein Quasiisomorphismus ist. Ebenso folgt aus der nicht-äquivarianten Situation, dass der Kokern des Monomorphismus $C_0^*(A^\bullet) \to C^*(A^\bullet)$ aus zusammenziehbaren G-Garben mit Transfer besteht.

Wir benötigen folgendes

Lemma 3.1.15.

(i) Sei $A^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ mit zusammenziehbaren Komponenten. Dann ist $C^*(A^\bullet)$ azyklisch.

(ii) Seien $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$, $B^\bullet$ habe homotopieinvariante Kohomologie und für alle $i \in \mathbb{Z}$ sei A^i zusammenziehbar. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))}(A^\bullet, B^\bullet) = 0.$$

Beweis:
(i) Folgt wiederum mit Proposition 3.1.3 aus [SV00, 1.11].

(ii) Beweist man mit Hilfe von (i) genauso wie in der nichtäquivarianten Situation, die in [SV00, 1.11.1] zu finden ist. □

Wir kommen nun zu einem Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz 3.1.16. *Der Funktor*

$$C^* : \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))) \longrightarrow {}^G DM^{eff}(k)$$

ist linksadjungiert zur kanonischen Inklusion

$${}^G DM^{eff}(k) \longrightarrow \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$$

und ist essentiell surjektiv. Daher können wir nun ${}^G DM^{eff}(k)$ als Lokalisierung von $\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ nach der dicken Unterkategorie aller derjenigen Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ mit $C^*(A^\bullet) = 0$ in $\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ auffassen.

Beweis:
Für Komplexe $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$, wobei $A^\bullet$ homotopieinvariante Kohomologie hat, zeigen wir, dass der kanonische Morphismus $B^\bullet \to C^*(B^\bullet)$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))}(C^*(B^\bullet), A^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))}(B^\bullet, A^\bullet)$$

induziert. Dazu faktorisiert man $B^\bullet \to C^*(B^\bullet)$ in $B^\bullet \to C_0^*(B^\bullet)$ und $C_0^*(B^\bullet) \to C^*(B^\bullet)$. Ersterer ist ein Quasiisomorphismus und letzterer auf Grund von Lemma 3.1.15 ein Monomorphismus mit zusammenziehbaren Kokernkomponenten (vgl. [SV00, S. 131]). Mit Lemma 3.1.15 folgt dann der erste Teil der Behauptung. Für $A^\bullet \in {}^G DM^{eff}(k)$ ist $A^\bullet \to C^*(A^\bullet)$ nach Proposition 3.1.13 ein Quasiisomorphismus. Daher folgt, dass C^* essentiell surjektiv ist. □

Man überlegt sich wie in Abschnitt 2.1, dass der Vergissfunktor für ein $X \in {}^G Sm/k$ und $A^\bullet \in \mathcal{D}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ einen natürlichen Morphismus

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^G\mathrm{M}(X), A^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(M(\mathrm{Ver}(X)), \mathrm{Ver}(A^\bullet))$$

induziert.

Satz 3.1.17. *Für ein $X \in {}^G Sm/k$, $A^\bullet \in {}^G DM^{eff}(k)$ und mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2 gibt es einen für alle $i \in \mathbb{Z}$ natürlichen Isomorphismus*

$$H^i(G, X; A^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^G\mathrm{M}(X), A^\bullet[i]).$$

Außerdem kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^i(G,X;A^\bullet) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), A^\bullet[i]) \arrow[d] \\ H^i(\mathrm{Ver}(X), \mathrm{Ver}(A^\bullet)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{DM(k)}(\mathrm{Ver}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)), \mathrm{Ver}(A^\bullet)[i]). \end{tikzcd}$$

Beweis:
Nach Satz 3.1.16 gilt für alle $i \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), A^\bullet[i]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k)))}({}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X), A^\bullet[i])$$

und nach Satz 3.1.6 gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k)))}({}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X), A^\bullet[i]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^-({}^{G}Shv_{Nis}(Sm/k))}({}^{G}\mathbb{Z}(X), A^\bullet[i]) \\ &= H^i(G,X;A^\bullet). \end{aligned}$$

Die Kommutativität des Diagramms ist nach Konstruktion klar. □

3.2 Tensorprodukt in ${}^{G}DM^{eff}(k)$

Analog zu [SV00] definieren wir zunächst ein Tensorprodukt in $\mathrm{Kom}^-({}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ mit dem Ziel, dass für zwei G-Schemata $X, Y \in {}^{G}Sm/k$

$$ {}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X) \otimes {}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(Y) = {}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X \times Y) \tag{3.1}$$

gilt. Direkte Summen von G-Garben von der Form ${}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X)$ mit $X \in {}^{G}Sm/k$ nennen wir freie G-Garben mit Transfer. Für freie G-Garben mit Transfer können wir mit 3.1 das Tensorprodukt definieren. Mit den üblichen Konstruktionen (Totalkomplex, Doppelkomplex, ect.) können wir dann auch das Tensorprodukt für nach oben beschränkte Komplexe freier G-Garben mit Transfer definieren.

Für ein $\mathcal{F} \in {}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k))$ gilt für alle $X \in Sm/k$

$$\mathcal{F}(X) = \mathrm{Hom}_{{}^{G}Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X \times G), \mathcal{F}).$$

Dabei erhält $X \times G$ über die zweite Komponente seine G-Struktur. Daher ist der kanonische Morphismus

$$\bigoplus_{X \in Sm/k} {}^{G}\mathbb{Z}_{tr}(X \times G) \otimes \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}$$

surjektiv und wir erhalten induktiv eine kanonische Auflösung $\chi^\bullet(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$, die nur freie G-Garben mit Transfer enthält. Auf die gleiche Weise erhalten wir dann dadurch für alle $A^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ eine Auflösung $\chi^\bullet(A^\bullet) \to A^\bullet$ durch freie G-Garben mit Transfer. Mit 3.1 erhalten wir also für $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ durch die Formel

$$A^\bullet \otimes^L B^\bullet := \chi^\bullet(A^\bullet) \otimes \chi^\bullet(B^\bullet)$$

ein Tensorpodukt.

Wegen $\mathrm{Ver}({}^G\mathbb{Z}_{tr}(X)) = \mathbb{Z}_{tr}(\mathrm{Ver}(X))$ und Lemma 3.1.3 folgen die beiden nächsten Lemmata sofort aus den nicht-äquivarianten Resultaten.

Lemma 3.2.1. *Es seien $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ Komplexe von freien Nisnevich-G-Garben mit Transfer. Ist dann $A^\bullet$ oder $B^\bullet$ azyklisch, so ist auch $A^\bullet \otimes B^\bullet$ azyklisch.*

Beweis: Siehe Corollar 2.4 in [SV00].

Lemma 3.2.2. *Es seien $A_1^\bullet, A_2^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Kom}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ Komplexe von freien Nisnevich-G-Garben mit Transfer und $A_1^\bullet \to A_2^\bullet$ ein Quasiisomorphismus. Dann ist auch der induzierte Morphismus $A_1^\bullet \otimes B^\bullet \to A_2^\bullet \otimes B^\bullet$ ein Quasiisomorphismus.*

Beweis: Siehe Corollar 2.5 in [SV00].

Lemma 3.2.1 zeigt, dass unser Tensorprodukt über $\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ faktorisiert. Aus Lemma 3.2.2 folgt, dass ${}^G\mathbb{Z}_{tr}(X) \otimes^L {}^G\mathbb{Z}_{tr}(Y) = {}^G\mathbb{Z}_{tr}(X \times Y)$ für G-Schemata $X, Y \in {}^G Sm/k$ gilt, und man zeigt, dass $\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ so mit $\otimes^L$ zu einer triangulierten Tensorkategorie wird.

Außerdem gilt die folgende

Proposition 3.2.3. *Es seien $A^\bullet, B^\bullet \in \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$. Dann gilt*

$$\mathrm{Ver}(A^\bullet \otimes^L B^\bullet) = \mathrm{Ver}(A^\bullet) \otimes^L \mathrm{Ver}(B^\bullet).$$

Dabei ist $\otimes^L$ auf der rechten Seite die nicht-äquivariante Version des Tensorproduktes.

Beweis:
Dies folgt aus der nicht-äquivarianten Version von Lemma 3.2.1, weil der Funktor Ver freie G-Garben mit Transfer in freie Garben mit Transfer überführt. □

Um nun ein Tensorprodukt auf ${}^G DM^{eff}(k)$ zu erhalten, schreiben wir nach Satz 3.1.16

$${}^G DM^{eff}(k) = \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))/\mathcal{A},$$

wobei $\mathcal{A}$ die volle Unterkategorie derjenigen Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ mit $C^*(A^\bullet) = 0$ in $\mathcal{D}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ ist. Um zu zeigen, dass $\otimes^L$ auf ${}^G DM^{eff}(k)$ ein Tensorprodukt definiert, reicht es folgendes zu zeigen.

Lemma 3.2.4. *Es seien* $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Kom}^-({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ *und* $A^\bullet \in \mathcal{A}$. *Dann ist auch* $A^\bullet \otimes^L B^\bullet \in \mathcal{A}$.

Proof. Dies folgt aus dem nicht-äquivarianten Resultat und den Propositionen 3.2.3 und 3.1.3. □

Somit ist auf ${}^G DM^{eff}(k)$ eine Tensorproduktstruktur definiert und wird zu einer triangulierten Tensorkategorie. Der Funktor

$$\mathrm{Ver} : {}^G DM^{eff}(k) \longrightarrow DM^{eff}(k)$$

ist außerdem verträglich mit den Tensorproduktstrukturen.

Andererseits induziert der Funktor

$$triv : Shv_{Nis}(SmCor(k)) \longrightarrow {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)),$$

der jeder Garbe mit Transfer mit der trivialen G-Operation versieht, einen Funktor

$$triv : DM^{eff}(k) \longrightarrow {}^G DM^{eff}(k).$$

Offenbar gilt $Ver \circ triv = id_{DM^{eff}(k)}$.

3.3 Tate Objekte und erste Eigenschaften

Wir wollen nun Tate-Objekte $\mathbb{Z}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ definieren. $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}(0) := {}^G\mathrm{M}(Spec(k))$ ist das Einsobjekt bzgl. des Tensorproduktes in ${}^G DM^{eff}(k)$. $\mathbb{Z}(1)$ sei der Komplex in ${}^G DM^{eff}(k)$, der nur im Grad 1 das Objekt $\mathcal{O}^*$ mit trivialer G-Operation hat und sonst null ist. Da $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = \Gamma(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1}^*)$ ist, ist $\mathbb{Z}(1)$ in der Tat in ${}^G DM^{eff}(k)$. Wir definieren $\mathbb{Z}(n) := \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$ und für ein Objekt $M \in {}^G DM^{eff}(k)$ sei $M(n) := M \otimes \mathbb{Z}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da der Funktor

$$\mathrm{Ver} : {}^G DM^{eff}(k) \longrightarrow DM^{eff}(k)$$

mit dem Tensorprodukt verträglich ist und offenbar $\mathrm{Ver}(\mathbb{Z}(1)) = \mathbb{Z}(1)$ gilt, folgen für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X \in {}^G Sm/k$ die Gleichheiten $\mathrm{Ver}(\mathbb{Z}(n)) = \mathbb{Z}(n)$ und

$$\mathrm{Ver}({}^G\mathrm{M}(X)(n)) = M(\mathrm{Ver}(X))(n).$$

Als Korollar des äquivarianten Hilbert 90 aus Abschnitt 2.2 folgt nun

Proposition 3.3.1. *Es sei* $X \in {}^G Sm/k$. *Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^G\mathrm{M}(X), \mathbb{Z}(1)[2]) \xrightarrow{\sim} Pic^G(X).$$

Außerdem ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Z), \mathbb{Z}(1)[2]) \arrow[r] \arrow[d] & Pic^G(X) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(\mathrm{Ver}(X)), \mathbb{Z}(1)[2]) \arrow[r] & Pic(X)
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis:
Folgt sofort aus 3.1.17 und 2.2.5. □

Es sei nun $\mathcal{E}$ eine lokal freie G-Garbe auf einem G-Schema $X \in {}^G Sm/k$. Dann ist $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ auch ein G-Schema und der kanonische Morphismus $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ ist äquivariant. Außerdem trägt das kanonische Bündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ auf natürliche Weise eine G-Struktur (vgl. z.B. [Köc98]).

Satz 3.3.2. *Es sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie G-Garbe auf einem G-Schema $X \in {}^G Sm/k$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X) \oplus {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(1)[2] \oplus \cdots {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(n)[2n].$$

Beweis:
Das kanonische Bündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ definiert nach Proposition 3.3.1 einen Morphismus

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)[2].$$

Für $X, Y \in {}^G Sm/k$ induziert das Tensorprodukt Abbildungen

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), \mathbb{Z}(n)[i]) \otimes \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y), \mathbb{Z}(m)[j]) \\ &\qquad \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X \times Y), \mathbb{Z}(n+m)[i+j])) \end{aligned} \tag{3.2}$$

und mit der Diagonalen $\Delta : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times \mathbb{P}(\mathcal{E})$ erhält man einen Morphismus

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathbb{Z}(1)[2] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(n)[2n],$$

und schließlich mit dem natürlichen Morphismus $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ den Morphismus

$$\phi \ {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X) \oplus {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(1)[2] \oplus \cdots {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(n)[2n].$$

Nach dem kommutativen Diagramm aus Proposition 3.3.1 und der Konstruktion ist $\mathrm{Ver}(\phi)$ gerade der entsprechende nicht-äquivariante Morphismus, welcher nach [Voe00, 3.5.1] ein Isomorphismus ist. Also ist nach Proposition 3.1.3 auch ϕ ein Isomorphismus. □

Bemerkung 3.3.3. Auch wenn dieser Satz zunächst überraschend erscheint, steht er doch im Einklang mit der Zerlegeung der äquivarianten etalen Kohomologie des projektiven Bündels aus [Gro68, §2].

Proposition 3.3.4 (Mayer-Vietoris Sequenz). *Es sei $X \in {}^G Sm/k$ und $U \cup V = X$ eine äquivariante Zariski-Überdeckung. Dann gibt es ein ausgezeichnetes Dreieck*

$$ {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(U \cap V) \to {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(U) \oplus {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(V) \to {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X) \to {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(U \cap V)[1]. $$

Beweis:
Die Sequenz

$$ 0 \to {}^G\mathbb{Z}_{tr}(U \cap V) \to {}^G\mathbb{Z}_{tr}(U) \oplus {}^G\mathbb{Z}_{tr}(V) \to {}^G\mathbb{Z}_{tr}(X) \to 0 $$

ist exakt, weil sie exakt ist, wenn man die G-Struktur vergisst. Die Anwendung von $C^*(\_)$ liefert das gewünschte Ergebnis. □

Proposition 3.3.5 (Homotopieinvarianz). *Es sei $\mathcal{E}$ eine lokal freie G-Garbe auf einem G-Schema $X \in {}^G Sm/k$. Dann ist $Y = \mathcal{S}pecS^*(\mathcal{E}^\#)) \in {}^G Sm/k$ und die kanonische Abbildung $p : Y \to X$ ist äquivariant. Diese induziert einen Isomorphismus*

$$ {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(p) : {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X). $$

Beweis:
Folgt ähnlich wie oben aus dem entsprechenden nicht-äquivarianten Resultat. □

Es seien nun $X, Y \in {}^G Sm/k$ und $Y \hookrightarrow X$ eine äquivariante abgeschlossene Immersion. Dann ist die Aufblasung $B_Y(X)$ von X entlang Y auch ein glattes G-Schema und der kanonische Morphismus $B_Y(X) \to X$ ist äquivariant (vgl.z.B.[Köc98, 1.6]).

Satz 3.3.6 (Ausgezeichnetes Dreieck für Aufblasungen). *Seien $X, Y \in {}^G Sm/k$ und $Y \hookrightarrow X$ eine äquivariante abgeschlossene Immersion und $p : B_Y(X) \to X$ die Aufblasung von X entlang Y. Dann gibt es ein natürliches ausgezeichnetes Dreieck*

$$ {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(p^{-1}(Y)) \to {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y) \oplus {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(B_Y(X)) \to {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X) \to {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(p^{-1}(Y))[1]. $$

Beweis:
Die Sequenz

$$ 0 \to {}^G\mathbb{Z}_{tr}(p^{-1}(Y)) \to {}^G\mathbb{Z}_{tr}(Y) \oplus {}^G\mathbb{Z}_{tr}(B_Y(X)) \to {}^G\mathbb{Z}_{tr}(X) \to 0 $$

ist exakt, weil sie exakt ist, wenn man die G-Struktur vergisst (vgl. [SV00, 4.7]). Die Anwendung von $C^*(\_)$ liefert das gewünschte Ergebnis. □

3.4 Motive von nicht-glatten Schemata und Motive mit kompaktem Träger

Wie in [Voe00] definiert man kovariante Funktoren

$$^G\mathbb{Z}_{tr}(\_) : {}^GSch/k \longrightarrow {}^GShv_{Nis}(SmCor(k))$$

und

$$^G\mathbb{Z}^c_{tr}(\_) : {}^GSch/k^{prop} \longrightarrow {}^GShv_{Nis}(SmCor(k)).$$

Dabei sei ${}^GSch/k^{prop}$ die Kategorie der Schemata von endlichem Typ über k mit eigentlichen Morphismen, und für ein $X \in {}^GSch/k$ und $U \in {}^GSm/k$ sei

$$^G\mathbb{Z}^c_{tr}(X)(U) := \mathbb{Z}\left[\left\{ Z \hookrightarrow X \times U \middle| \begin{array}{c} Z \text{ ist integres Unterschema von } X \times U, \\ \text{welches quasi-endlich und dominant über} \\ \text{einer Komponente von } U \text{ ist.} \end{array} \right\}\right].$$

Zusammen mit dem Funktor

$$C^* : {}^GShv_{Nis}(SmCor(k)) \longrightarrow {}^GDM^{eff}(k)$$

erhält man den Motivefunktor

$$^G\mathrm{M} : {}^GSch/k \longrightarrow {}^GDM^{eff}(k)$$

für alle G-Schemata von endlichem Typ über k und den Motivefunktor mit kompaktem Träger

$$^G\mathrm{M}^c : {}^GSch/k^{prop} \longrightarrow {}^GDM^{eff}(k).$$

Wie in 3.3.4 und mit [Voe00, 4.1.1] beweist man

Proposition 3.4.1 (Mayer-Vietoris Sequenz). *Es sei $X \in {}^GSch/k$ und $U \cup V = X$ eine äquivariante Zariski-Überdeckung. Dann gibt es ein natürliches ausgezeichnetes Dreieck*

$$^G\mathrm{M}(U \cap V) \to {}^G\mathrm{M}(U) \oplus {}^G\mathrm{M}(V) \to {}^G\mathrm{M}(X) \to {}^G\mathrm{M}(U \cap V)[1].$$

□

Für die folgenden Sätze benötigen wir die Auflösung von Singularitäten für den Grundkörper k. Es ist hier aber noch nicht nötig, eine äquivariante Auflösung von Singularitäten zu haben.

Proposition 3.4.2. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, $X \in {}^GSch/k$ und $Z \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes G-äquivariante Unterschema. Dann gibt es ein natürliches ausgezeichnetes Dreieck*

$$^G\mathrm{M}^c(Z) \longrightarrow {}^G\mathrm{M}^c(X) \longrightarrow {}^G\mathrm{M}^c(X - Z) \longrightarrow {}^G\mathrm{M}^c(Z)[1].$$

Beweis:
Die Sequenz

$$0 \longrightarrow {}^G\mathbb{Z}^c_{tr}(Z) \longrightarrow {}^G\mathbb{Z}^c_{tr}(X) \longrightarrow {}^G\mathbb{Z}^c_{tr}(X-Z) \longrightarrow 0$$

ist exakt, weil

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^c_{tr}(Z) \longrightarrow \mathbb{Z}^c_{tr}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}^c_{tr}(X-Z) \longrightarrow 0$$

exakt ist. □

Proposition 3.4.3. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt und $X, Y \in {}^G Sch/k$. Dann gibt es natürliche Isomorphismen*

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X) \otimes {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)$$

und

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X) \otimes {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(Y).$$

Beweis:
Folgt sofort aus dem nicht-äquivarianten Resultat [Voe00, 4.1.7], Proposition 3.1.3 und Proposition 3.2.3. □

Proposition 3.4.4. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, $X \in {}^G Sch/k$ ein G-Schema und $\mathcal{E}$ eine lokal freie G-Garbe auf einem G-Schema $X \in {}^G Sch/k$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X) \oplus {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(1)[2] \oplus \cdots {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(n)[2n].$$

Beweis:
Wie in 3.3.2 mit [Voe00, 4.1.11].

Korollar 3.4.5. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, $X \in {}^G Sch/k$ und $\mathbb{A}^1$ mit beliebiger G-Operation versehen. Dann gilt*

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X \times \mathbb{A}^1) = {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X).$$

Für $\mathbb{A}^1$ mit trivialer G-Operation gilt weiter

$${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X \times \mathbb{A}^1) = {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X)(1)[2].$$

Insbesondere gilt ${}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z}(n)[2n]$, wobei G trivial auf $\mathbb{A}^n$ operiert.

Beweis:
Folgt aus dem nicht-äquivarianten Resultat [Voe00, 4.1.8] oder aus 3.4.2 und 3.4.3. □

Satz 3.4.6. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, $X \in {}^G Sch/k$, $A^\bullet \in {}^G DM^{eff}(k)$ und $(A^\bullet)^\sim_{cdh}$ die Garbifizierung von $A^\bullet$ bezüglich der cdh-Topologie. Dann gibt es für alle $i \in \mathbb{Z}$ einen kanonischen Isomorphismus*

$$H^i_{cdh}(G, X; (A^\bullet)^\sim_{cdh}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^G\mathrm{M}(X), A^\bullet).$$

Insbesondere gibt es für ein $X \in {}^G Sm/k$ und $i \in \mathbb{Z}$ einen natürlichen Isomorphismus

$$H^i_{Nis}(G, X; A^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i_{cdh}(G, X; (A^\bullet)^\sim_{cdh}).$$

Beweis:
Dies wird mit dem nicht-äquivarianten Resultat [Voe00, 4.1.10] wie Satz 3.1.17 bewiesen. □

3.5 Weitere Eigenschaften

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Zusammenhang zwischen der Homologie mit kompaktem Träger in ${}^G DM^{eff}(k)$ und den höheren Chowgruppen von Bloch aus [Blo86] herzustellen. Dafür erinnern wir zunächst an die folgende Garbe mit Transfer

$$z_{equi}(X, r) : SmCor(k) \longrightarrow Ab,$$

die für ein $U \in Sm/k$ durch

$$z_{equi}(X,r)(U) := \mathbb{Z}\left[\left\{ Z \hookrightarrow X \times U \,\middle|\, \begin{array}{c} Z \text{ ist integres Unterschema von } X \times U, \\ \text{welches äquidimensional von relativer} \\ \text{Dimension r über } U \text{ ist.} \end{array} \right\}\right].$$

Ist $X \in {}^G Sch/k$, so ist $z_{equi}(X,r) \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ und $z_{equi}(X, 0) = {}^G\mathbb{Z}^c_{tr}(X)$. Diese Garben mit Transfer sind kovariant bezüglich eigentlicher Morphismen und kontravariant mit Dimensionsschift bezüglich flacher äquidimensionaler Morphismen. Zusätzlich betrachten wir für ein $V \in {}^G Sm/k$ und $X \in {}^G Sch/k$ die G-Garbe mit Transfer

$$z_{equi}(V, X, r) = z_{equi}(X, r)(V \times \_).$$

Für ein $U \in Sm/k$ ist $z_{equi}(V, X, r)(U) = \mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}({}^G\mathbb{Z}_{tr}(V \times U), z_{equi}(X, r))$, und durch $(gf)(s) = gf(g^{-1}s)$ für $g \in G$, $f \in z_{equi}(V, X, r)(U)$ und einen Schnitt s von ${}^G\mathbb{Z}_{tr}(V \times U)$ ist die G-Struktur definiert. Dabei ist $V \times U$ über die Operation auf dem ersten Faktor ein G-Schema. Entsprechendes gilt analog für $U \in {}^G Sm/k$. Die Folgerungen aus der bivarianten Zykel Theorie [FV00] von Friedlander und Voevodsky fassen wir in dem folgenden Satz zusammen. Dabei drücken wir gleich alles in Termen von ${}^G DM^{eff}(k)$ aus.

Satz 3.5.1. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, $X, Y \in {}^{G}Sch/k$, $i \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$.*

(i) Es sei $U \in {}^{G}Sm/k$ und äquidimensional von Dimension n. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y \times U)[i], C^*(z_{equi}(X, r)))\\ &\qquad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(U \times X, r+n))).\end{aligned} \tag{3.3}$$

(ii) Die Projektion $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ induziert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r)))\\ &\qquad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X \times \mathbb{A}^1, r+1))).\end{aligned} \tag{3.4}$$

(iii) Es seien $p : X \times \mathbb{P}^1 \to X$ und $i : X \to X \times \mathbb{P}^1$ die Projektion und die Einbettung. Dann induziert der Morphismus

$$i_* \oplus p^* : z_{equi}(X, r+1) \oplus z_{equi}(X, r) \to z_{equi}(X \times \mathbb{P}^1, r+1)$$

einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r+1)))\oplus\\ &\qquad \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r)))\\ &\qquad\quad \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X \times \mathbb{P}^1, r+1))).\end{aligned}$$

(iv) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y \times \mathbb{P}^1)[i], C^*(z_{equi}(X, r))) \xrightarrow{\sim}\\ &\qquad \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r)))\oplus\\ &\qquad\quad \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r+1))).\end{aligned}$$

Dabei wird die Projektion

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y \times \mathbb{P}^1)[i], C^*(z_{equi}(X, r))) \to\\ &\qquad \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r)))\end{aligned}$$

durch die Einbettung $Y \to Y \times \mathbb{P}^1$ und die Einbettung

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r))) \to\\ &\qquad \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y \times \mathbb{P}^1)[i], C^*(z_{equi}(X, r)))\end{aligned}$$

durch die Projektion $Y \times \mathbb{P}^1 \to Y$ induziert.

Beweis:
Wir zeigen, wie (i) aus den nicht-äquivarianten Resultat folgt. Die Behauptungen (ii) und (iii) zeigt man mit den gleichen Methoden und (iv) folgt aus (i) und (iii).

Nach 3.4.6 gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y\times U)[i], C^*(z_{equi}(X,r)))\\ = h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{cdh}(\mathrm{Sm}/k)}({}^G\mathbb{Z}(Y\times U), (C^*(z_{equi}(X,r)))^{\sim}_{cdh})),\end{aligned}$$

und es gibt es einen kanonischen Morphismus

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{cdh}(\mathrm{Sm}/k)}({}^G\mathbb{Z}(Y), (C^*(z_{equi}(U,X,r)))^{\sim}_{cdh})\\ \longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{cdh}(\mathrm{Sm}/k)}({}^G\mathbb{Z}(Y\times U), (C^*(z_{equi}(X,r)))^{\sim}_{cdh}).\end{aligned}$$

Aus den nicht-äquivarianten Ergebnissen (vgl.[FV00, 8.2]) folgt, dass dieser ein Isomorphismus ist. Ebenso folgt aus den nicht-äquivarianten Ergebnissen, dass der kanonische Morphismus

$$(C^*(z_{equi}(U,X,r)))^{\sim}_{cdh} \xrightarrow{\sim} (C^*(z_{equi}(U\times X, r+n)))^{\sim}_{cdh}$$

ein Quasiisomorphismus ist. Daher folgt die Behauptung (i). □

Mit diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu wichtigen Korollaren.

Korollar 3.5.2. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, $X, Y \in {}^G Sm/k$ eigentlich und X außerdem noch von reiner Dimension n. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)) = H^0(G, z_{equi}(X\times Y, n)(\Delta^\bullet)).$$

Beweis:
Weil Y eigentlich ist, gilt

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)) = \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), C^*(z_{equi}(Y,0))).$$

Dann folgt mit Satz 3.5.1 (i)

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)) = \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}, C^*(z_{equi}(X\times Y, n)))$$

und mit Satz 3.1.17 somit die Behauptung. □

Proposition 3.5.3. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt und $X, Y \in {}^G Sch/k$. Dann gibt es für alle $r \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{Z}$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)(r)[2r{+}i], {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X,r)))$$

Beweis:
Der Beweis wird wie im nicht-äquivarianten Fall (vgl. [Voe00, 4.2.3]) per Induktion nach r geführt. Für $r = 0$ ist die Aussage nach Definition klar. Nun ist ${}^{G}\mathrm{M}(Y)(r)[2r]$ der Kern des Projektors auf ${}^{G}\mathrm{M}(Y \times \mathbb{P}^1)(r-1)[2r-2]$, der durch die Morphismen $\mathbb{P}^1 \to Spec(k) \to \mathbb{P}^1$ induziert wird. Nach Induktion gilt

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{G}\mathrm{M}(Y \times \mathbb{P}^1)(r-1)[2r-2+i], {}^{G}\mathrm{M}^c(X)) \xrightarrow{\sim} \\ &\qquad\qquad \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{G}\mathrm{M}(Y \times \mathbb{P}^1)[i], C^*(z_{equi}(X, r-1))).\end{aligned}$$

Dann identifiziert sich mit 3.5.1 (iv)

$$\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{G}\mathrm{M}(Y)(r)[2r+i], {}^{G}\mathrm{M}^c(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{{}^{G}Sm/k}({}^{G}\mathrm{M}(Y)[i], C^*(z_{equi}(X, r))).$$

□

Wir wollen nun den Zusammenhang zu Blochs höheren Chowgruppen aus [Blo86] herstellen. Dies geschieht analog zu [Voe00, 4.2.9]. Für ein Schema X über k bezeichnen wir mit $z^n_{Bl}(X, *)$ den Komplex aus [Blo86], der höhere Chowgruppen ausrechnet. Da wir alles kohomologisch schreiben, sei durch

$${}^{k}z^n_{Bl}(X, i) = z^n_{Bl}(X, -i)$$

der kohomologisch geschriebene Bloch-Komplex definiert. Ist X ein G-Schema über k, so ist ${}^{k}z^n_{Bl}(X, *)$ automatisch ein Komplex von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln. Damit können wir nun Borel-Moore Homologie wie folgt schreiben:

Proposition 3.5.4. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt und X eine äquidimensionales quasi-projektives Schema über k von Dimension n. Dann gibt es für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$H^{2i-j}(G, {}^{k}z^{n-i}_{Bl}(X, *)) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}(i)[j], {}^{G}\mathrm{M}^c(X)) & \text{für } i \geq 0 \\ \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}, {}^{G}\mathrm{M}^c(X)(-i)[-j]) & \text{für } i \leq 0. \end{cases}$$

Beweis:
Wir zeigen die Behauptung zuerst für $i \geq 0$. Mit Proposition 3.5.3 und Satz 3.4.6 identifizieren wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}(i)[j], {}^{G}\mathrm{M}^c(X)) &= \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}[j-2i], C^*(z_{equi}(X, i))) \\ &= H^{2i-j}_{cdh}(Spec(k), G; (C^*(z_{equi}(X, i)))^{\sim}_{cdh}) \\ &= H^{2i-j}(G, C^*(z_{equi}(X, i))(Spec(k))).\end{aligned}$$

Nun gibt es einen Morphismus (vgl. [Voe00, 4.2.9])

$$\Psi : C^*(z_{equi}(X, i))(Spec(k)) \longrightarrow {}^{k}z^{n-i}_{Bl}(X, *),$$

der, weil er natürlich in X ist, ein Morphismus von $\mathbb{Z}[G]$-Modulkomplexen ist. Dieser ist ein Quasiisomorphismus, weil er es nicht-äquivariant ist. Daher folgt die Behauptung für $i \geq 0$.
Nun sei $i \leq 0$. Wir identifizieren mit Korollar 3.4.5

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{{}^GDM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}, {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X)(-i)[-j]) &= \mathrm{Hom}_{{}^GDM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}[j-2i], {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X)(-i)[-2i]) \\ &= \mathrm{Hom}_{{}^GDM^{eff}(k)}(\mathbb{Z}[j-2i], {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X \times \mathbb{A}^{-i})) \end{aligned}$$

Man schließt wie im ersten Fall weiter und benutzt noch die Homotopieinvarianz der höheren Chowgruppen. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir nun noch ein Resultat zeigen, bei dem wir uns auf glatte projektive Schemata einschränken müssen. Um ein allgemeineres Resultat zu erhalten, bräuchte man hierfür dann wirklich eine äquivariante Auflösung von Singularitäten. Wir brauchen den folgenden Satz, um im nächsten Kapitel einen Zusammenhang zu den äquivarianten Chowmotiven von Laterveer herzustellen.

Satz 3.5.5. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt, $i \in \mathbb{Z}$ und $X, Y \in {}^GSm/k$ eigentliche Schemata. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$\_ \otimes id_{\mathbb{Z}(1)} : \mathrm{Hom}_{{}^GDM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)[i], {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}^GDM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(1)[i], {}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(Y)(1))$$

ein Isomorphismus.

Beweis:
Dies folgt aus den bisherigen Resultaten wie im Beweis von der ensprechenden nicht-äquivarianten Aussage (vgl.[Voe00, 4.3.1]) oder mit bisher schon angewandten Methoden direkt aus dem nicht-äquivarianten Resultat. □

Wir betrachten nun die Kategorie, die aus ${}^GDM^{eff}(k)$ entsteht, indem wir formal den Funktor $\_ \otimes \mathbb{Z}(1)$ invertieren und nennen diese Kategorie ${}^GDM(k)$. Die Objekte von ${}^GDM(k)$ sind Paare (A, n) mit $A \in {}^GDM^{eff}(k)$ und $n \in \mathbb{Z}$ und die Morphismen sind dabei für $(A, n), (B, m) \in {}^GDM(k)$ durch

$$\mathrm{Hom}_{{}^GDM(k)}((A, n), B, m)) := \lim_{k \geq -m, -n} \mathrm{Hom}_{{}^GDM^{eff}(k)}(A(k+n), B(k+m))$$

gegeben. ${}^GDM(k)$ ist wieder eine triangulierte Kategorie und folgendes Lemma zeigt, dass sich das Tensorprodukt auf ${}^GDM(k)$ fortsetzt.

Lemma 3.5.6. *Die Permutation auf $\mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1)$ induziert die Identität in ${}^GDM^{eff}(k)$.*

Beweis:
Folgt aus den nicht-äquivarianten Resultat [Voe00, 2.1.5]. □

3.6 Äquivariante motivische Kohomologie

Wir wollen in diesem Abschnitt am Beispiel der motivischen Kohomologie zeigen, wie sich mit den bisher gezeigten Resultaten Kohomologie und Homologietheorien mit guten Eigenschaften in Termen von ${}^{G}DM^{eff}(k)$ direkt hinschreiben lassen.

Definition 3.6.1 (äquivariante motivische Kohomologie). Es sei $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n$ oder $\mathbb{Q}$ und $A(i) := \mathbb{Z}(i) \otimes A$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir äquivariante motivische Kohomologie mit A-Koeffizienten von einem Schema $X \in {}^{G}Sch/k$ durch

$$ {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(X, A(j)) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), A(j)[i]) \text{ für } j \geq 0 \\ \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X)(-j)[-i], A) \text{ für } j \leq 0. \end{cases} $$

Ist $X \in {}^{G}Sch/k$ glatt und eigentlich, so folgt aus Proposition 3.5.5, dass für alle $i, j \in \mathbb{Z}$

$$ {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(X, A(j)) = \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM(k)}({}^{\mathrm{G}}\mathrm{M}(X), A(j)[i]) $$

gilt.

Die folgenden Eigenschaften folgen unmittelbar aus den entsprechenden Resultaten über ${}^{G}DM^{eff}(k)$.

Satz 3.6.2. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt. Dann ist ${}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(\_, A(j))$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie ${}^{G}Sch/k$ in die Kategorie der abelschen Gruppen mit den folgenden Eigenschaften:*

- **Homotopieinvarianz**
  Für alle $X \in {}^{G}Sch/k$ und jeder G-Struktur auf $\mathbb{A}^1$ induziert die Projektion $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ einen Isomorphismus

$$ {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(X, A(j)) \xrightarrow{\sim} {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(X \times \mathbb{A}^1, A(j)). $$

- **Mayer-Vietoris Sequenz**
  Für alle $X \in {}^{G}Sch/k$ und jede äquivariante Überdeckung $U \cup V = X$ gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz

$$ \cdots \longrightarrow {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(X, A(j)) \longrightarrow {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(U, A(j)) \oplus {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(V, A(j)) \longrightarrow \\ {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(U \cap V, A(j)) \longrightarrow {}^{G}H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, A(j)) \longrightarrow \cdots . $$

- **Aufblasungssequenz**
  Für alle $X \in {}^{G}Sch/k$ und jede äquivariante abgeschlossene Immersion $Z \hookrightarrow X$ gibt es für die Aufblasung $p : B_Z X \to X$ eine natürliche exakte Sequenz

$$ \cdots \longrightarrow {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(p^{-1}(Z), A(j)) \longrightarrow {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(Z, A(j)) \oplus {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(B_Z X, A(j)) \\ \longrightarrow {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(X, A(j)) \longrightarrow {}^{G}H^{i+1}_{\mathcal{M}}(p^{-1}(Z), A(j)) \longrightarrow \cdots . $$

- **Projektives Bündel**
  Für jede lokalfreie G-Garbe $\mathcal{E}$ von Rang n auf einem glatten und projektiven $X \in {}^{G}Sch/k$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$ {}^{G}H^{i}_{\mathcal{M}}(\mathbb{P}(\mathcal{E}), A(j)) = \bigoplus_{k=0}^{n} {}^{G}H^{i-2k}_{\mathcal{M}}(X, A(j-k)). $$

3.7 Ergänzungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Varianten der bisherigen Konstruktion diskutieren, die im nächsten Kapitel noch eine Rolle spielen werden. Außerdem wird die Kategorie ${}^{G}DM^{eff}(k)$ für variierendes G untersucht.

3.7.1 Koeffizienten

Wir wollen in diesem Abschnitt eine rationale Version der Kategorie ${}^{G}DM^{eff}(k)$ einführen. Dies geschieht ganz analog. Dafür betrachten wir die Kategorie

$$ {}^{G}Shv^{\mathbb{Q}}_{Nis}(SmCor(k)) $$

der Nisnevich-Garben mit Transfer mit Werten in der Kategorie der $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Es sei ${}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})$ wieder die volle Unterkategorie von $\mathcal{D}^{-}({}^{G}Shv^{\mathbb{Q}}_{Nis}(SmCor(k)))$, die als Objekte gerade die Komplexe mit invarianter Kohomologie hat. Es gibt wieder kovariante Funktoren

$$ \begin{array}{rccc} {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}: & Sch/k & \longrightarrow & {}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q}) \\ & X & \longmapsto & C^{*}(\mathbb{Z}_{tr}(X) \otimes \mathbb{Q}) \end{array} $$

und

$$ \begin{array}{rccc} {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}: & Sch/k^{prop} & \longrightarrow & {}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q}) \\ & X & \longmapsto & C^{*}(z_{equi}(X,0) \otimes \mathbb{Q}). \end{array} $$

Die Aussagen für ${}^{G}DM^{eff}(k)$ lassen sich auf ${}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})$ übertragen und analog beweisen. Explizit aufführen wollen wir nur die folgende

Proposition 3.7.1. *Es sei k ein Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt und X eine äquidimensionales quasi-projektives Schema über k von Dimension n. Dann gibt es für alle $i,j \in \mathbb{Z}$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$ H^{2i-j}(G, {}^{k}z^{n-i}_{Bl}(X,*) \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(i)[j], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X)) & \textit{für } i \geq 0 \\ \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X)(-i)[-j]) & \textit{für } i \leq 0. \end{cases} $$

3.7.2 Etale Version

Hierfür muss aus technischen Gründen angenommen werden, dass der Grundkörper k endliche etale kohomologische Dimension hat (vgl. [Voe00, 3.3]). Für $A = \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ sei dann ${}^G DM^{eff}_{ét}(k, A)$ die triangulierte Kategorie, die wie ${}^G DM^{eff}(k, A)$ ensteht, wenn man die Nisnevich Topologie durch die etale Topologie ersetzt (vgl. [Voe00, 3.3]). Die Ergebnisse aus Abschnitt 3.1 und 3.2 lassen sich auf diesen Fall übertragen. Der Garbifizierungsfunktor liefert sofort einen Funktor

$$ {}^G DM^{eff}(k, A) \longrightarrow {}^G DM^{eff}_{ét}(k, A). $$

3.7.3 Restriktions- und Transferabbildung

Bisher war die diskrete Gruppe G in dieser Arbeit immer fixiert. Wir betrachten nun zunächst einen Gruppenhomorphismus

$$ \rho : H \longrightarrow G $$

zwischen diskreten Gruppen. Jede G-Garbe mit Transfer kann dann über ρ auch als H-Garbe mit Transfer aufgefasst werden. Wir erhalten also einen Funktor

$$ \rho^* : {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k)) \longrightarrow {}^H Shv_{Nis}(SmCor(k)), $$

der offensichtlich exakt ist und homotopieinvariante Garben in homotopieinvariante Garben überführt. Also setzt sich dieser zu einem Funktor

$$ \rho^* : {}^G DM^{eff}(k) \longrightarrow {}^H DM^{eff}(k) $$

fort.

Für $M, N \in {}^G DM^{eff}(k)$ identifizieren wir wieder

$$ \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}(M, N) = h^0(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))}(M, \_)(N)) $$

und

$$ \mathrm{Hom}_{{}^H DM^{eff}(k)}(\rho^* M, \rho^* N) = h^0(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^H Shv_{Nis}(SmCor(k))}(\rho^* M, \_)(\rho^* N)). $$

Außerdem gilt für alle $A, B \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$

$$ \mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B) = (\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B))^G $$

und

$$ \mathrm{Hom}_{{}^H Shv_{Nis}(SmCor(k))}(\rho^* A, \rho^* B) = (\rho^*(\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B)))^H. $$

Nun hat man einen natürlichen Morphismus

$$ (\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B))^G \longrightarrow (\rho^*(\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B)))^H, $$

und nach der universellen Eigenschaft von $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))}(M, \_)$ induziert dieser eine natürliche Transformation

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))}(M, \_) \longrightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^H Shv_{Nis}(SmCor(k))}(\rho^* M, \rho^* \_).$$

Dieser induziert dann für alle $M, N \in {}^G DM^{eff}(k)$ eine natürliche Abbildung

$$\mathrm{res} : \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}^H DM^{eff}(k)}(\rho^* M, \rho^* N).$$

Wir wollen nun für eine normale Untergruppe $H \subset G$ vom endlichen Index einen Transfermorphismus in die andere Richtung definieren. Zunächst bemerken wir, dass ρ rechtsadjungiert zum exakten Funktor

$$\_ \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G] : {}^H Shv_{Nis}(SmCor(k)) \longrightarrow {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$$

ist. Nach Lemma 1.4.5 überführt ρ^* daher K-injektive Komplexe in K-injektive Komplexe. Daher können wir für $M, N \in {}^G DM^{eff}(k)$

$$\mathrm{Hom}_{{}^H DM^{eff}(k)}(\rho^* M, \rho^* N) = h^0(\mathbf{R}F(N))$$

schreiben, wobei F durch

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{K}({}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))) & \longrightarrow & \mathcal{D}(Ab) \\ & N & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{{}^H Shv_{Nis}(SmCor(k))}(\rho^* M, \rho^* N) \end{array}$$

definiert ist. Die übliche Transferabbildung für $\mathbb{Z}[G]$-Moduln liefert nun für alle $A, B \in {}^G Shv_{Nis}(SmCor(k))$ eine Abbildung

$$(\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B))^H \longrightarrow (\mathrm{Hom}_{Shv_{Nis}(SmCor(k))}(A, B))^G.$$

Wie oben wird nun für alle $M, N \in {}^G DM^{eff}(k)$ durch die universelle Eigenschaft von $\mathbf{R}F$ eine natürliche Abbildung

$$\mathrm{trans} : \mathrm{Hom}_{{}^H DM^{eff}(k)}(\rho^* M, \rho^* N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k)}(M, N)$$

induziert.

Bemerkung 3.7.2. Durch die Eindeutigkeitsbedingung in der universellen Eigenschaft abgeleiteter Funktoren lässt sich wie im Fall der Gruppenkohomologie zeigen, dass die Abbildung $\mathrm{trans} \circ \mathrm{res}$ gerade die Multiplikation mit $[G : H]$ ist.

Kapitel 4

Vergleich mit anderen äquivarianten Theorien

In diesem Kapitel wollen wir einen Zusammenhang zwischen der hier definierten triangulierten Kategorie äquivarianter Motive und anderen äquivarianten Theorien herstellen.

Im ersten Abschnitt zeigen wir, dass für eine endliche diskrete Gruppe die Kategorie der äquivarianten Chowmotive aus [Lat98] von Laterveer in unserer Kategorie als volle Unterkategorie enthalten ist.

Im zweiten Abschnitt zeigen wir, dass in einer geeigneten Situation ein enger Zusammenhang zur Borelkohomologie aus der Topologie besteht.

4.1 Zusammenhang zu äquivarianten Chowmotiven

In [Lat98] konstruiert Laterveer für einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper und eine algebraische Gruppe mit Hilfe der äquivarianten Chowgruppen aus [EG98] von Edidin und Graham eine Kategorie von äquivarianten Chowmotiven. Wir wollen in diesem Abschnitt für eine diskrete algebraische Gruppe, das heißt für eine endliche diskrete Gruppe, einen Zusammenhang zu unserer bisherigen Konstruktion aufzeigen.

Es sei also im gesamten Abschnitt G eine endliche diskrete Gruppe und k ein algebraisch abgeschlossener Körper, der die Auflösung von Singularitäten zulässt.

Um das Problem der äquivarianten Auflösung von Singularitäten zu vermeiden, betrachten wir hier die Kategeroie $\mathcal{V}_G$ der glatten projektiven Varietäten über k. In [EG98] wurden von Edidin und Graham äquivariante Chowgruppen

$$A_G^* : \mathcal{V}_G \longrightarrow Ab$$

und äquivariante höhere Chowgruppen

$$CH_G^*(\_, *) : \mathcal{V}_G \longrightarrow Ab$$

konstruiert und gezeigt, dass sich viele Eigenschaften aus der nicht-äquivarianten Theorie übertragen lassen. Für Details verweisen wir auf das erste Kapitel von [EG98]. Wir betrachten hier nur rationale Koeffizienten und bezeichen daher mit A^*_G und $CH^*_G(\_,*)$ gleich die Theorien mit rationalen Koeffizienten. Der Zusammenhang mit unserer Theorie ergibt sich in der nächsten

Proposition 4.1.1. *(i) Für alle $X \in \mathcal{V}_G$ und alle $i \in \mathbb{Z}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$A_G^{dim(X)-i}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{^GDM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(i)[2i],\, {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)).$$

(ii) Für alle $X \in \mathcal{V}_G$ mit linearer G-Operation und quasi-projektiven Quotienten und alle $i, j \in \mathbb{Z}$ gibt es einen natürlichen Isomophismus

$$CH_G^{dim(X)-i}(X,j) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{^GDM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(i)[2i+j],\, {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)).$$

Beweis:
Nach [EG98] Proposition 13 gilt für ein $X \in \mathcal{V}_G$

$$CH^i_G(X,0) = h_0((z^i_{Bl}(X,*) \otimes \mathbb{Q})^G)$$

und unter den Vorraussetzungen von (ii)

$$CH^i_G(X,j) = h_j((z^i_{Bl}(X,*) \otimes \mathbb{Q})^G).$$

Da G eine endliche Gruppe ist, ist der Invariantenfunktor auf der Kategorie der $\mathbb{Q}[G]$-Moduln exakt. Daher folgt die Behauptung aus 3.5.4 bzw. 3.7.1. □

Wir erinnern nun kurz an die Konstruktion von Laterveer aus [Lat98]. Es werden für $X, Y \in \mathcal{V}_G$ G–Korrespondenzen vom Grad $r \in \mathbb{Z}$ für ein irreduzibles X durch

$$Corr^r_G(X,Y) := A_G^{dimX+r}(X \times Y)$$

definiert. In üblicher Weise wird für G–Korrespondenzen ein Produkt definiert. Die Kategorie $\mathcal{M}_G$ der äquivarianten Chowmotive ist dann die Kategorie der Tripel (X,p,m) mit $X \in \mathcal{V}_G,\ p \in Corr^0_G(X,X)$ mit $p^2 = p$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit Morphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_G}((X,p,m),(Y,q,n)) = qCorr^{n-m}_G(X,Y)p \subset Corr^{n-m}_G(X,Y)$$

für $(X,p,m),(Y,q,n) \in \mathcal{M}_G$. Das Tensorprodukt ist für $(X,p,m),(Y,q,n) \in \mathcal{M}_G$ in üblicher Weise durch

$$(X,p,m) \otimes (Y,q,n) := (X \times Y, p \times q, m+n)$$

definiert. Man erhält den kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{rccc} h_G: & \mathcal{V}_G & \longrightarrow & \mathcal{M}_G \\ & X & \longmapsto & (X, \mathrm{id}_X, 0), \end{array}$$

und das Motiv $\mathbb{L} = (Spec(k), id, -1)$ wird Lefschetzmotiv genannt.

Um nun $\mathcal{M}_G$ nach ${}^GDM(k,\mathbb{Q})$ einzubetten, benötigen wir noch folgende Vorbereitungen.

Lemma 4.1.2. *Es seien A und B Objekte einer pseudo-abelschen Kategorie $\mathcal{A}$, p ein Projektor auf A und q ein Projektor auf B. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Bild(p), Bild(q)) = q\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)p.$$

Beweis: Dies kann man einfach nachrechnen. □

Lemma 4.1.3. *Die Kategorie ${}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})$ ist pseudo-abelsch.*

Beweis:
Die Kategorie $\mathcal{D}({}^{G}Shv^{\mathbb{Q}}_{Nis}(SmCor(k)))$ ist nach [Lev98, II,2.4.9 (iii)] pseudo-abelsch. Ist also $A \in {}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})$ und p ein Projektor auf A, so existiert $\ker p$ in $\mathcal{D}({}^{G}Shv^{\mathbb{Q}}_{Nis}(SmCor(k)))$ und $\ker p \oplus \ker(1-p) \to A$ ist ein Isomorphismus. Nun ist $\mathrm{Ver}(\ker p) = \ker(\mathrm{Ver}(p))$ und weil $DM^{eff}(k,\mathbb{Q})$ pseudoabelsch ist, gilt $\mathrm{Ver}(\ker p) \in DM^{eff}(k,\mathbb{Q})$. Daher folgt, dass $\ker p$ und $\ker(1-p)$ in ${}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})$ sind. □

Das entscheidene Hilfsmittel ist nun

Proposition 4.1.4. *Für alle $X, Y \in \mathcal{V}_G$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)(m)[2m], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(Y)(n)[2n]) \xrightarrow{\sim} A_G^{dim(Y)+n-m}(X \times Y).$$

Beweis:
Wir betrachten zunächst den Fall $m \geq n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)(m)[2m], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(Y)(n)[2n]) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X), {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(Y)(n-m)[2n-2m]) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X), {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(Y \times \mathbb{A}^{n-m})) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X), C^*(z_{equi}(Y \times \mathbb{A}^{n-m}, 0) \otimes \mathbb{Q})) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, C^*(z_{equi}(X \times Y \times \mathbb{A}^{n-m}, dim(X)) \otimes \mathbb{Q})).
\end{aligned}$$

Dabei gilt die erste Gleichheit wegen 3.5.5, die zweite wegen 3.4.5, die dritte nach Definition und die letzte Gleichheit auf Grund von 3.5.1 (i). Weiter folgt aus 3.5.3

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, C^*(z_{equi}(X \times Y \times \mathbb{A}^{n-m}, dim(X)) \otimes \mathbb{Q})) = \\
&\qquad \mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(dim(X))[2dim(X)], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X \times Y \times \mathbb{A}^{n-m})),
\end{aligned}$$

und mit Proposition 4.1.1 und der Homotopieinvarianz für äquivariante Chowgruppen folgt schließlich

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{{}^{G}DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}(dim(X))[2dim(X)], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}^{\mathrm{c}}(X \times Y \times \mathbb{A}^{n-m})) = \\
&\qquad A_G^{dim(Y)+n-m}(X \times Y \times \mathbb{A}^{n-m}) = A_G^{dim(Y)+n-m}(X \times Y).
\end{aligned}$$

Sei nun $m \leq n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{{}^G DM(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)(m)[2m], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(Y)(n)[2n]) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)(m-n)[2m-2n], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(Y)) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{{}^G DM^{eff}(k,\mathbb{Q})}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X), C^*(z_{equi}(Y, m-n) \otimes \mathbb{Q})).
\end{aligned}$$

Dies folgt wieder aus 3.5.5 und 3.5.3. Dann schließt man ähnlich wie im ersten Fall weiter. □

Satz 4.1.5. *Es gibt einen kontravarianten volltreuen Funktor*

$$F : \mathcal{M}_G \longrightarrow {}^G DM(k, \mathbb{Q}),$$

der mit dem Tensorprodukt auf beiden Seiten verträglich ist.

Beweis:
Wir definieren den Funktor zunächst auf Objekten. Dazu sei also $(X, p, m) \in \mathcal{M}_G$. Wegen 4.1.4 definiert p auch einen Projektor auf ${}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)$. Auf Grund von Lemma 4.1.3 können wir

$$F((X, p, m)) := Bild(p : {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X) \to {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)) \otimes \mathbb{Q}(-m)[-2m]$$

definieren. Für $(X, p, m), (Y, q, n) \in \mathcal{M}_G$ gilt wegen 4.1.2 und 4.1.4

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{{}^G DM(k,\mathbb{Q})}(F((X, p, m)), F((Y, q, n))) = \\
&\quad q \otimes Id_{\mathbb{Q}(-n)[-2n]} \mathrm{Hom}({}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(X)(-m)[-2m], {}^{\mathrm{G}}_{\mathbb{Q}}\mathrm{M}(Y)(-n)[-2n])p \otimes Id_{\mathbb{Q}(-m)[-2m]} = \\
&\qquad qA_G^{dim(Y)+m-n}(X \times Y)p.
\end{aligned}$$

Aus den Konstruktionen folgt, dass diese Isomorphie auch verträglich mit der Verkettung von Morphismen ist. Außerdem ist klar, dass F mit den Tensorprodukten auf beiden Seiten verträglich ist. □

4.2 Zusammenhang zur äquivarianten Borelkohomologie aus der Topologie

Wir wollen in diesem Abschnitt für $k = \mathbb{C}$ etale äquivariante motivische Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/n$ mit äquivarianter Borelkohomologie aus der Topologie vergleichen.

Wir erinnern zunächst an die äquivariante Borelkohomologie. Es sei also G eine diskrete Gruppe. Dann gibt es einen zusammenziehbaren topologischen Raum E_G auf dem G frei und sogar eigentlich operiert. Der Quotient E_G/G wird mit B_G bezeichnet und heisst der klassifizierende Raum der Gruppe G.

Ist X ein topologischer Raum auf dem G operiert, so definiert man für eine abelsche Gruppe A durch

$$ {}^B_G H^i(X,A) := H^i_{sing}(X \times_G E_G, A) $$

äquivariante Borelkohomologie. Dabei steht auf der rechten Seite gewöhnliche singuläre Kohomologie und mit $X \times_G E_G$ bezeichnen wir den Quotienten von $X \times E_G$ durch G. Für den Fall, das X ein Punkt ist, erhalten wir

$$ {}^B_G H^i(\{pt\}, A) = H^i_{sing}(B_G, A). $$

Wir wollen nun erläutern, wie man diese äquivariante Kohomologie ohne die Verwendung von E_G ausdrücken kann. Dazu betrachten wir für einen G–Raum X den singulären Kettenkomplex $C_*(X)$. Dieser ist dann ein $\mathbb{Z}[G]$-Modul Kettenkomplex.

Wir zeigen nun den in der Topologie wohlbekannten

Satz 4.2.1. *Es sei X ein topologischer Raum mit einer G–Operation und A eine abelsche Gruppe. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$ {}^B_G H^i(X,A) \xrightarrow{\sim} h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(X), A)). $$

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma aus [Wei94].

Lemma 4.2.2. *In obiger Situation ist $C_*(E_G \times X)$ ein freier $\mathbb{Z}[G]$–Modul und es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$ C_*(E_G \times X) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} C_*(E_G \times_G X). $$

Beweis: [Wei94, Lemma 6.10.2]. □
Beweis des Satzes:
Da E_G zusammenziehbar ist, ist

$$ C_*(E_G \times X) \longrightarrow C_*(X) $$

ein Quasiisomorphismus von $\mathbb{Z}[G]$–Moduln. Außerdem ist nach obigem Lemma $C_*(E_G \times X)$ freier $\mathbb{Z}[G]$–Modul und somit nach Lemma 1.4.7 K–projektiv. Daher folgt

$$ \begin{aligned} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(X), A) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(E_G \times X), A) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(E_G \times X), A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(E_G \times X) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}, A). \end{aligned} $$

Dabei gilt die letzte Gleichheit, weil A triviale G–Struktur hat. Wieder mit obigem Lemma folgt dann

$$ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(E_G) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}, A) = \mathrm{Hom}(C_*(E_G \times_G X), A) $$

und somit dann die Behauptung. □

Wir kommen nun zur etalen äquivarianten motivischen Kohomologie in unserer Theorie. Wir bezeichnen mit μ_m die Garbe der m–ten Einheitswurzeln als Element von $Shv_{et}(Sm/k)$ mit der trivialer G–Operation.

Satz 4.2.3. *Für ein $X \in {}^G Sch/k$ gilt*

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM_{\acute{e}t}^{eff}(k)}({}^G\mathrm{M}(X), \mathbb{Z}/m(j)[i]) \xrightarrow{\sim} H^i_{et}(X, G; \mu_m^{\otimes j}).$$

Beweis:
Es gibt nach [Fri97, 4.5] einen naürlichen nicht-äquivarianten Quasiisomorphismus

$$\mu_m^{\otimes j} \longrightarrow \mathbb{Z}/m(j).$$

Da G auf beiden Seiten trivial operiert, ist dies dann auch ein Quasiisomorphismus in ${}^G DM_{\acute{e}t}^{eff}(k)$. Zusammen mit der etalen Version von Satz 3.1.17 folgt die Behauptung. □

Für den Vergleich brauchen wir noch folgendes

Lemma 4.2.4. *Es sei $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Kom}^-(\mathbb{Z}[G] - Mod)$. Dann gibt es in $\mathcal{D}(Ab)$ einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A^\bullet, B^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A^\bullet, B^\bullet).$$

Beweis:
Es sei $B^\bullet \to I^\bullet_{B^\bullet}$ eine K–injektive Auflösung in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z}[G] - Mod)$. Außerdem sei $P^\bullet_{A^\bullet} \to A^\bullet$ eine Auflösung in $\mathrm{Kom}^-(\mathbb{Z}[G] - Mod)$, so dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ der $\mathbb{Z}[G]$–Modul $P^i_{A^\bullet}$ projektiv ist. Dann ist $P^\bullet_{A^\bullet}$ nach 1.4.7 K-projektiv in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z}[G] - Mod)$. Da nun $P^i_{A^\bullet}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ automatisch auch projektive $\mathbb{Z}$–Moduln sind, ist $P^\bullet_{A^\bullet}$ auch K–projektiv in $\mathrm{Kom}(\mathbb{Z} - Mod)$. Daher gilt

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A^\bullet, B^\bullet) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P^\bullet_{A^\bullet}, I^\bullet_{B^\bullet}) = \mathrm{Hom}^\bullet{}_{\mathbb{Z}[G]}(P^\bullet_{A^\bullet}, I^\bullet_{B^\bullet}).$$

Weil nun für alle $M, N \in \mathbb{Z}[G] - Mod$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(M, N)$$

gilt, reicht es für die Behauptung zu zeigen, dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^\bullet_{A^\bullet}, I^\bullet_{B^\bullet})$ K-injektiv ist. Es sei also $S^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathbb{Z}[G] - Mod)$ ein azyklischer Komplex. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(S^\bullet, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^\bullet_{A^\bullet}, I^\bullet_{B^\bullet})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(S^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} P^\bullet_{A^\bullet}, I^\bullet_{B^\bullet}).$$

Weil nun $P^\bullet_{A^\bullet}$ auch K-projektiv als $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist $S^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} P^\bullet_{A^\bullet}$ auch azyklisch und, weil $I^\bullet_{B^\bullet}$ K-injektiv ist, folgt die Behauptung. □

Wir kommen nun schließlich zum Hauptergebniss dieses Abschnittes.

Satz 4.2.5. *Es sei $k = \mathbb{C}$ und $X \in {}^G Sm/\mathbb{C}$. Mit $X(\mathbb{C})$ bezeichnen wir die zu X assoziierte komplexe Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{{}^G DM_{\acute{e}t}^{eff}(k)}({}^G\mathrm{M}(X), \mathbb{Z}/m[i]) \xrightarrow{\sim} H^i_{sing}(X(\mathbb{C}) \times_G E_G, \mathbb{Z}/m).$$

Beweis:
Wir identifizieren die linke Seite mit Hilfe von Satz 3.1.17 und 1.4.1 (ii) mit

$$h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{{}^G Shv_{et}(Sm/k)}({}^G\mathbb{Z}(X), \mathbb{Z}/m)).$$

Mit 2.1 ist dies gleich

$$h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{et}(Sm/k)}({}^G\mathbb{Z}(X), \mathbb{Z}/m)).$$

Die rechte Seite identifiziert sich mit Hilfe von Satz 4.2.1 mit

$$h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}(C_*(X(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/m))$$

und auf Grund von Lemma 4.2.4 dann mit

$$h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/m)))$$

und weil $C_*(X(\mathbb{C}))$ als $\mathbb{Z}$–Modul frei ist mit

$$h^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/m))).$$

Nun sind aber auf Grund der nicht-äquivarianten Vergleichsätze $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/m)$ und $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{Shv_{et}(Sm/k)}({}^G\mathbb{Z}(X), \mathbb{Z}/m)$ isomorph in $\mathcal{D}(\mathbb{Z}[G] - Mod)$. Daher folgt die Behauptung. $\square$

Literaturverzeichnis

[ATJLSS00] Leovigildo Alonso Tarrío, Ana Jeremías López, and María José Souto Salorio. Localization in categories of complexes and unbounded resolutions. *Canad. J. Math.*, 52(2):225–247, 2000.

[Blo86] Spencer Bloch. Algebraic cycles and higher K-theory. *Adv. in Math.*, 61(3):267–304, 1986.

[BN93] Marcel Bökstedt and Amnon Neeman. Homotopy limits in triangulated categories. *Compositio Math.*, 86(2):209–234, 1993.

[Del77] P. Deligne. *Cohomologie étale*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.

[EG98] Dan Edidin and William Graham. Equivariant intersection theory. *Invent. Math.*, 131(3):595–634, 1998.

[EG00] Dan Edidin and William Graham. Riemann-Roch for equivariant Chow groups. *Duke Math. J.*, 102(3):567–594, 2000.

[Fri97] Eric M. Friedlander. Motivic complexes of Suslin and Voevodsky. *Astérisque*, (245):Exp. No. 833, 5, 355–378, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.

[FS00] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. *The spectral sequence relating algebraic K-theory to motivic cohomology.* 2000. Preprint zu finden unter http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/K-theory/0432/index.html.

[FV00] Eric M. Friedlander and Vladimir Voevodsky. Bivariant cycle cohomology. In *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, pages 138–187. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

[Gir71] Jean Giraud. *Cohomologie non abélienne*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J. (2)*, 9:119–221, 1957.

[Gro68] A. Grothendieck. Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets. In *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, pages 215–305. North-Holland, Amsterdam, 1968.

[Han95] Masaki Hanamura. Mixed motives and algebraic cycles. I. *Math. Res. Lett.*, 2(6):811–821, 1995.

[Har66] Robin Hartshorne. *Residues and duality.* Springer-Verlag, Berlin, 1966. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20.

[Hub95] Annette Huber. *Mixed motives and their realization in derived categories.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Hub98] Annette Huber. *Realization of Voevodsky's motives.* 1998. Preprint zu finden unter http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/sfb/about/publ/huber02.html.

[Jec97] Thomas Jech. *Set theory.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997.

[Köc98] Bernhard Köck. The Grothendieck-Riemann-Roch theorem for group scheme actions. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 31(3):415–458, 1998.

[Lat98] Robert Laterveer. Equivariant motives. *Indag. Math. (N.S.)*, 9(2):255–275, 1998.

[Lev98] Marc Levine. *Mixed motives.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Lip] Joseph Lipman. *Notes on derived categories and derives functors.* Preprint zu finden unter http://www.math.purdue.edu/~lipman/.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory.* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[SGA72a] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269.

[SGA72b] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.

[Spa88] N. Spaltenstein. Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2):121–154, 1988.

[SV00] Andrei Suslin and Vladimir Voevodsky. Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, pages 117–189. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Voe00] Vladimir Voevodsky. Triangulated categories of motives over a field. In *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, pages 188–238. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

[VSF00] Vladimir Voevodsky, Andrei Suslin, and Eric M. Friedlander. *Cycles, transfers, and motivic homology theories.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Christian Serpé
SFB 478 Geometrische Strukturen in der Mathematik
Hittorfstr. 27
48149 Münster
Germany
e-mail: serpe@math.uni-muenster.de