

Ausgewählte Kapitel aus der nichtkommutativen Algebra

Peter Schneider

Vorlesung in Münster, 2000

Inhaltsverzeichnis

I	Einiges aus der homologischen Algebra	3
1	Komplexe	3
2	Projektive Auflösungen	6
3	Ext- und Tor-Funktoren	7
4	Cartan-Eilenberg-Auflösungen	17
II	Spektralsequenzen	22
5	Filtrierte Komplexe	22
6	Doppelkomplexe	26
III	Dimensionsbegriffe für Moduln	29
7	Projektive Dimension	29
8	Kohärente Ringe	31
9	Dualität	34
10	Stufe und Codimension eines Moduls	41
IV	Filtrierte Ringe	50
11	Grundbegriffe	50
12	Übertragung von Endlichkeitseigenschaften	57
13	Gute Filtrierungen	68

14 Die Artin-Rees-Eigenschaft	73
15 Übertragung der Auslander-Regularität	79
Literatur	86

Das vorliegende Manuskript enthält den Inhalt einer einsemestrigen Vorlesung in Münster im Jahre 2000. Ziel der Vorlesung war eine möglichst umfassende Darstellung der Theorie der Auslander-regulären Ringe.

Ein herzliches Dankeschön gebührt Frau Ina Reckermann für das sicherlich nicht einfache Texten meiner handschriftlichen Notizen.

In diesem Buch ist R stets ein (assoziativer) Ring mit Eins, und $Z(R)$ bezeichnet sein Zentrum. Mit R -Moduln sind stets unitale R -Linksmoduln gemeint. Wir erinnern daran, daß diese eine *abelsche Kategorie* $\text{Mod}(R)$ bilden, d. h.:

- R -Modulhomomorphismen besitzen Kern, Bild und Cokern,
- der Isomorphiesatz gilt,
- die direkte Summe zweier (hier sogar beliebig vieler) R -Moduln existiert,
- $\text{Hom}_R(M, N)$ ist eine abelsche Gruppe (genauer hier ein $Z(R)$ -Modul) und die Komposition von Homomorphismen ist diesbezüglich biadditiv (genauer hier $Z(R)$ -bilinear).

Teil I

Einiges aus der homologischen Algebra

1 Komplexe

Ein *Komplex* von R -Moduln ist eine Sequenz

$$M^\bullet : \dots \longrightarrow M^{-1} \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M^q \longrightarrow \dots$$

von R -Moduln M^q und R -Modulhomomorphismen $d^q : M^q \longrightarrow M^{q+1}$ (den *Cocorandoperatoren* oder *Differentialen*) mit der Eigenschaft, daß

$$(1) \quad d^{q+1} \circ d^q = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z} .$$

Der R -Modul

$$(2) \quad h^q(M^\bullet) := \ker(d^q) / \operatorname{im}(d^{q-1})$$

ist somit wohldefiniert und heißt der q -te *Cohomologiemodul* des Komplexes M^\bullet .

Ein *Komplexhomomorphismus* $\alpha = \alpha^\bullet : M^\bullet \longrightarrow N^\bullet$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & M^{-1} & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & M^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & M^q & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha^{-1} & & \downarrow \alpha^0 & & \downarrow \alpha^1 & & & & \downarrow \alpha^q & & \\ \dots & \longrightarrow & N^{-1} & \longrightarrow & N^0 & \longrightarrow & N^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & N^q & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

mit R -Modulhomomorphismen $\alpha^q : M^q \longrightarrow N^q$.

Es gilt:

* Die Kategorie $C(R)$ der Komplexe von R -Moduln ist wieder abelsch; Kern, Bild und Cokern werden komponentenweise gebildet.

* $\alpha : M^\bullet \longrightarrow N^\bullet$ induziert R -Modulhomomorphismen

$$h^q(\alpha) : h^q(M^\bullet) \longrightarrow h^q(N^\bullet) \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $h^q(\text{id}) = \text{id}$,
- 2) $h^q(\alpha \circ \beta) = h^q(\alpha) \circ h^q(\beta)$,
- 3) $h^q(\alpha + \beta) = h^q(\alpha) + h^q(\beta)$.

Sei

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{\alpha} M^\bullet \xrightarrow{\beta} N^\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $C(R)$. Dann ist der *Verbindungshomomorphismus*

$$\begin{aligned} \delta^q : h^q(N^\bullet) &\longrightarrow h^{q+1}(L^\bullet) \\ x &\longmapsto y \text{ mit } \beta^q(m) = x, d^q(m) = \alpha^{q+1}(y) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter R -Modulhomomorphismus. Folgendes Diagramm veranschaulicht die Abbildungsvorschrift:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L^q & \longrightarrow & M^q & \xrightarrow{m \mapsto x} & N^q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & m \mapsto \bullet & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L^{q+1} & \xrightarrow{y \mapsto \bullet} & M^{q+1} & \longrightarrow & N^{q+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die nächsten beiden Lemmas werden durch naheliegende Diagrammjagen bewiesen.

Lemma 1.1. *Die Sequenz*

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow h^\bullet(L^\bullet) \longrightarrow \dots \longrightarrow h^q(L^\bullet) \xrightarrow{h^q(\alpha)} h^q(M^\bullet) \xrightarrow{h^q(\beta)} h^q(N^\bullet) \\ &\xrightarrow{\delta^q} h^{q+1}(L^\bullet) \xrightarrow{h^{q+1}(\alpha)} \dots \end{aligned}$$

ist exakt.

Lemma 1.2. *Für ein kommutatives exaktes Diagramm von Komplexen*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L^\bullet & \longrightarrow & M^\bullet & \longrightarrow & N^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{L}^\bullet & \longrightarrow & \tilde{M}^\bullet & \longrightarrow & \tilde{N}^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ist auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & h^q(L^\bullet) & \longrightarrow & h^q(M^\bullet) & \longrightarrow & h^q(N^\bullet) & \xrightarrow{\delta^q} & h^{q+1}(L^\bullet) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & h^q(\tilde{L}^\bullet) & \longrightarrow & h^q(\tilde{M}^\bullet) & \longrightarrow & h^q(\tilde{N}^\bullet) & \xrightarrow{\delta^q} & h^{q+1}(\tilde{L}^\bullet) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutativ.

Definition. Ein Komplexhomomorphismus $\alpha : M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ heißt Quasi-Isomorphismus, falls alle $h^q(\alpha)$ Isomorphismen sind.

Dieser Begriff wirft folgendes **Problem** auf: Fixiere einen R -Modul X und betrachte den Funktor

$$(3) \quad \text{Hom}_R(X, \cdot) : \text{Mod } R \rightarrow \text{Mod}(Z(R)) .$$

Durch komponentenweises Anwenden setzt er sich fort zu einem Funktor

$$(4) \quad \text{Hom}_R(X, \cdot) : C(R) \rightarrow C(Z(R)) .$$

Da (3) nicht exakt ist, respektiert (4) Quasi-Isomorphismen nicht! Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt für eine neue Theorie.

Definition. Zwei Komplexhomomorphismen $\alpha, \beta : M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ heißen homotop, wenn R -Modulhomomorphismen

$$s^q : M^q \rightarrow N^{q-1} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}$$

existieren mit

$$d^{q-1} \circ s^q + s^{q+1} \circ d^q = \alpha^q - \beta^q \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}$$

(in Zeichen: $\alpha \sim \beta$ oder $\alpha \sim_s \beta$).

Lemma 1.3. Aus $\alpha \sim \beta$ folgt $h^q(\alpha) = h^q(\beta)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Lemma 1.4. i. \sim ist eine Äquivalenzrelation.

$$ii. \quad \alpha_0 \sim \beta_0 \text{ und } \alpha_1 \sim \beta_1 \implies \alpha_0 + \alpha_1 \sim \beta_0 + \beta_1.$$

$$iii. \quad \alpha \sim \beta \implies \gamma \circ \alpha \sim \gamma \circ \beta \text{ und } \alpha \circ \gamma \sim \beta \circ \gamma.$$

Definition. Ein Komplexhomomorphismus $\alpha : M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ heißt eine Homotopieäquivalenz (M^\bullet und N^\bullet heißen dann auch homotopieäquivalent), falls ein Komplexhomomorphismus $\beta : N^\bullet \rightarrow M^\bullet$ existiert mit

$$\beta \circ \alpha \sim \text{id}_{M^\bullet} \quad \text{und} \quad \alpha \circ \beta \sim \text{id}_{N^\bullet}$$

(β heißt ein Homotopieinverses zu α).

Lemma 1.5. i. Homotopieäquivalenzen sind Quasi-Isomorphismen.

ii. ein Kompositum von Homotopieäquivalenzen ist eine Homotopieäquivalenz.

Nun gilt das folgende **grundlegende Prinzip**: Sei

$$F : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R')$$

ein Funktor. Er setzt sich fort zu einem Funktor

$$\begin{aligned} F : C(R) &\longrightarrow C(R') \\ (M^\bullet, d^\bullet) &\longmapsto (F(M^\bullet), F(d^\bullet)) . \end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß F *additiv* ist, d. h. $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$ (z. B. $F = \text{Hom}_R(X, \cdot)$). Dann respektiert F Homotopien und folglich Homotopieäquivalenzen.

2 Projektive Auflösungen

Satz 2.1. *Die Kategorie $\text{Mod}(R)$ besitzt genügend viele projektive Objekte, d. h. zu jedem R -Modul M gibt es einen projektiven R -Modul P und einen surjektiven R -Modulhomomorphismus $P \twoheadrightarrow M$.*

Beweis. Wähle ein Erzeugendensystem $\{m_i\}_{i \in I}$ von M und definiere

$$\begin{aligned} F &:= \bigoplus_{i \in I} R \twoheadrightarrow M \\ (r_i)_{i \in I} &\mapsto \sum_i r_i m_i . \end{aligned}$$

Der R -Modul F ist frei und somit insbesondere projektiv. □

Corollar 2.2. *Zu jedem R -Modul M gibt es eine exakte Sequenz von R -Moduln*

$$\dots \longrightarrow P^q \xrightarrow{d^q} \dots \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 ,$$

wobei alle P^q für $q \leq 0$ projektive R -Moduln sind.

Eine solche Sequenz heißt eine *projektive Auflösung* des Moduls M . Man sollte sie als einen Quasi-Isomorphismus von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P^q & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P^{-1} & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow & & \\ & & & & & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

auffassen.

Satz 2.3. Seien M und N zwei R -Moduln und $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ und $Q^\bullet \xrightarrow{\eta} N$ projektive Auflösungen; zu jedem R -Modulhomomorphismus $\alpha : M \rightarrow N$ gibt es genau eine Homotopieklasse $[\alpha^\bullet]$ von Komplexhomomorphismen $\alpha^\bullet : P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ mit $\eta \circ \alpha^0 = \alpha \circ \varepsilon$.

Corollar 2.4. Zu je zwei projektiven Auflösungen $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ und $Q^\bullet \xrightarrow{\eta} M$ gibt es genau eine Homotopieklasse $[\alpha^\bullet]$ von Homotopieäquivalenzen $\alpha^\bullet : P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P^\bullet & & \\ \downarrow \alpha^\bullet & \searrow \varepsilon & \\ & & M \\ & \nearrow \eta & \\ Q^\bullet & & \end{array} .$$

kommutativ ist.

Satz 2.5. Zu jeder kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

in $\text{Mod}(R)$ gibt es ein kommutatives exaktes Diagramm von projektiven Auflösungen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P^\bullet & \longrightarrow & Q^\bullet & \longrightarrow & T^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 . \end{array}$$

3 Ext- und Tor-Funktoren

Allgemeines Prinzip der Linksableitung von Funktoren:

Wir fixieren ein für alle Mal projektive Auflösungen

$$P_M^\bullet \xrightarrow{\varepsilon_M} M \quad \text{für jeden } R\text{-Modul } M$$

und Komplexhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} P_M^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_M} & M \\ \alpha^\bullet \downarrow & & \downarrow \alpha \\ P_N^\bullet & \xrightarrow{\varepsilon_N} & N \end{array}$$

für jeden R -Modulhomomorphismus α .

Sei nun $F : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R')$ ein *additiver* Funktor! Für $q \geq 0$ definieren wir

$$L^q F(M) := h^{-q}(F(P_M^\bullet)) \quad \text{und} \\ L^q F(\alpha) := h^{-q}(F(\alpha^\bullet)) : L^q F(M) \longrightarrow L^q F(N) .$$

Es gilt:

I) $L^q F : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R')$ ist ein Funktor; denn:

- Für $\alpha = \text{id}$ ist $\alpha^\bullet \sim \text{id}$, also $F(\alpha^\bullet) \sim F(\text{id}) = \text{id}$ und somit $h^{-q}(F(\alpha^\bullet)) = h^{-q}(\text{id}) = \text{id}$;
- für $L \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N$ ist $\alpha^\bullet \circ \beta^\bullet \sim (\alpha \circ \beta)^\bullet$ nach Satz 2.3, also $F(\alpha^\bullet) \circ F(\beta^\bullet) \sim F((\alpha \circ \beta)^\bullet)$ und somit $h^{-q}(F(\alpha^\bullet)) \circ h^{-q}(F(\beta^\bullet)) = h^{-q}(F((\alpha \circ \beta)^\bullet))$.

Definition. $L^q F$ heißt die q -te Linksableitung von F .

II) $L^q F$ ist additiv; denn:

- Aus $P_M^\bullet \oplus P_N^\bullet \sim P_{M \oplus N}^\bullet$ folgt $F(P_{M \oplus N}^\bullet) \sim F(P_M^\bullet \oplus P_N^\bullet) = F(P_M^\bullet) \oplus F(P_N^\bullet)$.

III) Ist P ein projektiver R -Modul, so ist $L^q F(P) = 0$ für alle $q > 0$; denn:

- $P_P^\bullet \sim (\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P)$.

IV) Die Funktoren $L^q F$ hängen bis auf kanonischen Isomorphismus nicht von der Wahl der P_M^\bullet und α^\bullet ab; denn:

- Satz 2.3.

V) Zu jeder exakten Sequenz $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N \longrightarrow 0$ von R -Moduln hat man eine lange exakte Sequenz von R' -Moduln

$$\dots \longrightarrow L^{q+1} F(N) \xrightarrow{\delta^{-(q+1)}} L^q F(L) \xrightarrow{L^q F(\beta)} L^q F(M) \\ \xrightarrow{L^q F(\alpha)} L^q F(N) \xrightarrow{\delta^{-q}} L^{q-1} F(L) \longrightarrow \dots ;$$

denn:

Definition. Der Funktor F heißt *rechtsexakt*, falls für jede kurze exakte Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ die Sequenz von R' -Moduln $F(L) \rightarrow F(M) \rightarrow F(N) \rightarrow 0$ exakt ist.

VII) Ist F rechtsexakt, so gilt $L^0 F = F$; denn:

- Betrachte die mittels einer projektiven Auflösung gebildete kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_M^{-1} / \text{im } d & \longrightarrow & P_M^0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & \nearrow d & & & \\ & & P_M^{-1} & & & & \end{array}$$

dann ist

$$\begin{array}{ccccccc} F(P_M^{-1} / \text{im } d) & \longrightarrow & F(P_M^0) & \longrightarrow & F(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & \nearrow F(d) & & & \\ & & F(P_M^{-1}) & & & & \end{array}$$

exakt mit surjektivem senkrechtem Pfeil, also

$$\begin{aligned} F(M) &\xleftarrow{\cong} \text{coker}(F(P_M^{-1} / \text{im } d) \longrightarrow F(P_M^0)) \\ &= \text{coker } F(d) = h^0(F(P_M^\bullet)) = L^0 F(M) . \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1. Ist F exakt, so gilt $L^q F = 0$ für alle $q > 0$.

Beweis. Mit

$$\dots \longrightarrow P_M^q \longrightarrow \dots \longrightarrow P_M^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ist auch

$$\dots \longrightarrow F(P_M^q) \longrightarrow \dots \longrightarrow F(M) \longrightarrow 0$$

exakt. □

Fazit: Für rechtsexaktes F messen die Linksableitungen $L^q F$, wie stark F davon abweicht, exakt zu sein.

Beispiel A: Sei Y ein R -Rechtsmodul. Dann liefert das Tensorprodukt den additiven Funktor

$$Y \otimes_R . : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(Z(R)) .$$

Definition. $\text{Tor}_q^R(Y, M) := L^q(Y \otimes_R \cdot)(M)$ heißt das q -te Torsionsprodukt von Y und M (oder einfach der q -te Tor-Funktor).

Satz 3.2. Der Funktor $Y \otimes_R \cdot$ ist rechtsexakt.

Beweis. Sei $0 \rightarrow L \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln, betrachte

$$Y \otimes_R L \xrightarrow{\text{id} \otimes \beta} Y \otimes_R M \xrightarrow{\text{id} \otimes \alpha} Y \otimes_R N \rightarrow 0 .$$

Vorab erinnern wir uns daran, daß jedes Element in $Y \otimes_R N$ eine endliche Summe von Elementen der Form $y \otimes n$ ist.

- 1) Aus $n = \alpha(m)$ folgt $y \otimes n = (\text{id} \otimes \alpha)(y \otimes m)$. Folglich ist $\text{id} \otimes \alpha$ surjektiv.
- 2) Es gilt $(\text{id} \otimes \alpha) \circ (\text{id} \otimes \beta) = \text{id} \otimes \alpha \circ \beta = \text{id} \otimes 0 = 0$ und damit $\text{im}(\text{id} \otimes \beta) \subseteq \ker(\text{id} \otimes \alpha)$.
- 3) Also bleibt zu zeigen, daß auch $\ker(\text{id} \otimes \alpha) \subseteq \text{im}(\text{id} \otimes \beta)$ gilt:

Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} Y \times N &\longrightarrow Y \otimes_R M / \text{im}(\text{id} \otimes \beta) \\ (y, n) &\longmapsto y \otimes m + \text{im}(\text{id} \otimes \beta), \quad \text{falls } \alpha(m) = n ; \end{aligned}$$

- ist wohldefiniert: aus $\alpha(\tilde{m}) = n$ folgt $\alpha(m - \tilde{m}) = 0$, also $m - \tilde{m} = \beta(\ell)$ für ein $\ell \in L$ und damit $y \otimes m - y \otimes \tilde{m} = y \otimes (m - \tilde{m}) = y \otimes \beta(\ell) \in \text{im}(\text{id} \otimes \beta)$;
- ist biadditiv: klar;
- ist balanciert: klar, da $rn = r\alpha(m) = \alpha(rm)$ und $y \otimes rm = yr \otimes m$.

Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes liefert die wohldefinierte $Z(R)$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : Y \otimes_R N &\longrightarrow Y \otimes_R M / \text{im}(\text{id} \otimes \beta) \\ y \otimes n &\longmapsto y \otimes m + \text{im}(\text{id} \otimes \beta), \quad \text{falls } \alpha(m) = n . \end{aligned}$$

Es gilt

$$f \circ (\text{id} \otimes \alpha)(y \otimes m) = f(y \otimes \alpha(m)) = y \otimes m + \text{im}(\text{id} \otimes \beta) .$$

Im Falle $y \otimes m \in \ker(\text{id} \otimes \alpha)$ folgt $y \otimes m + \text{im}(\text{id} \otimes \beta) = f(0) = \text{im}(\text{id} \otimes \beta)$ und somit also $\ker(\text{id} \otimes \alpha) \subseteq \text{im}(\text{id} \otimes \beta)$. \square

Insbesondere gilt also $\text{Tor}_0^R(Y, M) = Y \otimes_R M$.

Lemma 3.3. *Ist Q ein projektiver R -Rechtsmodul, so ist der Funktor $Q \otimes_R$ exakt.*

Beweis. Ist $Q \cong \bigoplus_{i \in I} R =: R^I$ frei, so folgt dies aus

$$Q \otimes_R M \cong R^I \otimes_R M = \bigoplus_i (R \otimes_R M) = \bigoplus_i M .$$

Allgemein sei $Q \oplus P \cong R^I$. Zu jeder exakten Sequenz von R -Linksmoduln $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ ist dann die linke Spalte in

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ R^I \otimes_R L & \cong & Q \otimes_R L & \oplus & P \otimes_R L & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ R^I \otimes_R M & \cong & Q \otimes_R M & \oplus & P \otimes_R M & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ R^I \otimes_R N & \cong & Q \otimes_R N & \oplus & R \otimes_R N & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

exakt. Dann müssen auch die mittlere und die rechte Spalte exakt der sein. \square

Corollar 3.4. $\text{Tor}_q^R(Y, M) = 0$ für alle $q > 0$, falls Y oder M projektiv ist.

Beweis. Ist M projektiv, so wende obigen Punkt III) an. Ist Y projektiv, so benutze Bem. 3.1 und Lemma 3.3. \square

Satz 3.5. *Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ von R -Rechtsmoduln hat man eine lange exakte Sequenz von $Z(R)$ -Moduln*

$$\begin{array}{c} \dots \rightarrow \text{Tor}_{q+1}^R(Z, M) \rightarrow \\ \text{Tor}_q^R(X, M) \rightarrow \text{Tor}_q^R(Y, M) \rightarrow \text{Tor}_q^R(Z, M) \rightarrow \dots \end{array}$$

Beweis. Betrachte die Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow X \otimes_R P_M^\bullet \rightarrow Y \otimes_R P_M^\bullet \rightarrow Z \otimes_R P_M^\bullet \rightarrow 0 .$$

Auf Grund von Lemma 3.3 (sinngemäß in der anderen Variablen) ist dies eine kurze exakte Sequenz von Komplexen. Wende nun Lemma 1.1 an. \square

Corollar 3.6. Sei $Q^\bullet \xrightarrow{\eta} Y$ eine projektive Auflösung von R -Rechtsmoduln; dann gilt

$$\mathrm{Tor}_p^R(Y, M) = h^{-p}(Q^\bullet \otimes_R M) .$$

Beweis. Bilde nach Satz 3.5 die langen exakten Sequenzen zu den kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \eta & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \ker d^{-1} & \longrightarrow & Q^{-1} & \longrightarrow & \mathrm{im} d^{-1} \longrightarrow 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker d^p & \longrightarrow & Q^p & \longrightarrow & \mathrm{im} d^p \longrightarrow 0 . \end{array}$$

Wegen Cor. 3.4 liefern diese Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_p^R(Y, M) &\cong \dots \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{im} d^{-p+1}, M) \\ &\cong \ker((\ker d^{-p+1}) \otimes_R M \xrightarrow{\subseteq \otimes \mathrm{id}} Q^{-p+1} \otimes_R M) \\ &\cong \ker((\mathrm{coker} d^{-p-1}) \otimes_R M \xrightarrow{d^p \otimes \mathrm{id}} Q^{-p+1} \otimes_R M) \\ &= \ker(\mathrm{coker}(d^{-p-1} \otimes \mathrm{id}) \xrightarrow{d^p \otimes \mathrm{id}} Q^{-p+1} \otimes_R M) \\ &= h^{-p}(Q^\bullet \otimes_R M) , \end{aligned}$$

wobei die zweitletzte Identität die Rechtsexaktheit des Funktors $\otimes_R M$ benutzt. \square

Woher kommt der Name Torsionsprodukt?

Wir betrachten dazu den Fall $R = \mathbb{Z}$, so daß $\mathrm{Mod}(R)$ übereinstimmt mit der Kategorie der abelschen Gruppen.

Definition. Sei M eine abelsche Gruppe; die Untergruppe aller Elemente endlicher Ordnung in M heißt die Torsionsgruppe $\mathrm{Tor}(M)$ von M .

Um den Funktor

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Q})$$

zu verstehen, betrachten wir auf der Menge $M \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation

$$(m, b) \sim (m', b'), \quad \text{falls ein } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ existiert mit } cb'm = cbm' .$$

Setze

$$\frac{m}{b} := \text{Äquivalenzklasse von } (m, b)$$

und

$$M_{\mathbb{Q}} := M \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} / \sim = \text{Menge aller \u00c4quivalenzklassen.}$$

Mittels

$$\frac{n}{a} + \frac{m}{b} := \frac{bn + am}{ab}$$

wird $M_{\mathbb{Q}}$ zu einer abelschen Gruppe. Dabei gilt:

a) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{Q}} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \\ \frac{m}{b} &\mapsto \frac{1}{b} \otimes m \\ \frac{am}{b} &\leftarrow \frac{a}{b} \otimes m \end{aligned}$$

sind zueinander inverse Isomorphismen von abelschen Gruppen;

b) der Kern des Homomorphismus

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \\ m &\longmapsto 1 \otimes m \end{aligned}$$

ist wegen a) gleich

$$\left\{ m \in M : \frac{m}{1} = 0 \right\} = \{ m \in M : cm = 0 \text{ f\u00fcr ein } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \} = \text{Tor}(M);$$

c) der Funktor $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ ist exakt; denn:

Wegen Satz 3.2 ist nur die Linksexaktheit zu zeigen. Sei also $\alpha : M \rightarrow N$ ein injektiver Homomorphismus von abelschen Gruppen, und sei $\frac{m}{b} \in M_{\mathbb{Q}}$ mit $\frac{\alpha(m)}{b} = 0$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\alpha(cm) = c\alpha(m) = cb \cdot 0 = 0$. Da α injektiv ist, folgt $cm = 0$, also $\frac{m}{b} = 0$ (*Warnung*: \mathbb{Q} ist nicht projektiv als \mathbb{Z} -Modul.)

Aus Lemma 3.3 und c) (zusammen mit Bem. 3.1) folgt, da\u00df

$$\text{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) = \text{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, M) = 0 \quad \text{f\u00fcr alle } q > 0 .$$

Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

und die nach Satz 3.5 zugeh\u00f6rige lange exakte Sequenz. Obige Verschwindungsaussage impliziert dann $\text{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M) = 0$ f\u00fcr $q \geq 2$ und

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, M) = \ker(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M) \stackrel{b)}{=} \text{Tor}(M) .$$

Wir haben bisher nur *kovariante Funktoren* F , also

$$\begin{aligned} M &\longmapsto F(M), \\ (\alpha : M \longrightarrow N) &\longmapsto (F(\alpha) : F(M) \longrightarrow F(N)) \\ &\text{mit } F(\text{id}) = \text{id}, F(\alpha \circ \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta), \end{aligned}$$

betrachtet. Genauso natürlich ist es aber, den Funktor "die Pfeile umdrehen zu lassen". Ein *kontravarianter Funktor* $G : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(R')$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M &\longmapsto G(M) \\ (\alpha : M \longrightarrow N) &\longmapsto (G(\alpha) : G(N) \longrightarrow G(M)) \\ &\text{mit } G(\text{id}) = \text{id}, G(\alpha \circ \beta) = G(\beta) \circ G(\alpha). \end{aligned}$$

Der Begriff der Linksableitung $L^q G$ funktioniert analog ("es drehen sich nur die Pfeile um"): Sei G ein additiver kontravarianter Funktor. Anwendung auf eine projektive Auflösung

$$\dots \longrightarrow P_M^q \longrightarrow \dots \longrightarrow P_M^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ergibt einen Komplex

$$0 \longrightarrow G(M) \longrightarrow G(P_M^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow G(P_M^q) \longrightarrow \dots,$$

dessen Terme sich in den Graden $-1, 0, \dots, -q, \dots$ befinden. Dann sind

$$L^q G(M) := h^{-q}(G(P_M^\bullet))$$

kontravariante Funktoren. Zu jeder kurzen exakten Sequenz von R -Moduln $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ hat man die lange exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\delta} L^q G(N) \longrightarrow L^q G(M) \longrightarrow L^q G(L) \xrightarrow{\delta} L^{q+1} G(N) \longrightarrow \dots$$

Definition. Der Funktor G heißt *rechtsexakt*, falls für jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ die Sequenz $0 \longrightarrow G(N) \longrightarrow G(M) \longrightarrow G(L)$ exakt ist.

Es gilt:

- 1) Ist G rechtsexakt, so $L^0 G = G$;
- 2) ist G exakt, so $L^q G = 0$ für alle $q > 0$.

Beispiel B: Sei Y ein R -Modul; dann ist

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(., Y) : \text{Mod}(R) &\longrightarrow \text{Mod}(Z(R)) \\ M &\longmapsto \text{Hom}_R(M, Y) \\ (\alpha : M \longrightarrow N) &\longmapsto (\text{Hom}_R(N, Y) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, Y)) \\ \beta &\longmapsto \beta \circ \alpha \end{aligned}$$

ein rechtsexakter additiver kontravarianter Funktor.

Definition. $\text{Ext}_R^q(M, Y) := L^q \text{Hom}_R(., Y)(M)$ heißt die q -te Ext-Gruppe von M und Y .

Zusammenfassung. 1) $\text{Ext}_R^q(., Y) : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Mod}(Z(R))$ ist ein additiver kontravarianter Funktor.

2) Für projektives P ist $\text{Ext}_R^q(P, Y) = 0$ für alle $q > 0$.

3) $\text{Ext}_R^0(M, Y) = \text{Hom}_R(M, Y)$.

4) Zu jeder kurzen exakten Sequenz von R -Moduln $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ hat man die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(N, Y) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Ext}_R^q(N, Y) \longrightarrow \text{Ext}_R^q(M, Y) \\ \longrightarrow \text{Ext}_R^q(L, Y) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^{q+1}(N, Y) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Satz 3.7. Zu jeder kurzen exakten Sequenz von R -Moduln $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ hat man eine lange exakte Sequenz von $Z(R)$ -Moduln

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, X) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Ext}_R^q(M, X) \longrightarrow \text{Ext}_R^q(M, Y) \\ \longrightarrow \text{Ext}_R^q(M, Z) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^{q+1}(M, X) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Beweis. Wir betrachte die Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P_M^\bullet, X) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_M^\bullet, Y) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_M^\bullet, Z) \longrightarrow 0 .$$

Aus der Projektivität von P_M^q folgt die Exaktheit des Funktors $\text{Hom}_R(P_M^q, .)$. Also haben wir oben eine kurze exakte Sequenz von Komplexen und wir können Lemma 1.1 anwenden. \square

Woher kommt der Name Ext?

Das Symbol Ext steht für "extension = Erweiterung". Eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow Y \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$ nennt man auch eine *Erweiterung*

von M mit Y . Zwei Erweiterungen $0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow Y \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$ von M mit Y heißen isomorph, falls ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

existiert. Setze

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R(M, Y) &:= \text{Menge aller Isomorphieklassen} \\ &\quad \text{von Erweiterungen von } M \text{ mit } Y . \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon = [0 \rightarrow Y \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0] \in \text{Ext}(M, Y)$. Betrachte die zugehörige lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_R(E, Y) \longrightarrow \text{Hom}_R(Y, Y) \\ &\xrightarrow{\delta_\varepsilon} \text{Ext}_R^1(M, Y) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Faktum. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R(M, Y) &\xrightarrow{\cong} \text{Ext}_R^1(M, Y) \\ \varepsilon &\longmapsto \delta_\varepsilon(\text{id}_Y) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Alle Ext-Gruppen $\text{Ext}_R^q(M, Y)$ haben eine konkrete Interpretation in ähnlicher Form.

4 Cartan-Eilenberg-Auflösungen

In diesem Abschnitt wollen wir eine weitgehende Verallgemeinerung von Satz 2.5 herleiten.

Lemma 4.1. Sei

$$\begin{array}{ccccccc} & & P' & & P'' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

ein exaktes Diagramm von R -Moduln, wobei P' und P'' projektiv seien; dies läßt sich stets ergänzen zu einem kommutativen exakten Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

mit projektivem P .

Beweis. Wir definieren $P := P' \oplus P''$. Dann ist

$$0 \longrightarrow P' \xrightarrow{\subseteq} P \xrightarrow{\text{pr}} P'' \longrightarrow 0,$$

eine kurze exakte Sequenz von projektiven Moduln. Das Kompositum

$$\begin{array}{ccc}
 P' & & \\
 \downarrow & \searrow \iota & \\
 M' & \longrightarrow & M,
 \end{array}$$

eine beliebig gewählte Liftung

$$\begin{array}{ccc}
 & & P'' \\
 & \swarrow \pi & \downarrow \\
 M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

sowie die Abbildung

$$\begin{aligned}
 P &\longrightarrow M \\
 (p', p'') &\longmapsto \iota(p') + \pi(p'')
 \end{aligned}$$

liefern die gewünschte Ergänzung. \square

Satz 4.2. Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ von R -Moduln und vorgegebenen projektiven Auflösungen $P'^{\bullet} \longrightarrow M'$ und $P''^{\bullet} \longrightarrow M''$ existiert eine projektive Auflösung $P^{\bullet} \longrightarrow M$ und ein kommutatives exaktes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & P'^{\bullet} & \longrightarrow & P^{\bullet} & \longrightarrow & P''^{\bullet} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Beweis. Wir konstruieren $P^\bullet \rightarrow M$ per Induktion nach q . Sei also

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P'^{q+1} & \longrightarrow & P^{q+1} & \longrightarrow & P''^{q+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P'^{q+2} & \longrightarrow & P^{q+2} & \longrightarrow & P''^{q+2} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P'^{q+3} & \longrightarrow & P^{q+3} & \longrightarrow & P''^{q+3} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

für ein $q \geq 0$ schon konstruiert. Auf Grund des Schlangenlemmas ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker(d_{P'}^{q+1}) \longrightarrow \ker(d_P^{q+1}) \longrightarrow \ker(d_{P''}^{q+1}) \longrightarrow 0$$

ist exakt (im Falle $q = 0$ sind die Kerne der Abbildungen in die Moduln M' bzw. M bzw. M'' zu nehmen). Mit Hilfe von Lemma 4.1 können wir dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P'^q & \dashrightarrow & P^q & \dashrightarrow & P''^q \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow d_{P'}^q & & \downarrow d_P^q & & \downarrow d_{P''}^q \\
0 & \longrightarrow & \ker(d_{P'}^{q+1}) & \longrightarrow & \ker(d_P^{q+1}) & \longrightarrow & \ker(d_{P''}^{q+1}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

mit einem projektiven Modul P^q wie angegeben ergänzen. □

Notation. Sei L^\bullet ein Komplex von R -Moduln; dann heißt

$$\begin{aligned}
z^q(L^\bullet) &:= \ker d^q && \text{der Modul der } q\text{-Cozykel von } L^\bullet \text{ und} \\
b^q(L^\bullet) &:= \operatorname{im} d^{q-1} && \text{der Modul der } q\text{-Coränder von } L^\bullet .
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$h^q(L^\bullet) = z^q(L^\bullet) / b^q(L^\bullet) .$$

Definition. Sei M^* ein Komplex von R -Moduln; eine projektive Cartan-Eilenberg-Auflösung von M^* ist eine exakte Sequenz von Komplexen

$$\dots \longrightarrow P^{*,q} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^{*,0} \longrightarrow M^* \longrightarrow 0$$

[d. h. ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & M^{p-1} & \longrightarrow & M^p & \longrightarrow & M^{p+1} & \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & P^{p-1,0} & \longrightarrow & P^{p,0} & \longrightarrow & P^{p+1,0} & \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cdots & \longrightarrow & P^{p-1,q} & \longrightarrow & P^{p,q} & \longrightarrow & P^{p+1,q} & \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

mit exakten Spalten und Komplexen in den Zeilen], so daß für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt:

- * $P^{p,\bullet} \longrightarrow M^p$ ist eine projektive Auflösung von M^p ,
- * $z^p(P^{*,\bullet}) \longrightarrow z^p(M^*)$ ist eine projektive Auflösung von $z^p(M^*)$,
- * $b^p(P^{*,\bullet}) \longrightarrow b^p(M^*)$ ist eine projektive Auflösung von $b^p(M^*)$,
- * $h^p(P^{*,\bullet}) \longrightarrow h^p(M^*)$ ist eine projektive Auflösung von $h^p(M^*)$.

Satz 4.3. Jeder Komplex M^* von R -Moduln besitzt eine projektive Cartan-Eilenberg-Auflösung.

Beweis. Wir schreiben abgekürzt

$$Z^p := z^p(M^*), \quad B^p := b^p(M^*), \quad H^p := h^p(M^*).$$

1. Schritt: Wir konstruieren projektive Auflösungen

$$P^\bullet(M^p), \quad P^\bullet(Z^p), \quad P^\bullet(B^p), \quad P^\bullet(H^p) \text{ der } R\text{-Moduln } M^p, \quad Z^p, \quad B^p, \quad H^p$$

zusammen mit kommutativen exakten Diagrammen

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{(i/p)} & 0 & \longrightarrow & P^\bullet(Z^p) & \longrightarrow & P^\bullet(M^p) & \longrightarrow & P^\bullet(B^{p+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & 0 & \longrightarrow & Z^p & \xrightarrow{\subseteq} & M^p & \xrightarrow{d_M^p} & B^{p+1} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

und

$$(ii/p) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P^\bullet(B^p) & \longrightarrow & P^\bullet(Z^p) & \longrightarrow & P^\bullet(H^p) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B^p & \xrightarrow{\subseteq} & Z^p & \xrightarrow{\text{pr}} & H^p \longrightarrow 0. \end{array}$$

wie folgt: Zunächst wähle $P^\bullet(B^p)$ und $P^\bullet(H^p)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Dann benutze Satz 4.2 zuerst, um $P^\bullet(Z^p)$ mit (ii/p), und anschließend, um $P^\bullet(M^p)$ mit (i/p) zu konstruieren.

2. Schritt: Wir definieren $P^{*,\bullet} := P^\bullet(M^*)$ und

$$\begin{array}{ccccccc} P^{p,\bullet} & \overset{d^{p,\bullet}}{\dashrightarrow} & & & P^{p+1,\bullet} \\ \parallel & & & & \parallel \\ P^\bullet(M^p) & \xrightarrow{i/p} & P^\bullet(B^{p+1}) & \xrightarrow{ii/p+1} & P^\bullet(Z^{p+1}) & \xrightarrow{i/p+1} & P^\bullet(M^{p+1}) . \end{array}$$

□

Bemerkung 4.4. *Man kann Homomorphismen, Homotopien zwischen Homomorphismen und Homotopieäquivalenzen zwischen projektiven Cartan-Eilenberg-Auflösungen definieren. Es gilt dann: Je zwei projektive Cartan-Eilenberg-Auflösungen des Komplexes M^* sind homotopieäquivalent mittels einer eindeutig bestimmten Homotopieklasse von Homomorphismen (vgl. [CE] Chap. XVII Prop. 1.2).*

Teil II

Spektralsequenzen

5 Filtrierte Komplexe

Sei M^\bullet ein Komplex von R -Moduln. Ein Unterkomplex $N^\bullet \subseteq M^\bullet$ ist eine Inklusion von Komplexen.

Definition. Eine Filtrierung von M^\bullet (M^\bullet heißt dann *filtriert*) ist eine absteigende Folge von Unterkomplexen

$$\dots \supseteq {}^p M^\bullet \supseteq {}^{p+1} M^\bullet \supseteq \dots \quad \text{für } p \in \mathbb{Z}$$

in M^\bullet , so daß gilt

$$M^q = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} {}^p M^q \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z} .$$

Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ hat man dann den Quotientenkomplex ${}^p M^\bullet / {}^{p+1} M^\bullet$.

Problemstellung. Kann man $h^q(M^\bullet)$ aus den $h^q({}^p M^\bullet / {}^{p+1} M^\bullet)$ berechnen?

Für $p, q, r \in \mathbb{Z}$ setze

$$\begin{aligned} Z_r^{pq} &:= \{x \in {}^p M^{p+q} : dx \in {}^{p+r} M^{p+q+1}\} = d^{-1}({}^{p+r} M^{p+q+1}) \cap {}^p M^{p+q} , \\ B_r^{pq} &:= d({}^{p-r} M^{p+q-1}) \cap {}^p M^{p+q} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Z_\infty^{pq} &:= z^{p+q}(M^\bullet) \cap {}^p M^{p+q} , \\ B_\infty^{pq} &:= b^{p+q}(M^\bullet) \cap {}^p M^{p+q} . \end{aligned}$$

Es gilt:

- ${}^p M^{p+q} = \dots = Z_0^{pq} \supseteq Z_1^{pq} \supseteq \dots \supseteq Z_\infty^{pq} \supseteq B_\infty^{pq} \supseteq \dots \supseteq B_1^{pq} \supseteq B_0^{pq} = d({}^p M^{p+q-1}) \supseteq B_{-1}^{pq} = d({}^{p+1} M^{p+q-1}) \supseteq \dots$
- $Z_{r-1}^{p+1, q-1} \subseteq Z_r^{pq}$ und $Z_\infty^{p+1, q-1} \subseteq Z_\infty^{pq}$.
- $B_r^{pq} = dZ_r^{p-r, q+r-1}$.

Wir definieren

$$E_r^{pq} := Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) \quad \text{für } r \in \mathbb{Z}$$

und

$$E_\infty^{pq} := Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1,q-1}) .$$

Es gilt:

d) Für $r \leq 0$ ist

$$\begin{aligned} E_r^{pq} &= {}^p M^{p+q} / (d({}^{p+1-r} M^{p+q-1}) + {}^{p+1} M^{p+q}) \\ &= {}^p M^{p+q} / {}^{p+1} M^{p+q} . \end{aligned}$$

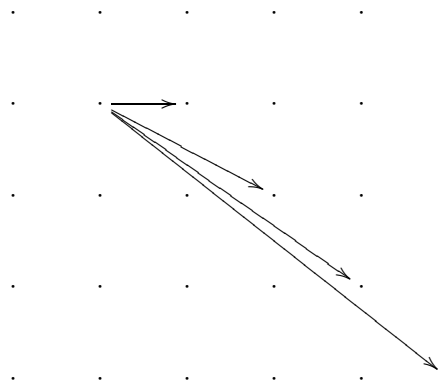
Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{pq} & \xrightarrow{d} & Z_r^{p+r,q-r+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1,q-1} & \xrightarrow{\quad} & dZ_{r-1}^{p+1,q-1} \stackrel{c)}{=} B_{r-1}^{p+r,q-r+1} \\ \parallel & & \\ c) & & \\ d(\dots) + Z_{r-1}^{p+1,q-1} & & \end{array}$$

ersehen wir, daß d einen Homomorphismus

$$d_r^{pq} : E_r^{pq} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1} .$$

induziert. Die folgende Graphik deutet die Richtung dieser Pfeile für $r \geq 1$ an:



Es gilt:

e) $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{pq} = 0$ (wegen $d \circ d = 0$).

f) $d_0^{pq} : {}^p M^{p+q} / {}^{p+1} M^{p+q} \xrightarrow{d} {}^p M^{p+q+1} / {}^{p+1} M^{p+q+1}$.

Definition. Die Familie $\{(E_r^{pq}, d_r^{pq})\}_{p, q, r \in \mathbb{Z}}$ heißt die Spektralsequenz zu M^\bullet .

Satz 5.1. Die Abbildung

$$E_{r+1}^{pq} \xrightarrow{\cong} \ker(d_r^{pq}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r, q+r-1})$$

$$x + (B_r^{pq} + Z_r^{p+1, q-1}) \mapsto (x + (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1})) + \operatorname{im}(d_r^{p-r, q+r-1})$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir berechnen zuerst die rechte Seite. Sei $x \in Z_r^{pq}$ mit $dx \in B_{r-1}^{p+r, q-r+1} + Z_{r-1}^{p+r+1, q-r} \stackrel{c)}{=} dZ_{r-1}^{p+1, q-1} + Z_{r-1}^{p+r+1, q-r}$, also $dx = dy + z$ mit $y \in Z_{r-1}^{p+1, q-1}$ und $z \in Z_{r-1}^{p+r+1, q-r}$. Für $u := x - y$ gilt dann $du = z \in Z_{r-1}^{p+r+1, q-r}$ und $u = x - y \in {}^p M^{p+q} + {}^{p+1} M^{p+q} = {}^p M^{p+q}$. Es folgt $u \in Z_{r+1}^{pq}$, also $x \in Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}$. Das zeigt

$$\ker(d_r^{pq}) = (Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}).$$

Weiter ist $d(Z_r^{p-r, q+r-1}) = B_r^{pq} \subseteq B_{r-1}^{pq}$ wegen c) und damit

$$\operatorname{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) = d(Z_r^{p-r, q+r-1}) + (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1})$$

$$= (B_r^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}).$$

Mit $Z_{r+1}^{pq} \supseteq B_r^{pq}$ und $Z_{r+1}^{pq} \cap Z_{r-1}^{p+1, q-1} = Z_r^{p+1, q-1}$ ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} \ker(d_r^{pq}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) &= (Z_{r+1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) / (B_r^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) \\ &= Z_{r+1}^{pq} / Z_{r+1}^{pq} \cap (B_r^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) \\ &= Z_{p+r}^{pq} / (B_r^{pq} + Z_r^{p+1, q-1}) \\ &= E_{r+1}^{pq}. \end{aligned}$$

□

Corollar 5.2. $E_1^{pq} = h^{p+q}({}^p M^\bullet / {}^{p+1} M^\bullet)$.

Wir definieren eine absteigende Filtrierung auf $h^q(M^\bullet)$ durch

$${}^p h^q(M^\bullet) := \operatorname{im}(h^q({}^p M^\bullet) \longrightarrow h^q(M^\bullet)).$$

Satz 5.3. Die Abbildung

$$E_\infty^{pq} \xrightarrow{\cong} {}^p h^{p+q}(M^\bullet) / {}^{p+1} h^{p+q}(M^\bullet)$$

$$x + \dots \mapsto x + \dots$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist klar, daß $Z_\infty^{pq} = \{x \in {}^p M^{p+q} : dx = 0\} \rightarrow h^{p+q}({}^p M^\bullet)$ surjektiv ist. Somit ist auch die Abbildung in der Behauptung surjektiv. Sei nun $x \in {}^p M^{p+q}$ mit $dx = 0$ und $x + \text{im}(d) \in {}^{p+1} h^{p+q}({}^p M^\bullet)$. Dann existiert ein $y \in {}^{p+1} M^{p+q}$ mit $dy = 0$ und $x - y = dz \in B_\infty^{pq}$. Folglich gilt $x \in B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}$. \square

Die Cohomologiegruppen $h^{p+q}({}^p M^\bullet)$ bauen sich aus den E_r^{pq} wie folgt auf. Zunächst haben wir das kommutative exakte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & {}^{p+1} h^{p+q}({}^p M^\bullet) & \longrightarrow & {}^p h^{p+q}({}^p M^\bullet) & \longrightarrow & E_\infty^{pq} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & h^{p+q}({}^{p+1} M^\bullet) & \longrightarrow & h^{p+q}({}^p M^\bullet) & \longrightarrow & h^{p+q}({}^p M^\bullet / {}^{p+1} M^\bullet) \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \parallel \text{5.2} \\
 & & & & & & E_1^{pq},
 \end{array}$$

wobei der Zusammenhang zwischen den beiden rechten äußeren Termen sukzessive durch die E_r^{pq} approximiert wird:

$$\begin{array}{c}
 (+) \quad E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) \\
 \downarrow \\
 Z_r^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) \\
 \uparrow \\
 Z_r^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}) \\
 \uparrow \\
 E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1})
 \end{array}$$

Definition. Die Filtrierung auf M^\bullet heißt regulär, falls zu jedem $q \in \mathbb{Z}$ ein $n(q) \in \mathbb{Z}$ existiert mit ${}^{n(q)} M^q = 0$.

Im Folgenden setzen wir die Filtrierung stets als regulär voraus. Dann ist

$${}^p M^q = 0 \quad \text{für } p \geq n(q).$$

Es gilt:

- g) $Z_r^{pq} = Z_\infty^{pq}$ für $r \geq n(p+q+1) - p$;
denn: Aus $x \in Z_r^{pq}$ folgt $dx \in {}^{p+q} M^{p+q+1} = 0$.
- h) Für $s \geq r \geq n(p+q+1) - p$ haben wir (vgl. (+)) das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 E_r^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}) & \longrightarrow & E_s^{pq} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}) &
 \end{array}$$

- i) $\lim_{\rightarrow r \geq n(p+q+1)-q} E_r^{pq} = E_\infty^{pq}$;
denn: Wegen h) bedeutet die Behauptung, daß zu jedem $s \geq n(p+q+1) - 1$ und jedem $e \in \ker(E_s^{pq} \rightarrow E_\infty^{pq})$ ein $t \geq s$ mit $e \in \ker(E_s^{pq} \rightarrow E_t^{pq})$ existiert. Dies folgt sofort aus $B_\infty^{pq} = \bigcup_{s \gg 0} B_s^{pq}$.
- j) Ist $E_r^{pq} = 0$, so auch $E_s^{pq} = 0$ für alle $s \geq r$ und damit $E_\infty^{pq} = 0$;
denn: Satz 5.1 und h).

Satz 5.4. Die Filtrierung auf M^\bullet sei regulär; weiter existiere ein $r \in \mathbb{Z}$ und zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ ein $q(n) \in \mathbb{Z}$ mit

$$E_r^{n-q, q} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und alle } q \neq q(n) ;$$

dann gilt

$$h^n(M^\bullet) \cong E_\infty^{n-q(n), q(n)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

(Man sagt in diesem Fall: Die Spektralsequenz degeneriert.)

Beweis. Aus j) folgt $E_r^{n-q, q} = E_s^{n-q, q} = E_\infty^{n-q, q} = 0$ für alle $s \geq r$ und $q \neq q(n)$. Wegen Satz 5.3 verschwinden also in der Filtrierung von $h^n(M^\bullet)$ alle Schritte außer dem $(n - q(n))$ -ten, und dieser ist gleich $E_\infty^{n-q(n), q(n)}$. Nun ist aber einerseits $\bigcup_p {}^p h^n(M^\bullet) = h^n(M^\bullet)$. Andererseits ist ${}^p h^n(M^\bullet) = 0$ für $p \gg 0$ wegen der Regularität der Filtrierung von M^\bullet . Also folgt $h^n(M^\bullet) = E_\infty^{n-q(n), q(n)}$. \square

6 Doppelkomplexe

Definition. Ein Doppelkomplex $M^{\bullet\bullet}$ ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & M^{i,j+1} & \xrightarrow{d_I^{i,j+1}} & M^{i+1,j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \uparrow d_{II}^{i,j} & & \uparrow d_{II}^{i+1,j} & & \\
\cdots & \longrightarrow & M^{i,j} & \xrightarrow{d_I^{i,j}} & M^{i+1,j} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

für $i, j \in \mathbb{Z}$, in welchem alle Spalten und Zeilen Komplexe sind.

Beispiel. Cartan-Eilenberg-Auflösungen.

Zu jedem Doppelkomplex $M^{\bullet\bullet}$ ist der assoziierte *Totalkomplex* $\text{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ definiert durch

$$\begin{aligned} \text{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) &:= \bigoplus_{i+j=n} M^{ij} \\ \text{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) = \bigoplus_{i+j=n} M^{ij} &\xrightarrow{d^n} \bigoplus_{i+j=n+1} M^{ij} = \text{Tot}^{n+1}(M^{\bullet\bullet}) \\ (x^{ij})_{i+j=n} &\longmapsto (d_I^{i-1,j} x^{i-1,j} + (-1)^i d_{II}^{i,j-1} x^{i,j-1})_{i+j=n+1}. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe. Rechne die Komplexeigenschaft von $\text{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ nach.

Der Doppelkomplex besitzt zwei Filtrierungen:

- 1. Filtrierung nach den Spalten (“beginne mit der p -ten Spalte”):

$${}^p_I M^{ij} := \begin{cases} M^{ij} & \text{für } i \geq p, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- 2. Filtrierung nach den Zeilen (“beginne mit der p -ten Zeile”):

$${}^p_{II} M^{ij} := \begin{cases} M^{ij} & \text{für } j \geq p, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies führt zu entsprechenden Filtrierungen des Totalkomplexes.

- 1. Filtrierung: ${}^p_I \text{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) := \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \geq p}} M^{ij}$
- 2. Filtrierung: ${}^p_{II} \text{Tot}^n(M^{\bullet\bullet}) := \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ j \geq p}} M^{ij}$

Definition. Ein Doppelkomplex $M^{\bullet\bullet}$ heißt nach oben beschränkt, wenn $r, s \in \mathbb{Z}$ existieren mit $M^{ij} = 0$ für $i > r$ oder $j > s$.

Bemerkung 6.1. Ist $M^{\bullet\bullet}$ nach oben beschränkt, so sind beide Filtrierungen von $\text{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ regulär.

Betrachten wir die Spektralsequenz zur 1. Filtrierung genauer:

$$\begin{aligned} {}^p_I \text{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) / {}^{p+1}_I \text{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) &= \bigoplus_{\substack{i+j=p+q \\ i \geq p}} M^{ij} / \bigoplus_{\substack{i+j=p+q \\ i \geq p+1}} M^{ij} \\ &= M^{pq} \end{aligned}$$

(hier sehen wir den Grund für unsere Nummerierungskonvention in §5) und

$$\begin{array}{ccc} {}^p \text{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) / {}^{p+1} \text{Tot}^{p+q}(M^{\bullet\bullet}) & \xrightarrow{d} & {}^p \text{Tot}^{p+q+1}(M^{\bullet\bullet}) / {}^{p+1} \text{Tot}^{p+q+1}(M^{\bullet\bullet}) \\ \parallel & & \parallel \\ M^{pq} & \xrightarrow{(-1)^p d_{II}^{pq}} & M^{p,q+1}. \end{array}$$

Aus Cor. 5.2 folgt ${}_I E_1^{pq} = h_{II}^q(M^{p,\bullet})$, wobei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} {}_I E_1^{pq} & \xrightarrow{d_1^{pq}} & {}_I E_1^{p+1,q} \\ \parallel & & \parallel \\ h_{II}^q(M^{p,\bullet}) & \xrightarrow{h_{II}^q(d_1^{p,\bullet})} & h_{II}^q(M^{p+1,\bullet}) \end{array}$$

kommutativ ist. Somit erhalten wir folgenden Sachverhalt.

Lemma 6.2. ${}_I E_1^{pq} = h_{II}^q(M^{p,\bullet})$ und ${}_I E_2^{pq} = h_I^p(h_{II}^q(M^{\bullet\bullet}))$.

Das entsprechende Ergebnis für die Spektralsequenz zur 2. Filtrierung lautet wie folgt.

Lemma 6.3. ${}_{II} E_1^{pq} = h_I^q(M^{\bullet,p})$ und ${}_{II} E_2^{pq} = h_{II}^p(h_I^q(M^{\bullet\bullet}))$.

Anwendung 6.4. *Es gelte*

- a. $M^{ij} = 0$ für $i \gg 0$ oder $j > 0$;
- b. alle Spalten des Doppelkomplexes $M^{\bullet\bullet}$ seien exakt in den Graden < 0 .

Betrachte nun die Spektralsequenz zur 1. Filtrierung von $\text{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$: Wegen a) ist die 1. Filtrierung regulär. Wegen b) und Lemma 6.2 gilt ${}_I E_2^{pq} = 0$ für $q \neq 0$. Also

$$\begin{array}{ccccccc} {}_I E_2^{pq} : \dots & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \dots \\ & & & & & & & \searrow & & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & & & & & & \searrow & & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Folglich ist ${}_I E_2^{n,0} = {}_I E_\infty^{n,0}$. Mit Satz 5.4 ergibt sich

$$\begin{aligned} h^n(\text{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})) &= {}_I E_2^{n,0} \\ &= h^n(\dots \longrightarrow \text{coker} \begin{pmatrix} M^{\bullet,0} \\ \uparrow d_{II} \\ M^{\bullet,-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_I} \text{coker} \begin{pmatrix} M^{\bullet,0} \\ \uparrow d_{II} \\ M^{\bullet,-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \dots) \end{aligned}$$

Gilt sogar

- c. alle Spalten von $M^{\bullet\bullet}$ sind exakt,
- so ist $\text{Tot}^\bullet(M^{\bullet\bullet})$ exakt.

Teil III

Dimensionsbegriffe für Moduln

7 Projektive Dimension

Definition. Eine projektive Auflösung $P^\bullet \rightarrow M$ des R -Moduls M heißt von der Länge $\leq n$, falls $P^q = 0$ gilt für alle $q < -n$.

Satz 7.1. Sei M ein R -Modul und $n \geq 0$; dann sind äquivalent:

- i. $\text{Ext}_R^{n+1}(M, X) = 0$ für alle R -Moduln X ;
- ii. in jeder exakten Sequenz von R -Moduln

$$0 \rightarrow L \rightarrow P^{-(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

mit projektiven $P^0, \dots, P^{-(n-1)}$ ist auch L projektiv;

- iii. M besitzt eine projektive Auflösung der Länge $\leq n$.

Beweis. i. \implies ii. Wir spalten die gegebene exakte Sequenz auf in kurze exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow L^{q-1} \rightarrow P^q \rightarrow L^q \rightarrow 0$$

mit $L^0 := M$ und $L^{-n} := L$. Die zugehörigen langen exakten Sequenzen ergeben

$$\text{Ext}_R^1(L, X) \cong \text{Ext}_R^2(L^{-(n-1)}, X) \cong \dots \cong \text{Ext}_R^{n+1}(M, X) = 0$$

für alle X . Betrachte nun ein Testdiagramm

$$\begin{array}{ccc} & & L \\ & \swarrow \beta' & \downarrow \beta \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & Z \longrightarrow 0 \end{array}$$

Für $X := \ker \alpha$ erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(L, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(L, Z) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(L, X) = 0 \\ \beta' & \longmapsto & \beta \end{array}$$

Also ist L projektiv.

Die Implikationen ii. \implies iii. und iii. \implies i. sind klar. □

Definition. $\text{pd}_R(M) := \min\{n \geq 0 : \text{Ext}_R^{n+1}(M, X) = 0 \text{ für alle } X\}$ heißt die projektive Dimension des R -Moduls M .

Corollar 7.2. i. $\text{pd}_R(M) = 0$ genau dann, wenn M projektiv ist.

ii. Für jedes $n > \text{pd}_R(M)$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^n(M, X) &= 0 && \text{für jeden } R\text{-Linksmodul } X \text{ und} \\ \text{Tor}_N^R(Y, M) &= 0 && \text{für jeden } R\text{-Rechtsmodul } Y. \end{aligned}$$

Beweis. Satz 7.1.iii. □

Definition. $\text{l.gldim}(R) := \sup\{\text{pd}_R(M) : M \text{ beliebiger } R\text{-Linksmodul}\}$ heißt die linke globale Dimension des Ringes R .

Beispiel. $\text{l.gldim}(R) = 0$ genau dann, wenn R halbeinfach ist.

Beweis. Wegen Cor. 7.2.i gilt $\text{l.gldim}(R) = 0$ genau dann, wenn alle R -(Links) Moduln projektiv sind.

- 1) Seien alle R -Moduln projektiv. Betrachte eine Inklusion von Moduln $N \subseteq M$ und dazu das Testdiagramm

$$\begin{array}{ccc} & M/N & \\ & \swarrow \text{pr} & \downarrow \text{id} \\ M & \xrightarrow{\text{pr}} & M/N \longrightarrow 0. \end{array}$$

Also ist N ein direkter Summand von M . Dies zeigt, daß R halbeinfach ist.

- 2) Umgekehrt sei nun R halbeinfach. Wir betrachten ein beliebiges Testdiagramm

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow \sigma \circ \alpha & \downarrow \alpha \\ M & \xrightarrow{\beta} & L \longrightarrow 0. \\ & \swarrow \sigma & \end{array}$$

Da $\ker(\beta)$ ein direkter Summand von M ist, existiert ein $\sigma : L \rightarrow M$ mit $\beta \circ \sigma = \text{id}_L$. Dann gilt $\beta \circ (\sigma \circ \alpha) = \alpha$. Also ist P projektiv. □

Definition. $\text{id}_R(N) := \min\{n \geq 0 : \text{Ext}_R^{n+1}(Y, N) = 0 \text{ für alle } Y\}$ heißt die injektive Dimension des R -Moduls N .

Satz 7.3.

$$\begin{aligned} \text{l.gldim}(R) &= \min\{n \geq 0 : \text{Ext}_R^{n+1}(M, N) = 0 \text{ für alle } R\text{-Linksmoduln } M, N\} \\ &= \sup\{\text{id}_R N : N \text{ beliebiger } R\text{-Linksmodul}\}. \end{aligned}$$

Theorem. (ohne Beweis) Sei $R = S[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Variablen über dem kommutativen Ring S ; dann gilt:

$$\text{gldim}(R) = \text{gldim}(S) + n.$$

8 Kohärente Ringe

Definition. Ein R -Modul M heißt endlich-präsentiert, falls eine exakte Sequenz

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ existiert.

Lemma 8.1. *i. Jeder endlich-präsentierte Modul ist endlich-erzeugt.*

ii. Jeder endlich-erzeugte projektive Modul ist endlich-präsentiert.

iii. Ist R noethersch, so ist jeder endlich-erzeugte Modul endlich-präsentiert.

Lemma 8.2. *Sei M endlich-präsentiert; in jeder exakten Sequenz $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit endlich-erzeugtem N ist auch L endlich-erzeugt.*

Beweis. Wir finden ein kommutatives exaktes Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} R^m & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Aus dem Schlangenlemma folgt $\text{coker}(\beta) = \text{coker}(\alpha)$. Mit N ist also auch $\text{coker}(\beta)$ endlich-erzeugt. Daraus folgt wiederum, daß L endlich-erzeugt ist. \square

Lemma 8.3. *i. Für eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ gilt:*

a) mit L und N ist auch M endlich-präsentiert;

b) ist M endlich-präsentiert und L endlich-erzeugt, so ist N endlich-präsentiert;

ii. sei $M = L \oplus N$; dann ist M endlich-präsentiert genau dann, wenn L und N endlich-präsentiert sind.

Beweis. i.a) Wir haben ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R^{m_1} & \longrightarrow & R^{m_1+n_2} & \longrightarrow & R^{n_2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker & \longrightarrow & \ker & \longrightarrow & \ker \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq & & \downarrow \subseteq \\ 0 & \longrightarrow & R^{n_1} & \longrightarrow & R^{n_1+n_2} & \longrightarrow & R^{n_2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

(vgl. Beweis von Lemma 4.1).

i.b) Jetzt haben wir ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R^\ell & & \\
 & & \searrow & & \\
 & & & & R^m \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & R^n \\
 & & & \xrightarrow{\subseteq} & \\
 & & \tilde{L} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & 0
 \end{array}$$

und somit eine exakte Sequenz der Form

$$R^{m+\ell} \longrightarrow R^n \longrightarrow N \longrightarrow 0 .$$

ii. Dies folgt aus i. □

Definition. Ein endlich-präsentierter Modul M heißt kohärent, wenn jeder endlich-erzeugte Untermodul von M ebenfalls endlich-präsentiert ist.

Lemma 8.4. Jeder endlich-erzeugte Untermodul eines kohärenten Moduls ist kohärent.

Satz 8.5. Für eine exakte Sequenz von R -Moduln $0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$ gilt:

- i. Ist L endlich-erzeugt und M kohärent, so ist N kohärent;
- ii. mit je zwei Moduln ist auch der dritte kohärent.

Beweis. i. Sei $N_0 \subseteq N$ ein endlich-erzeugter Untermodul (dies schließt insbesondere $N_0 = N$ ein). Mit L ist dann auch $\beta^{-1}(N_0)$ endlich-erzeugt. Wegen der Kohärenz von M ist $\beta^{-1}(N_0)$ also sogar endlich-präsentiert. Mit Hilfe von Lemma 8.3.i.b) folgt dann, daß N_0 endlich-präsentiert ist.

ii. 1. Fall: Seien M und N kohärent. Wegen Lemma 8.2 ist L endlich-erzeugt und wegen Lemma 8.4 dann auch kohärent. 2. Fall: Seien L und N kohärent. Sei $M_0 \subseteq M$ ein endlich-erzeugter Untermodul (insbesondere auch $M_0 = M$). Dann ist $\beta(M_0) \subseteq N$ ein endlich-erzeugter Untermodul und ist damit endlich-präsentiert. Wegen Lemma 8.2 ist $L \cap M_0$ ein endlich-erzeugter Untermodul in L und ist damit endlich-präsentiert. Schließlich impliziert Lemma 8.3.i.a), daß M_0 endlich-präsentiert ist. □

Corollar 8.6. i. Sei $\alpha : M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus zwischen kohärenten R -Moduln; dann sind auch $\ker(\alpha)$, $\operatorname{im}(\alpha) \cong M / \ker(\alpha)$ und $\operatorname{coker}(\alpha)$ kohärente R -Moduln.

- ii. Eine endliche direkte Summe von kohärenten R -Moduln ist kohärent.
- iii. Seien $L \subseteq N$ und $M \subseteq N$ kohärente Untermoduln des kohärenten R -Moduls N ; dann sind auch die Untermoduln $L + M$ und $L \cap M$ kohärent.

Beweis. i. Als Faktormodul von M ist $\text{im}(\alpha)$ endlich-erzeugt und damit wegen Lemma 8.4 sogar kohärent. Mit Hilfe der exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \ker(\alpha) \longrightarrow M \longrightarrow \text{im}(\alpha) \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \text{im}(\alpha) \longrightarrow N \longrightarrow \text{coker}(\alpha) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

und Satz 8.5.ii folgt dann die Kohärenz von $\ker(\alpha)$ und $\text{coker}(\alpha)$.

- ii. Dies folgt per Induktion aus Satz 8.5.ii.
- iii. Nach ii. ist $L \oplus M$ kohärent. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} L \oplus M &\xrightarrow{\alpha} N \\ (x, y) &\longmapsto x + y . \end{aligned}$$

Nach i. sind $\ker(\alpha) = L \cap M$ und $\text{im}(\alpha) = L + M$ kohärent. □

Definition. Der Ring R heißt (links) kohärent, falls R als R -Linksmodul kohärent ist.

Satz 8.7. Sei R ein kohärenter Ring; ein R -Modul M ist kohärent genau dann, wenn er endlich-präsentiert ist.

Beweis. Die eine Richtung gilt per definitionem. Sei also M endlich-präsentiert, d. h., es existiert eine exakte Sequenz der Form $R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Nach Cor. 8.6.ii sind R^m und R^n kohärent. Wegen Cor. 8.6.i ist dann auch $M \cong \text{coker}(\alpha)$ kohärent. □

Bemerkung 8.8. Über einem kohärenten Ring R gelten Lemma 8.4, Satz 8.5 und Cor. 8.6 sinngemäß für endlich-präsentierte Moduln.

Beispiele. a. Noethersche Ringe sind kohärent.

- b. Ist S noethersch, so sind die Ringe

$$R := S[x_1, x_2, \dots] \quad \text{und} \quad R := S[[x_1, x_2, \dots]]$$

kohärent (aber nicht noethersch, falls die Anzahl der Variablen unendlich ist).

- c. Bewertungsringe sind kohärent.

Ergänzung zum Thema "projektive Auflösungen": Sei R ein kohärenter Ring.

- A) Jeder endlich-präsentierte R -Modul M besitzt projektive Auflösungen

$$P^\bullet \longrightarrow M ,$$

in welchen alle P^q ebenfalls endlich-präsentiert sind. (Im Folgenden werden wir kurz von einer *endlich-präsentierten projektiven Auflösung* sprechen.) Denn: Zunächst finden wir eine exakte Sequenz

$$R^{m_0} \longrightarrow P^0 := R^{n_0} \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 .$$

Nach Cor. 8.6 ist P^0 kohärent. Aus Satz 8.5 folgt dann, daß $\ker(\alpha_0)$ endlich-präsentiert ist. Also finden wir eine exakte Sequenz

$$R^{n_1} \longrightarrow P^{-1} := R^{n_1} \xrightarrow{\alpha_1} \ker(\alpha_0) \longrightarrow 0 .$$

Diese Argumentation induktiv wiederholend erhalten wir die gewünschte projektive Auflösung.

B) Sei M^* ein Komplex von endlich-präsentierten R -Moduln. Einerseits impliziert Cor. 8.6.i, daß alle $z^q(M^*)$, $b^q(M^*)$, $h^q(M^*)$ endlich-präsentierte R -Moduln sind. Andererseits bleibt Satz 4.2 wegen Cor. 8.6.ii richtig für endlich-präsentierte projektive Auflösungen. Mit Hilfe dieser beiden Tatsachen folgert man leicht (unter Benutzung von **A**): M^* besitzt eine "endlich-präsentierte" Cartan-Eilenberg-Auflösung

$$P^{*,\bullet} \longrightarrow M^* ,$$

d. h. eine Cartan-Eilenberg-Auflösung, so daß

$$\begin{aligned} P^{p,\bullet} &\longrightarrow M^p \\ z^p(P^{*,\bullet}) &\longrightarrow z^p(M^*) \\ b^p(P^{*,\bullet}) &\longrightarrow b^p(M^*) \\ h^p(P^{*,\bullet}) &\longrightarrow h^p(M^*) \end{aligned}$$

sämtlich endlich-präsentierte projektive Auflösungen sind.

9 Dualität

Für jeden R -Linksmodul M haben wir

- den R -Rechtsmodul $\text{Hom}_R(M, R)$ – das *Dual* von M ,
- den R -Linksmodul $\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, R), R)$ – das *Bidual* von M , sowie
- sowie den R -Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \delta_M : M &\longrightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, R), R) \\ x &\longmapsto [\ell \mapsto \ell(x)] \end{aligned}$$

als die zugehörige *Bidualitätsabbildung*.

Satz 9.1. *Für jeden endlich-erzeugten projektiven R -Linksmodul P gilt:*

- i. $\text{Hom}_R(P, R)$ ist ein endlich-erzeugter projektiver R -Rechtsmodul;

ii. die Bidualitätsabbildung $\delta_P : P \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(P, R), R)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $R^n = P \oplus Q$. Aus der Additivität des Hom-Funktors folgt

$$\text{Hom}_R(P, R) \oplus \text{Hom}_R(Q, R) = \text{Hom}_R(R^n, R) = \text{Hom}_R(R, R)^n = R^n$$

und damit i. Weiter folgt die Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} P \oplus Q & \xrightarrow{\delta_P \oplus \delta_Q} & \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(P, R), R) \oplus \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(Q, R), R) \\ \parallel & & \parallel \\ R^n & \xrightarrow{\delta_{R^n}} & \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(R^n, R), R) \\ \parallel & & \parallel \\ R^n & \xrightarrow[\cong]{(\delta_R)^n} & \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(R, R), R)^n. \end{array}$$

Da δ_R offensichtlich ein Isomorphismus ist, ist es also auch δ_P . \square

Für den Rest des Paragraphen sei R ein links- und rechtskohärenter Ring, M ein endlich-präsentierter R -Linksmodul und

$$Q^* \longrightarrow M$$

eine endlich-präsentierte projektive Auflösung von M .

Wegen Satz 9.1.i ist

$$\text{Hom}_R(Q^{-*}, R)$$

ein Komplex von endlich-präsentierten projektiven R -Rechtsmoduln. Wir wählen eine endlich-präsentierte Cartan-Eilenberg-Auflösung

$$P^{*, \bullet} \longrightarrow \text{Hom}_R(Q^{-*}, R)$$

und erhalten so einen Doppelkomplex (A):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Hom}_R(M, R) & \dashrightarrow & \text{Hom}_R(Q^0, R) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(Q^{-1}, R) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(Q^{-p}, R) \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & P^{0,0} & \longrightarrow & P^{1,0} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow P^{p,0} \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & P^{0,-1} & \longrightarrow & P^{1,-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow P^{p,-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & P^{0,q} & \longrightarrow & P^{1,q} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow P^{p,q} \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Wir setzen

$$\widehat{P}^{p,q} := \text{Hom}_R(P^{-p,-q}, R)$$

und erhalten dann den Doppelkomplex (B):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & \widehat{P}^{p,q} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \widehat{P}^{-1,q} & \longrightarrow & \widehat{P}^{0,q} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cdots & \longrightarrow & \widehat{P}^{p,1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \widehat{P}^{-1,1} & \longrightarrow & \widehat{P}^{0,1} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & \widehat{P}^{p,0} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \widehat{P}^{-1,0} & \longrightarrow & \widehat{P}^{0,0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \cdots & \longrightarrow & Q^p & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q^{-1} & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Man beachte hierzu, daß wegen Satz 9.1.ii die Identität

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Q^p, R), R) = Q^p$$

gilt.

Wir analysieren nun die Spektralsequenz zu dem Doppelkomplex (B):

1. Filtrierung: Alle (erweiterten) Spalten von (A) sind per Konstruktion exakt und bestehen aus projektiven R -Rechtsmoduln (benutze Satz 9.1.i für die Top-Terme). Daraus folgt

$$h^q(\widehat{P}^{p,\bullet}) = \mathrm{Ext}_R^q(\underbrace{\mathrm{Hom}_R(Q^p, R)}_{\text{projektiv}}, R) = \begin{cases} 0 & \text{für } q > 0, \\ Q^p & \text{für } q = 0. \end{cases}$$

Wir sehen, daß in (B) alle (erweiterten) Spalten ebenfalls exakt sind. Mit Lemma 6.2 ergibt sich also

$${}_I E_2^{pq} = h_I^p(h_I^q((B))) = \begin{cases} 0 & \text{für } q > 0, \\ h^p(Q^\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{für } q = 0, p < 0, \\ M & \text{für } q = p = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Da die 1. Filtrierung (“beginne mit p -ter Spalte”) regulär ist, erhalten wir mit Hilfe von §5.i), daß

$${}_I E_2^{pq} = {}_I E_r^{pq} = {}_I E_\infty^{pq} = \begin{cases} M & \text{für } p = q = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $r \geq 2$, und mit Satz 5.4 schließlich

$$h^n(\text{Tot}^\bullet((B))) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kommentar: In diesem sehr indirekten Sinne der Einbeziehung aller höheren Ext-Gruppen $\text{Ext}_R^*(M, R)$ gilt also doch eine Art Bidualitätssatz.

2. Filtrierung: Zunächst betrachten wir eine feste Zeile $P^{*,q}$ in (A). Nach Konstruktion sind $z^p(P^{*,q})$, $b^p(P^{*,q})$ und $h^p(P^{*,q})$ projektiv. Also ist

$$P^{*,q} \cong b^p(P^{*,q}) \oplus h^p(P^{*,q}) \oplus b^{p-1}(P^{*,q}) .$$

Wegen der Additivität von $\text{Hom}_R(\bullet, R)$ erhalten wir daraus

$$\text{Hom}_R(h^p(P^{*,q}), R) = h_I^{-p}(\widehat{P}^{*, -q}) .$$

Nach Konstruktion ist $h_I^p(P^{*, \bullet})$ eine projektive Auflösung von

$$h^p(\text{Hom}_R(Q^{-\bullet}, R)) = \text{Ext}_R^p(M, R) .$$

Wir folgern

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^q(\text{Ext}_R^p(M, R), R) &= h^q(\text{Hom}_R(h^p(P^{*, -\bullet}), R)) \\ &= h_{II}^q(h_I^{-p}(\widehat{P}^{*, \bullet})) \\ &= {}_{II} E_2^{q, -p} , \end{aligned}$$

wobei die letzte Identität Lemma 6.3 benutzt.

Resultat 9.2.

$${}_{II} E_2^{pq} = \text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^{-q}(M, R), R)$$

Die 2. Filtrierung induziert auf $M = h^0(\text{Tot}^\bullet((B)))$ eine absteigende Filtrierung

$$\Delta^p(M) := {}^p h^0(\text{Tot}^\bullet((B)))$$

mit

$$M = \Delta^0(M) \supseteq \Delta^1(M) \supseteq \dots$$

und (Satz 5.3)

$$\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) \cong E_\infty^{p, -p} .$$

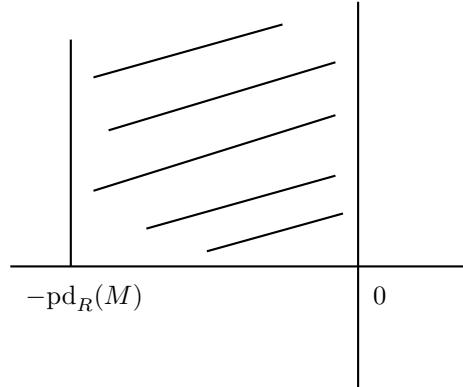
Bemerkung 9.3. Ist M endlich-präsentiert mit $\text{pd}_R(M) < \infty$, so besitzt M eine endlich-präsentierte projektive Auflösung der Länge $\text{pd}_R(M)$.

Beweis. Sei $Q^* \rightarrow M$ eine beliebige endlich-präsentierte projektive Auflösung, und sei $n := \text{pd}_R(M)$. Dann ist

$$0 \rightarrow P := \ker(d^{-(n-1)}) \rightarrow Q^{-(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow Q^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine Auflösung wie gewünscht. Wegen Satz 7.1 ist P nämlich projektiv und wegen Cor. 8.6.i endlich-präsentiert. \square

Wir setzen nun zusätzlich $\text{pd}_R(M) < \infty$ voraus und stellen die obigen Überlegungen an mit einer endlich-präsentierten projektiven Auflösung von M der Länge $\text{pd}_R(M)$. In diesem Falle ist auch die 2. Filtrierung zu (B) regulär. Genauer gilt: Der Komplex ${}^p \text{Tot}^\bullet(B)$ beginnt im Grade $\geq p - \text{pd}_R(M)$.



Satz 9.4. Sei M endlich-präsentiert mit $\text{pd}_R(M) < \infty$; dann gilt

$$M = \Delta^0(M) \supseteq \Delta^1(M) \supseteq \dots \supseteq \Delta^{\text{pd}_R(M)}(M) \supseteq \Delta^{\text{pd}_R(M)+1}(M) = 0,$$

diese Filtrierung ist unabhängig von der gewählten Auflösung $Q^* \rightarrow M$ der Länge $\text{pd}_R(M)$ und

$$\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) = \text{Subquotient von } \text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R).$$

Beweis. Nach obiger Diskussion gilt

$${}^p \text{Tot}^\bullet(B) = 0 \quad \text{und damit} \quad \Delta^p(M) = 0 \quad \text{für } p > \text{pd}_R(M).$$

Die Unabhängigkeit der Filtrierung ergibt sich mit Hilfe der Homotopietheorie für Cartan-Eilenberg-Auflösungen (vgl. [God] Thm. I.4.3.1). Die Aussage über den Subquotienten folgt aus Satz 5.1, §5.h) und Resultat 9.2. \square

Zusatz. $\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R) = {}_{II}E_2^{p, -p}$ hat den Subquotienten

$${}_{II}E_{\text{pd}_R(M)+2}^{p, -p} = \dots = {}_{II}E_\infty^{p, -p} = \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) .$$

Insbesondere: $M/\Delta^1(M) = {}_{II}E_{\text{pd}_R(M)+1}^{0,0} \subseteq {}_{II}E_2^{0,0} = \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, R), R)$ ist die Bidualitätsabbildung δ_M .

Definition. Für endlich-präsentiertes M mit $\text{pd}_R(M) < \infty$ heißt $\Delta^p(M)$ die Dimensionsfiltrierung von M .

Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}$. Nach dem Hauptsatz über abelsche Gruppen haben wir $M = F \oplus E$ mit $F \cong \mathbb{Z}^n$ und endlichem E . Also

$$\delta_M : M \xrightarrow{\text{pr}} M/E \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) .$$

Aus obigem Zusatz folgt also $\Delta^1(M) = E$. Wegen $\text{gldim}(\mathbb{Z}) = 1$ ist $\text{pd}_{\mathbb{Z}}(M) \leq 1$ und damit $\Delta^2(M) = 0$. Also:

$$\begin{array}{c} M \\ \uparrow \\ \Delta^1(M) = \text{Torsionsuntergruppe} = \text{alle Elemente endlicher Ordnung} \\ \uparrow \\ \Delta^2(M) = 0 . \end{array}$$

Ist $\text{l.gldim}(R) < \infty$, so besitzt also jeder endlich-präsentierter R -Modul M die Dimensionsfiltrierung. Allgemeiner gilt das unter folgender schwächerer Voraussetzung.

Definition. Ein linkskohärenter Ring R heißt linksregulär, wenn $\text{pd}_R(I) < \infty$ für jedes endlich-erzeugte Linksideal $I \subseteq R$.

Bemerkung 9.5. In jeder kurzen exakten Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ hat mit irgend zwei Moduln auch der dritte endliche projektive Dimension.

Beweis. Betrachte zugehörige lange exakte Ext-Sequenz. □

Satz 9.6. Ist R linksregulär, so gilt $\text{pd}_R(M) < \infty$ für jeden endlich-präsentierten R -Modul M .

Beweis. Per Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden (mit Hilfe von Bem. 9.5) genügt es, ein M zu betrachten, welches von einem Element x erzeugt wird. Dann ist die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & & & r \longmapsto & & rx . \end{array}$$

exakt. Nach Lemma 8.2 ist I endlich-erzeugtes Linksideal. Nach Voraussetzung haben also I und R endlich projektive Dimension. Aus Bem. 9.5 folgt schließlich $\text{pd}_R(M) < \infty$. \square

Beispiele. 1. Sei R kommutativ noethersch lokal mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Dann:

$$R \text{ regulär} \iff \text{Krulldim}(R) = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) .$$

In diesem Falle gilt: $\text{gldim}(R) = \text{pd}_R(R/\mathfrak{m}) = \text{Krulldim}(R)$.

Vgl. [Eis] §10.3, Cor. 19.5., Cor. 19.6, Thm. 19.12 - Theorie des Koszul-Komplexes.

2. Sei R kommutativ noethersch. Dann:

$$R \text{ regulär} \iff R_{\mathfrak{m}} \text{ regulär für alle maximalen Ideale } \mathfrak{m} \subseteq R .$$

In diesem Falle gilt:

$$\begin{aligned} \text{gldim}(R) &= \sup_{\mathfrak{m}} \text{gldim}(R_{\mathfrak{m}}) = \sup_{\mathfrak{m}} \text{Krulldim}(R_{\mathfrak{m}}) \\ &= \text{Krulldim}(R) . \end{aligned}$$

Vgl. [Bas] Cor. III. 6.6 und Prop. III. 6.7.

3. Sei $m \geq 1$ und $G_m := \ker(\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$. Der komplettierte Gruppenring $R := \mathbb{Z}_p[[G_m]]$ ist links- und rechts-noethersch und links- und rechtsregulär mit $\text{l.gldim}(R) = \text{r.gldim}(R) = 5$.

10 Stufe und Codimension eines Moduls

Sei R stets links- und rechtskohärent, und sei $M \neq 0$ ein endlich-präsentierter R -Linksmodul endlicher projektiver Dimension $d := \text{pd}_R(M) < \infty$!

Lemma 10.1.

$$\text{Ext}_R^d(M, R) \neq 0 .$$

Beweis. Wir werden die Annahme $\text{Ext}_R^d(M, R) = 0$ zum Widerspruch führen.

1. *Fall:* Sei $d = 0$. Nach Cor. 7.2 ist M endlich-erzeugt projektiv. Also ist δ_M wegen Satz 9.1 ein Isomorphismus. Daraus ergibt sich der Widerspruch $M = 0$.

2. *Fall:* Sei $d > 0$. Aus der Additivität des Funktors $\text{Ext}_R^d(M, \bullet)$ folgt

$$\text{Ext}_R^d(M, R^m) = 0 \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} .$$

Zu jeder exakten Sequenz $0 \rightarrow L \rightarrow R^m \rightarrow N \rightarrow 0$ ist

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_R^d(M, R^m) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^d(M, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^{d+1}(M, L) \\ \parallel & & & & \parallel \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

exakt. Folglich gilt $\text{Ext}_R^d(M, N) = 0$ für jeden endlich-erzeugten R -Modul N . Sei nun N ein beliebiger R -Modul. Schreibe $N = \cup_{i \in I} N_i$, wobei N_i alle endlich-erzeugten Untermodul von N durchläuft. Da M endlich-erzeugt ist, gilt

$$\text{Hom}_R(M, N) = \bigcup_{i \in I} \text{Hom}_R(M, N_i)$$

und ebenso für alle Terme in einer endlich-präsentierten projektiven Auflösung von M . Das impliziert $\text{Ext}_R^d(M, N) = \varinjlim_i \text{Ext}_R^d(M, N_i) = 0$ und damit den Widerspruch $\text{pd}_R(M) < d$. \square

Definition. Für einen beliebigen R -Links- oder Rechtsmodul N heißt

$$j(N) := \min\{q \geq 0 : \text{Ext}_R^q(N, R) \neq 0\}$$

die Stufe (the grade) von N (kann $= \infty$ sein).

Aus Lemma 10.1 folgt

$$0 \leq j(M) \leq \text{pd}_R(M) .$$

Um eine bessere obere Abschätzung zu bekommen, betrachten wir die Dimensionsfiltrierung

$$M = \Delta^0(M) \supseteq \Delta^1(M) \supseteq \dots \supseteq \Delta^d(M) \supseteq \Delta^{d+1}(M) = 0 .$$

Definition. $\gamma(M) := \max\{p \geq 0 : \Delta^p(M) = M\}$ heißt die Codimension von M .

Wegen $M \neq 0$ ist $0 \leq \gamma(M) \leq d = \text{pd}_R(M)$.

Lemma 10.2. $j(M) \leq \gamma(M) \leq \text{pd}_R(M)$.

Beweis. Nach Satz 9.4 ist $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$ ein Subquotient von

$$\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R) .$$

Folglich ist $\Delta^p(M) = \Delta^{p+1}(M)$ für $p < j(M)$, also $M = \Delta^0(M) = \dots = \Delta^{j(M)}(M)$ und damit $j(M) \leq \gamma(M)$. \square

Bemerkung 10.3. Für alle $p \geq 0$ gilt:

- i. $\Delta^p(M)$ und $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$ sind endlich-präsentierte R -Linksmoduln;
- ii. $\text{Ext}_R^p(M, R)$ ist ein endlich-präsentierter R -Rechtsmodul.

Beweis. Das folgt aus Cor. 8.6 und Satz 9.1. \square

Definition. Man sagt, der Modul M erfüllt die Gorenstein-Bedingung, falls für alle endlich-erzeugten Untermoduln N von $\text{Ext}_R^p(M, R)$ und von $\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^q(M, R), R)$ mit beliebigen $p, q \geq 0$ gilt

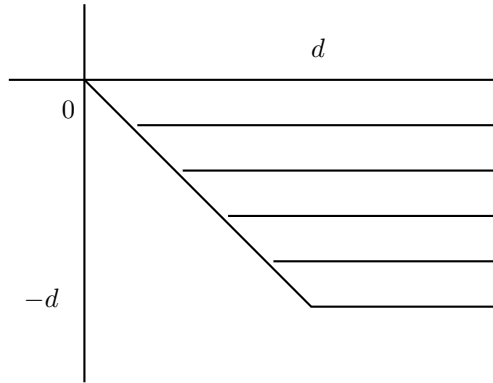
$$j(N) \geq p .$$

Satz 10.4. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so gilt:*

- i. $\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^q(M, R), R) = 0$ für $p < q$;
- ii. $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$ ist ein Untermodul von $\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R)$,
- iii. $j(M) = \gamma(M)$.

Beweis. i. Wir haben $j(\text{Ext}_R^q(M, R)) \geq q$.

ii. Aus i. folgt, daß das ${}_{II}E_2^{pq}$ -Tableau aus dem Resultat 9.2 nichtverschwindende Terme nur in dem schraffierten Bereich besitzt:



Folglich ist ${}_{II}E_{r \geq 2}^{p, -p} \subseteq {}_{II}E_2^{p, -p}$. Die Behauptung folgt daraus mit Hilfe des Zusatzes zu Satz 9.4.

iii. Die Gorenstein-Bedingung für den Untermodul in ii. liefert

$$j(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) \geq p .$$

Per Induktion mit Hilfe der langen exakten Ext-Sequenz folgt daraus $j(\Delta^p(M)) \geq p$. Wegen $\Delta^{\gamma(M)}(M) = M$ gilt also $j(M) \geq \gamma(M)$ und somit wegen Lemma 10.2 sogar $j(M) = \gamma(M)$. \square

Definition. *Der Ring R heißt Auslander-linksregulär, wenn gilt:*

- R ist links- und rechtskohärent,
- R ist linksregulär,
- jeder endlich-präsentierte R -Linksmodul erfüllt die Gorenstein-Bedingung.

Beispiele. 1. Sei R ein kommutativer regulärer noetherscher lokaler Ring und $M \neq 0$ ein endlich-erzeugter R -Modul. Setze $n := \text{gldim}(R)$ und $m := \text{Krulldim}(M)$. In [BH] Cor. 3.5.11 finden sich folgende Aussagen:

- i. $j(M) + m = n$;
- ii. $\text{Krulldim}(\text{Ext}_R^p(M, R)) \leq n - p$.

Sei nun $N \subseteq \text{Ext}_R^p(M, R)$ ein Untermodul. Dann ist

$$\text{Krulldim}(N) \leq \text{Krulldim}(\text{Ext}_R^p(M, R))$$

und somit

$$\begin{aligned} j(N) &\stackrel{i.}{=} n - \text{Krulldim}(N) \geq n - \text{Krulldim}(\text{Ext}_R^p(M, R)) \\ &\stackrel{ii.}{\geq} n - (n - p) = p . \end{aligned}$$

Folglich ist R Auslander-regulär mit

$$\text{gldim}(R) - \text{Krulldim}(M) = \gamma(M) = j(M)$$

(daher der Name Codimension).

2. Sei R ein kommutativer regulärer noetherscher Ring. Für jeden endlich-erzeugten R -Modul N und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ gilt

$$\text{Ext}_R^p(N, R)_{\mathfrak{m}} = \text{Ext}_{R_{\mathfrak{m}}}^p(N_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}})$$

und somit

$$j(N) = \min_{\mathfrak{m}} j(N_{\mathfrak{m}}) .$$

Mit R sind auch alle $R_{\mathfrak{m}}$ regulär. Also ist R Auslander-regulär.

3. $R = \mathbb{Z}_p[[G_m]]$ für die Gruppen G_m aus §9 Beispiel 3 ist Auslander-links- und rechtsregulär.

Bemerkung 10.5. Für jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ von R -Links- oder Rechtsmoduln gilt

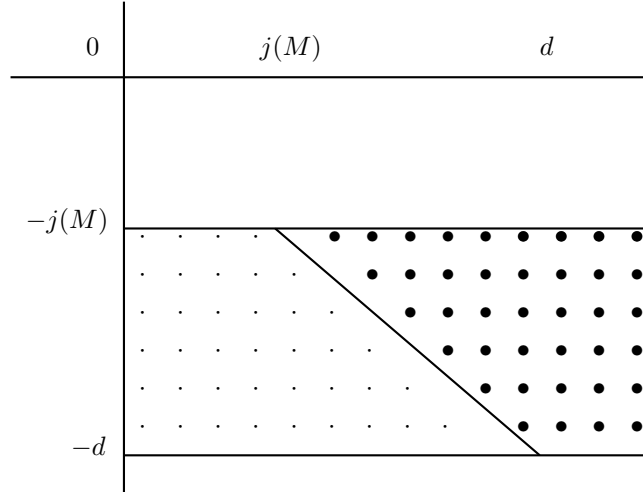
$$j(N) \geq \min(j(N'), j(N''))$$

und

$$j(N'') \geq \min(j(N'), j(N)) .$$

Beweis. Betrachte die lange exakte Ext-Sequenz. □

Sei $E_r^{pq} := {}_{II}E_r^{pq}$ die Spektralsequenz aus dem Resultat 9.2. Auf Grund der Definition von $j(M)$ sieht das Tableau E_2^{pq} und damit alle Tableaus für $r \geq 2$ so aus:



mit nichtverschwindenden Termen höchstens in den punktierten Bereichen. Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so können nichtverschwindende Terme wegen Satz 10.4.i sogar nur in dem fett punktierten Bereich auftreten. Nach Bem. 10.3.ii sind alle Terme E_r^{pq} endlich-präsentiert.

Lemma 10.6. *Für jedes $r \geq 2$ hat man eine exakte Sequenz von R -Moduln*

$$0 \longrightarrow E_{r+1}^{p, -j(M)} \xrightarrow{\subseteq} E_r^{p, -j(M)} \xrightarrow{d_r} S_r^p := \text{im}(d_r) \subseteq E_r^{p+r, -j(M)-r+1} ;$$

erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so gilt $j(S_r^p) \geq p + r$.

Beweis. Man vergleiche das Subquotientenargument im Beweis des nachfolgenden Satzes 10.12. \square

Lemma 10.7. *M erfülle die Gorenstein-Bedingung; für jedes $p > j(M)$ gilt dann*

$$j(E_r^{p, -j(M)}) \geq p + r \quad \text{für alle } r \geq 2 .$$

Beweis. Nach Satz 5.3 ist $E_\infty^{p, -j(M)}$ ein Subquotient von $h^{p-j(M)}(\text{Tot}^\bullet((B)))$, wobei (B) der in §9 eingeführte Doppelkomplex ist. Dort wurde auch gezeigt, daß die Co-homologie von $\text{Tot}^\bullet((B))$ in allen Graden $\neq 0$ verschwindet. Also folgt $E_\infty^{p, -j(M)} = 0$ für $p > j(M)$. Aus der Form der Tableaus ergibt sich dann $E_r^{p, -j(M)} = E_\infty^{p, -j(M)} = 0$ für alle genügend grossen r . Eine absteigende Induktion nach r unter Benutzung von Lemma 10.6 und Bem. 10.5 liefert schliesslich die Behauptung. \square

Definition. *Ein R -Links- oder Rechtsmodul N heißt rein, falls gilt*

$$\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(N, R), R) = 0 \quad \text{für alle } p \neq j(N) .$$

Bemerkung 10.8. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung und ist M rein, so gilt*

$$M = \Delta^{j(M)}(M) \supsetneq \Delta^{j(M)+1}(M) = 0 .$$

Beweis. Das folgt aus Satz 10.4.ii. □

Satz 10.9. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so ist der R -Rechtsmodul $N := \text{Ext}_R^{j(M)}(M, R)$ rein von der Stufe $j(N) = j(M)$.*

Beweis. Wir haben $\text{Ext}_R^p(N, R) = E_2^{p, -j(M)}$. Aus Lemma 10.7 folgt

$$\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(N, R), R) = 0 \quad \text{für } p > j(M) .$$

Andererseits ist $\text{Ext}_R^p(N, R) = 0$ für $p < j(M)$ wegen Satz 10.4.i. Nach Satz 10.4.ii und iii. gilt schließlich $\text{Ext}_R^{j(M)}(N, R) \neq 0$. Also ist $j(N) = j(M)$. □

Bemerkung 10.10. *Erfüllt M die Gorenstein-Bedingung, so gilt*

$$\Delta^d(M) = \text{Ext}_R^d(\text{Ext}_R^d(M, R), R) .$$

Beweis. Aus der Form der Tableaus ergibt sich $E_2^{d, -d} = E_{r \geq 2}^{d, -d} = E_\infty^{d, -d} = \Delta^d(M)$. □

Für den Rest des Paragraphen sei R Auslander-links- und rechtsregulär!

Lemma 10.11. *$\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R)$ ist entweder $= 0$ oder rein von der Stufe p .*

Beweis. Setze $N := \text{Ext}_R^p(M, R)$. Nach Bem. 10.3.ii ist N endlich-präsentiert. Aus der Gorenstein-Bedingung für M folgt $j(N) \geq p$. Sei nun

$$\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R) \neq 0 ,$$

also $j(N) = p$. Wegen Satz 10.9 (für N statt M) ist dann $\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R) = \text{Ext}_R^{j(N)}(N, R)$ rein von der Stufe $j(N) = p$. □

Satz 10.12. *$\Delta^p(M) = \Delta^{p+1}(M)$ genau dann, wenn $\text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R) = 0$.*

Beweis. Die Implikation von rechts nach links folgt aus Satz 10.4.ii. Umgekehrt gelte $\Delta^p(M) = \Delta^{p+1}(M)$. Aus der Form der Tableaus ergeben sich für $r \geq 2$ einerseits exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow E_{r+1}^{p, -p} \longrightarrow E_r^{p, -p} \twoheadrightarrow T_r^p \subseteq E_r^{p+r, -p-r+1}$$

und andererseits

$$E_r^{p+r, -p-r+1} = \text{Subquotient nach endlich-erzeugten Untermoduln von } E_2^{p+r, -p-r+1} .$$

Also ist auch

$$T_r^p = \text{Subquotient nach endlich-erzeugten Untermoduln von } E_2^{p+r, -p-r+1} .$$

Die Gorenstein-Bedingung impliziert, daß jeder endlich-erzeugte Untermodul von $E_2^{p+r, -p-r+1}$ eine Stufe $\geq p+r$ besitzt. Wegen Bem. 10.5 gilt also

$$j(T_r^p) \geq p+r \geq p+2 .$$

Der Zusatz zu Satz 9.4 ergibt $E_{d+2}^{p, -p} = 0$. Eine absteigende Induktion nach r unter Beachtung von Bem. 10.5 liefert nun

$$j(E_2^{p, -p}) \geq p+2 .$$

Wegen Lemma 10.11 muss also $E_2^{p, -p} = 0$ gelten. \square

Lemma 10.13. *i. Für endlich-erzeugte Untermoduln $M_1 \subseteq M_0 \subseteq M$ gilt*

$$j(M_0/M_1) \geq j(M) .$$

ii. Für jeden endlich-erzeugten Untermodul $M_0 \subseteq M$ gilt

$$j(M) = \min(j(M_0), j(M/M_0)) .$$

Beweis. i. Wegen Bem. 10.5 können wir $M_1 = 0$ annehmen. Wir betrachten die Filtrierung

$$M_0 = \Delta^{\gamma(M)}(M) \cap M_0 \supseteq \Delta^{\gamma(M)+1}(M) \cap M_0 \supseteq \dots \supseteq \Delta^{d+1}(M) \cap M_0 = 0 .$$

Wegen Bem. 10.3 und Cor. 8.6.iii ist dies eine Filtrierung durch endlich-erzeugte Untermoduln. Also ist $\frac{\Delta^p(M) \cap M_0}{\Delta^{p+1}(M) \cap M_0}$ isomorph zu einem endlich-erzeugtem Untermodul von $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) \subseteq \text{Ext}_R^p(\text{Ext}_R^p(M, R), R)$. Aus der Gorenstein-Bedingung folgt dann

$$j\left(\frac{\Delta^p(M) \cap M_0}{\Delta^{p+1}(M) \cap M_0}\right) \geq p ,$$

und Induktion unter Benutzung von Bem. 10.5 $j(M_0) \geq \gamma(M)$. Der Satz 10.4.iii ergibt schliesslich $j(M_0) \geq j(M)$.

ii. Dies folgt aus i. und Bem. 10.5. \square

Satz 10.14. *i. $\Delta^p(M)$ ist endlich-präsentiert einer Stufe $\geq p$.*

ii. Für jeden endlich-erzeugten Untermodul $L \subseteq M$ gilt $j(L) \geq p$ genau dann, wenn $L \subseteq \Delta^p(M)$.

iii. Für jeden endlich-erzeugten Untermodul $L \subseteq M$ gilt

$$\Delta^p(L) = \Delta^p(M) \cap L .$$

iv. $\Delta^p(M/\Delta^p(M)) = 0$, d. h. $M/\Delta^p(M)$ besitzt keine endlich-erzeugten Untermoduln $\neq 0$ einer Stufe $\geq p$.

v. $\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) = 0$ oder ist rein von der Stufe p .

Beweis. i. Nach Bem. 10.3.i ist $\Delta^p(M)$ endlich-präsentiert. Mit Hilfe des Beweises von Satz 10.4.iii folgt dann $j(\Delta^p(M)) \geq p$.

ii. Für die Implikation von rechts nach links bemerken wir, daß i. und Lemma 10.13.i für $\Delta^p(M)$ (statt M) zusammen $j(L) \geq j(\Delta^p(M)) \geq p$ implizieren. Für die Umkehrung halten wir zunächst fest, daß die Funktorialität der Spektralsequenz $\Delta^p(L) \subseteq \Delta^p(M)$ impliziert. Andererseits ist $\gamma(L) \geq p$ nach Satz 10.4.iii und damit $L = \Delta^p(L)$. Beides zusammen ergibt $L \subseteq \Delta^p(M)$.

iii. Wieder die Funktorialität der Spektralsequenz ergibt $\Delta^p(L) \subseteq \Delta^p(M) \cap L$. Nach Cor. 8.6.iii ist $\Delta^p(M) \cap L$ endlich-erzeugt in $\Delta^p(M)$. Anwendung von ii. auf M und dann L ergibt zuerst $j(\Delta^p(M) \cap L) \geq p$ und anschließend $\Delta^p(M) \cap L \subseteq \Delta^p(L)$.

iv. Sei $L \subseteq M$ das Urbild von $\Delta^p(M/\Delta^p(M))$, so daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Delta^p(M) \longrightarrow L \longrightarrow \Delta^p(M/\Delta^p(M)) \longrightarrow 0 ,$$

exakt ist. Insbesondere ist L endlich-erzeugt. Aus i. und Bem. 10.5 folgt $j(L) \geq \min(p, p) = p$. Aus ii. folgt dann weiter $L \subseteq \Delta^p(M)$ und somit $\Delta^p(M/\Delta^p(M)) = 0$. Wieder wegen ii. besitzt also $M/\Delta^p(M)$ keinen endlich-erzeugten Untermodul $\neq 0$ einer Stufe $\geq p$.

v. (Man beachte, daß alle auftretenden Moduln endlich-präsentiert sind.) Unter Benutzung von iii. und iv. erhalten wir

$$\Delta^{p+1}(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) = \Delta^{p+1}(M/\Delta^{p+1}(M)) \cap \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) = 0 .$$

Wegen iii. gilt andererseits

$$\Delta^p(\Delta^p(M)) = \Delta^p(M) \cap \Delta^p(M) = \Delta^p(M) .$$

Die Funktorialität der Spektralsequenz zeigt, daß

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p(M) & \longrightarrow & \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M) \\ \parallel & & \uparrow \subseteq \\ \Delta^p(\Delta^p(M)) & \longrightarrow & \Delta^p(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) \end{array}$$

Folglich ist $\Delta^p(\Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)) = \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$. Der Modul

$$N := \Delta^p(M)/\Delta^{p+1}(M)$$

erfüllt also

$$N = \Delta^0(N) = \dots = \Delta^p(N) \supseteq \Delta^{p+1}(N) = 0$$

Aus Satz 10.12 erhalten wir deswegen $\text{Ext}_R^q(\text{Ext}_R^q(N, R), R) = 0$ für alle $q \neq p$. Im Falle $N \neq 0$ folgt $\gamma(N) = p$ und damit $j(N) = p$ wegen Satz 10.4.iii. \square

Bemerkung 10.15. Der Modul M heißt Cohen-Macaulay, falls gilt

$$j(M) = \text{pd}_R(M) .$$

In diesem Falle ist das E_2 -Tableau der Spektralsequenz eine einzige Zeile und damit

$$\text{Ext}_R^d(\text{Ext}_R^d(M, R), R) = E_2^{d, -d} = E_\infty^{d, -d} = M .$$

Insbesondere ist M rein von der Stufe d .

Wir verschärfen unsere Voraussetzungen noch etwas und setzen R als **links- und rechtsnoethersch mit $\mu := \text{l.gldim}(R) < \infty$ und Auslander-links- und rechtsregulär** voraus.

Bemerkung 10.16. $\mu = \text{id}_R(R)$.

Beweis. Wegen Satz 7.3 gilt $\text{id}_R(R) \leq \mu$. Nach Lemma 10.1 ist $\text{pd}_R(M) \leq \text{id}_R(R)$ für jeden endlich-erzeugten R -Modul M . Schließlich gilt (vgl. [McL] Cor. VII 1.5)

$$\mu = \sup\{\text{pd}_R(M) : M \text{ endlich-erzeugt}\} .$$

□

Definition. Ein endlich-erzeugter R -Modul $M \neq 0$ heißt *holonom*, falls gilt

$$j(M) = \mu .$$

Ist M holonom, so ist M Cohen-Macaulay mit

$$j(M) = \text{pd}_R(M) = \text{l.gldim}(R) .$$

Nach Bem. 10.15 ist dann

$$M = \text{Ext}_R^\mu(\text{Ext}_R^\mu(M, R), R) .$$

Lemma 10.17. Sei M endlich-erzeugt und $0 \subsetneq M_0 \subsetneq M$; dann ist M holonom genau dann, wenn M_0 und M/M_0 holonom sind.

Beweis. Wegen Lemma 10.13 ist $j(M) = \min(j(M_0), j(M/M_0))$. Außerdem haben wir $j(M), j(M_0), j(M/M_0) \leq \mu$ nach Lemma 10.1. □

Satz 10.18. Jeder holonome R -Modul M ist von endlicher Länge.

Beweis. Nach Satz 2.16 ist zu zeigen, daß M artinsch ist. Sei also $M \supsetneq M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots$ eine echt absteigende Folge von Untermoduln. Wegen Bem. 10.3.ii ist $\text{Ext}_R^\mu(M, R)$ ein endlich-erzeugter R -Rechtsmodul. Nach Lemma 10.17 sind alle M_i und M/M_i holonom. Somit sind die Sequenzen

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^\mu(M/M_i, R) \longrightarrow \text{Ext}_R^\mu(M, R) \longrightarrow \text{Ext}_R^\mu(M_i, R) \longrightarrow 0$$

exakt. Folglich bilden die $\text{Ext}_R^\mu(M/M_i, R)$ eine echt aufsteigende Folge von Untermoduln in $\text{Ext}_R^\mu(M, R)$. Diese muß abbrechen und damit auch die ursprüngliche Folge. □

Teil IV

Filtrierte Ringe

11 Grundbegriffe

Definition. Ein Ring R (assoziativ mit Eins) heißt *filtrierter Ring*, falls eine aufsteigende Folge

$$\dots \subseteq F_n R \subseteq F_{n+1} R \subseteq \dots$$

für $n \in \mathbb{Z}$ von additiven Untergruppen von R gegeben ist mit $1 \in F_0 R$ und

$$F_n R \cdot F_m R \subseteq F_{n+m} R \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{Z} .$$

Beachte:

- * $F_0 R$ ist ein Unterring von R .
- * Für $n \leq 0$ ist $F_n R$ ein 2-seitiges Ideal in $F_0 R$.

Beispiele. 1. Die triviale Filtrierung

$$F_n R := \begin{cases} R & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0 . \end{cases}$$

2. Sei $I \subseteq R$ ein 2-seitiges Ideal; dann heißt

$$F_n R := \begin{cases} R & \text{für } n \geq 0, \\ I^{-n} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

die *I-adische Filtrierung* von R .

3. Der Polynomring $R := S[x_1, \dots, x_n]$ in r Variablen über einem Ring S ist filtriert durch

$$F_n R := \begin{cases} \text{alle Polynome vom Totalgrad } \leq n & \text{für } n \geq 0 , \\ 0 & \text{für } n < 0 . \end{cases}$$

4. Die *Weyl-Algebra* $A_r(k)$ in r Variablen über einem Körper k der Charakteristik 0 ist der nicht-kommutative Polynomring $k[x_1, \dots, x_r, \partial_1, \dots, \partial_r]$, wobei die Multiplikation durch die Kommutationsregeln

$$\begin{aligned} x_i x_j &= x_j x_i && \text{für alle } i, j, \\ \partial_i \partial_j &= \partial_j \partial_i && \text{für alle } i, j, \\ x_i \partial_j &= \partial_j x_i && \text{für alle } i \neq j, \\ x_i \partial_i + 1 &= \partial_i x_i && \text{für alle } i \end{aligned}$$

festgelegt ist. Alternativ läßt sich $A_r(k)$ charakterisieren als derjenige Unterring des Endomorphismenrings von $k[x_1, \dots, x_r]$ als k -Modul, der von den Linksmultiplikationen mit Elementen in $k[x_1, \dots, x_r]$ sowie den partiellen Ableitungen $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ erzeugt wird. Jedes Element $p \in A_r(k)$ schreibt sich eindeutig als endliche Summe

$$p = \sum_{n_1, \dots, n_{2r} \geq 0} s_{n_1, \dots, n_{2r}} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r} \cdot \partial_1^{n_{r+1}} \cdot \dots \cdot \partial_r^{n_{2r}}$$

und hat also einen Totalgrad $\deg(p) := \max\{n_1 + \dots + n_{2r} : s_{n_1, \dots, n_{2r}} \neq 0\}$.
Definiere

$$F_n A_r(k) := \begin{cases} \{p \in A_r(k) : \deg(p) \leq n\} & \text{für } n \geq 0, \\ 0 & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

(Der 2. Fall ist wegen $\deg(0) = -\infty$ eigentlich im 1. Fall enthalten.)

Sei R im Folgenden ein filtrierter Ring.

Definition. Ein R -Linksmodul M heißt *filtrierter R -Modul*, falls eine aufsteigende Folge

$$\dots \subseteq F_n M \subseteq F_{n+1} M \subseteq \dots$$

für $n \in \mathbb{Z}$ von additiven Untergruppen von M gegeben ist mit

$$F_n R \cdot F_m M \subseteq F_{n+m} M \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{Z} .$$

Beachte:

- * Alle $F_n M$ sind $F_0 R$ -Untermoduln von M .
- * Wir befolgen hier eine andere Konvention als in §5.

Definition. Die *Filtrierung $F_\bullet M$ von M* heißt

$$\begin{aligned} \text{ausschöpfend,} & \quad \text{falls } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_n M = M, \\ \text{separiert,} & \quad \text{falls } \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_n M = 0, \\ \text{diskret,} & \quad \text{falls } F_n M = 0 \text{ für } n \ll 0, \\ \text{vollständig,} & \quad \text{falls } M \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{n \in \mathbb{Z}} M/F_n M. \end{aligned}$$

Beachte:

- * Ist $F_\bullet R$ ausschöpfend, so ist $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_n M$ ein R -Untermodul von M .

- * Der projektive Limes in der Definition von “vollständig” wird von der Folge von Projektionsabbildungen

$$\dots \longrightarrow M/F_{-1}M \longrightarrow M/F_0M \longrightarrow M/F_1M \longrightarrow \dots$$

gebildet.

Im Folgenden besprechen wir diverse Konstruktionen im Kontext von filtrierten Moduln.

- A)** Sei M_i eine Familie von filtrierten R -Linksmoduln. Dann ist $\oplus_{i \in I} M_i$ filtriert durch

$$F_n(\oplus_i M_i) := \oplus_i F_n M_i .$$

Es gilt: $F_\bullet(\oplus_i M_i)$ ausschöpfend bzw. separiert genau dann, wenn alle $F_\bullet M_i$ ausschöpfend bzw. separiert sind.

- B)** Sei M_i eine Familie von filtrierten R -Linksmoduln. Dann ist $\prod_{i \in I} M_i$ filtriert durch

$$F_n(\prod_i M_i) := \prod_i F_n M_i .$$

Es gilt: $F_\bullet(\prod_i M_i)$ ist separiert genau dann, wenn alle $F_\bullet M_i$ separiert sind.

- C)** Seien M, N zwei filtrierte R -Linksmoduln.

Definition. Ein R -Modulhomomorphismus $f : M \longrightarrow N$ ist vom Grade $\leq p$, falls

$$f(F_n M) \subseteq F_{n+p} N \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Es gilt:

- * Ist $L \xrightarrow{g} M$ vom Grade $\leq p$ und $M \xrightarrow{f} N$ vom Grade $\leq q$, so ist $L \xrightarrow{f \circ g} N$ vom Grade $\leq p + q$.
- * $\text{Hom}_R(M, N)$ ist eine filtrierte abelsche Gruppe durch

$$F_n \text{Hom}_R(M, N) := \{f \in \text{Hom}_R(M, N) : f \text{ vom Grade } \leq n\}.$$

D) Die Kategorie der filtrierten R -Linksmoduln:

Definition. Ein Homomorphismus von filtrierten R -Moduln $f : M \longrightarrow N$ ist ein R -Modulhomomorphismus vom Grade ≤ 0 .

Sei $f \in F_0 \text{Hom}_R(M, N)$. Dann ist:

- $\ker(f)$ filtriert durch $F_n \ker(f) := \ker(f) \cap F_n M$;
- $\text{im}(f)$ filtriert durch $F_n \text{im}(f) := \text{im}(f) \cap F_n N$;
- $\text{coker}(f)$ filtriert durch $F_n \text{coker}(f) := (F_n N + \text{im}(f)) / \text{im}(f)$.

Die Kategorie der filtrierten R -Moduln ist im Allgemeinen nicht abelsch! Der Homomorphiesatz gilt nämlich nicht: Die kanonische Abbildung

$$\bar{f} : M/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$$

ist zwar bijektiv und vom Grade ≤ 0 , denn

$$\bar{f}(F_n(M/\ker(f))) = \bar{f}((F_n M + \ker(f))/\ker(f)) \subseteq F_n \text{im}(f) .$$

Aber sie ist kein Isomorphismus, falls $f(F_n M) \subsetneq \text{im}(f) \cap F_n M$.

Beispiel. Der Ring R trage die triviale Filtrierung. Wir versehen einen R -Modul $M \neq 0$ einmal mit der Filtrierung $0 = F_{-1}M \subseteq F_0M = M$ und einmal mit der Filtrierung $0 = F_{-2}M \subseteq F_{-1}M = M$. Dann ist id_M ein bijektiver Homomorphismus, aber kein Isomorphismus von filtrierten R -Moduln.

Aus dem filtrierten Ring R kann man einen neuen "einfacheren" Ring - den *zugehörigen graduierten Ring* - bilden:

$$\begin{aligned} \text{gr}_n(R) &:= F_n R / F_{n-1} R \\ \text{gr}(R) &:= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{gr}_n(R) \quad \text{als additive Gruppe} \end{aligned}$$

mit der Multiplikation

$$\left(\sum_n (a_n + F_{n-1}R) \right) \left(\sum_m (b_m + F_{m-1}R) \right) := \sum_k \left(\left(\sum_{n+m=k} a_n b_m \right) + F_{k-1}R \right) .$$

Beispiel. $\text{gr}(A_r(k)) = k[x_1, \dots, x_r, \partial_1, \dots, \partial_r]$ ist der kommutative Polynomring, da $x_i \partial_i \equiv \partial_i x_i \pmod{F_1 A_r(k)}$ gilt.

Analog konstruieren wir zu jedem filtrierten R -Modul M den *zugehörigen graduierten $\text{gr}(R)$ -Modul* durch:

$$\begin{aligned} \text{gr}_n(M) &:= F_n M / F_{n-1} M \\ \text{gr}(M) &:= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{gr}_n(M) \quad \text{als additive Gruppe} \end{aligned}$$

mit der Skalarmultiplikation

$$\left(\sum_n (a_n + F_{n-1}R) \right) \left(\sum_m (x_m + F_{m-1}M) \right) := \sum_k \left(\left(\sum_{n+m=k} a_n x_m \right) + F_{k-1}M \right) .$$

Dies führt auf folgende allgemeine Konzepte.

Definition. Ein Ring S (assoziativ mit 1) heißt *graduiert*, falls $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ als additive Gruppe mit $S_n \cdot S_m \subseteq S_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Beachte: $1 \in S_0$, und S_0 ist ein Unterring von S .

Definition. Sei S ein graduiertes Ring; ein S -Linksmodul M heißt *graduierter S -Modul*, falls $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ als additive Gruppe mit $S_n \cdot M_m \subseteq M_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Die Elemente in M_n heißen *homogen vom Grade n* . Jedes $x \in M$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n$$

in seine *homogenen Komponenten* $x_n \in M_n$.

E) Die Kategorie der graduierten S -Moduln

Sei S ein graduirter Ring, und seien M und N zwei graduierte S -Moduln.

Definition. *i. Ein S -Modulhomomorphismus $f : M \rightarrow N$ heißt vom Grade p , falls gilt*

$$f(M_n) \subseteq N_{n+p} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

ii. Ein Homomorphismus von graduierten S -Moduln ist ein S -Modulhomomorphismus vom Grade 0.

Hat $f \neq 0$ einen Grad, so ist dieser eindeutig bestimmt. Sei $f : M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von graduierten S -Moduln; dann ist:

- $\ker(f)$ graduiert durch $\ker(f)_n := M_n \cap \ker(f)$,
- $\text{im}(f)$ graduiert durch $\text{im}(f)_n := N_n \cap \text{im}(f)$,
- $\text{coker}(f)$ graduiert durch $\text{coker}(f)_n := (N_n + \text{im}(f))/\text{im}(f) \cong N_n/f(M_n)$.

Übungsaufgabe. *Der Homomorphiesatz gilt. Also ist die Kategorie der graduierten S -Moduln abelsch.*

Lemma 11.1. *Seien*

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \beta & \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

graduierte S -Moduln und Homomorphismen von graduierten S -Moduln, wobei α surjektiv ist; ist P projektiv als S -Modul, so existiert ein Homomorphismus von graduierten S -Moduln $\tilde{\beta} : P \rightarrow M$ mit $\alpha \circ \tilde{\beta} = \beta$.

Beweis. Es existiert jedenfalls ein S -Modulhomomorphismus $\beta' : P \rightarrow M$ mit $\alpha \circ \beta' = \beta$. Definiere

$$\tilde{\beta} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \right) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta'(p_n)_n .$$

□

F) Der Funktor “filtriert” zu “graduirt”

Sei R ein filtrierter Ring. Auf Objekten haben wir den Funktor

$$\begin{array}{ccc} \text{Kategorie der} & \longrightarrow & \text{Kategorie der} \\ \text{filtrierten } R\text{-Moduln} & & \text{graduerten } \text{gr}(R)\text{-Moduln} \\ M & \longmapsto & \text{gr}(M) \end{array}$$

schon konstruiert. Sei $f \in F_0 \text{Hom}_R(M, N)$, also $f(F_n M) \subseteq F_n N$. Somit sind

$$\begin{aligned} \text{gr}_n(f) : \text{gr}_n(M) = F_n M / F_{n-1} M &\longrightarrow \text{gr}_n(N) = F_n N / F_{n-1} N \\ x + F_{n-1} M &\longmapsto f(x) + F_{n-1} N \end{aligned}$$

und

$$\text{gr}(f) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{gr}_n(f) : \text{gr}(M) \longrightarrow \text{gr}(N)$$

wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, daß $\text{gr}(f)$ ein Homomorphismus von graduerten Moduln ist. Weiter gilt:

- 1) $\text{gr}(\text{id}_M) = \text{id}_{\text{gr}(M)}$,
- 2) $\text{gr}(f \circ g) = \text{gr}(f) \circ \text{gr}(g)$.

Beachte: Ist $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert, so gilt: $M = 0 \iff \text{gr}(M) = 0$.

Definition. *i. Ein Homomorphismus $f \in F_0 \text{Hom}_R(M, N)$ von filtrierten R -Moduln heißt strikt, wenn gilt $f(F_n M) = \text{im}(f) \cap F_n N$, also $f(F_n M) = F_n \text{im}(f)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

ii. Eine Sequenz $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ (von Homomorphismen) von filtrierten R -Moduln heißt strikt-exakt, falls sie exakt ist und f und g strikt sind.

Satz 11.2. *Sei*

$$(5) \quad L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

eine Sequenz von filtrierten R -Moduln mit $f \circ g = 0$, und sei

$$(6) \quad \text{gr}(L) \xrightarrow{\text{gr}(g)} \text{gr}(M) \xrightarrow{\text{gr}(f)} \text{gr}(N)$$

die zugehörige Sequenz von graduerten $\text{gr}(R)$ -Moduln (mit $\text{gr}(f) \circ \text{gr}(g) = 0$); dann gilt

- i. Ist (5) strikt-exakt, so ist (6) exakt;*
- ii. ist (6) exakt und $F_\bullet M$ ausschöpfend, so ist f strikt;*
- iii. ist (6) exakt, $F_\bullet L$ vollständig und $F_\bullet M$ separiert, so ist g strikt;*
- iv. ist (6) exakt und $F_\bullet M$ diskret, so ist g strikt;*

v. es gelte:

(a) $F_\bullet L$ ist vollständig und $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert

oder

(b) $F_\bullet M$ ist ausschöpfend und diskret;

dann ist (5) strikt-exakt genau dann, wenn (6) exakt ist.

Beweis. i. Sei $x + F_{n-1}M \in \ker(\text{gr}_n(f))$, also $f(x) \in F_{n-1}N$. Wegen der Striktheit von f existiert ein $x' \in F_{n-1}M$ mit $f(x) = f(x')$. Also $x - x' \in \ker(f) \cap F_nM = \text{im}(g) \cap F_nM$. Wegen der Striktheit von g existiert weiter ein $z \in F_nL$ mit $g(z) = x - x'$. Es folgt $\text{gr}_n(g)(y + F_{n-1}L) = x - x' + F_{n-1}M = x + F_{n-1}M$.

ii. Sei $y \in \text{im}(f) \cap F_nN$. Wir wählen ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, gilt $x \in F_{n+s}M$ für ein $s \geq 0$. Ist $s = 0$, so sind wir fertig. Sei also $s > 0$. Dann

$$\text{gr}_{n+s}(f)(x + F_{n+s-1}M) = y + F_{n+s-1}N = 0 + F_{n+s-1}N .$$

Wegen der Exaktheit von (6) existiert ein $z \in F_{n+s}L$ mit

$$\text{gr}_{n+s}(g)(z + F_{n+s-1}L) = x + F_{n+s-1}M .$$

Also haben wir ein $x_1 := x - g(z) \in F_{n+s-1}M$ gefunden mit $y = f(x) = f(x - g(z)) = f(x_1)$. Induktiv konstruieren wir so ein $x_s \in F_nM$ mit $f(x_s) = y$.

iii. und iv. Sei $x \in \text{im}(g) \cap F_nM$, also insbesondere $f(x) = 0$. wegen der Exaktheit von (6) existiert ein $z_n \in F_nL$ mit $\text{gr}_n(g)(z_n + F_{n-1}L) = x + F_{n-1}M$. Dann $x - g(z_n) \in \text{im}(g) \cap F_{n-1}M$. Induktiv finden wir also für jedes $s \geq 0$ ein $z_{n-s} \in F_{n-s}L$ mit

$$x - g(z_n + z_{n-1} + \dots + z_{n-s}) \in F_{n-s-1}M .$$

Setze

$$y_s := z_n + z_{n-1} + \dots + z_{n-s} \in F_nL .$$

Dann haben wir:

- 1) $x - g(y_s) \in F_{n-s-1}M$,
- 2) Die Projektionsabbildung $L/F_{n-s-2}L \rightarrow L/F_{n-s-1}L$ bildet $y_{s+1} + F_{n-s-2}L$ ab auf $y_s + F_{n-s-1}L$.

1. Fall: Sei $F_\bullet M$ diskret. Dann ist $F_{n-s-1}M = 0$ für genügend großes s und damit $x = g(y_s)$ mit $y_s \in F_nL$ wegen 1). 2. Fall: Sei $F_\bullet L$ vollständig und $F_\bullet M$ separiert. Wegen der Vollständigkeit von $F_\bullet L$ folgt aus 2) die Existenz genau eines $z \in L$ mit

$$z - y_s \in F_{n-s-1}L \quad \text{für alle } s \geq 0 ,$$

und insbesondere $z \in F_nL$ (" $z = \sum_{s=0}^{\infty} z_{n-s}$ "). Mit 1) folgt weiter

$$g(z) - x = g(z - y_s) + g(y_s) - x \in g(F_{n-s-1}L) + F_{n-s-1}M \subseteq F_{n-s-1}M$$

für alle $s \geq 0$. Die Separiertheit von $F_\bullet M$ impliziert dann $g(z) - x = 0$, also $x = g(z)$ mit $z \in F_n L$.

v. Wegen i. bleibt die Implikation von rechts nach links zu zeigen. Nach ii. - iv. sind g und f strikt. Sei also $x \in M$ mit $f(x) = 0$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, gilt $x \in F_n M$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Wegen der Exaktheit von (6) existiert ein $z_n \in F_n L$ mit

$$\text{gr}_n(g)(z_n + F_{n-1}L) = x + F_{n-1}M .$$

Dann ist $x - g(z_n) \in F_{n-1}M$ mit $f(x - g(z_n)) = 0$. Induktiv fortfahrend finden wir für jedes $s \geq 0$ ein $z_{n-s} \in F_{n-s}L$ mit

$$x - g(z_n + z_{n-1} + \dots + z_{n-s}) \in F_{n-s-1}M .$$

Im Fall (b) ist $F_{n-s-1}M = 0$ für genügend großes s und damit $x = g(z_n + \dots + z_{n-s}) \in \text{im}(g)$. Im Fall (a) impliziert die Vollständigkeit von $F_\bullet L$, daß das Element $z := \sum_{n=0}^{\infty} z_{n-s} \in L$ wohldefiniert ist. Wegen der Separiertheit von $F_\bullet M$ muß schließlich $x = g(z)$ gelten. \square

Corollar 11.3. Sei $f : M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von filtrierten R -Moduln, sei $F_\bullet M$ ausschöpfend und vollständig, und sei $F_\bullet N$ ausschöpfend und separiert; dann gilt:

$$\text{gr}(f) \text{ bijektiv} \implies f \text{ bijektiv} .$$

12 Übertragung von Endlichkeitseigenschaften

Sei R ein filtrierter Ring.

Definition. Ein filtrierter R -Modul M heißt *filt-frei*, falls eine R -Basis $\{x_i\}_{i \in I}$ von M und ganze Zahlen $\{m_i\}_{i \in I}$ existieren mit

$$F_n M = \bigoplus_{i \in I} F_{n-m_i} R \cdot x_i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Die Menge $\{(x_i, m_i)\}_{i \in I}$ heißt dann eine *filt-Basis* von M .

Beachte:

- * $x_i = 1 \cdot x_i \in F_0 R \cdot x_i \subseteq F_{m_i} M$.
- * $x_i \notin F_{m_i-1} M$, falls $1 \notin F_{-1} R$.
Denn sonst ist $x_i = \sum_{j \in I} a_j x_j$ mit $a_j \in F_{m_i-1-m_j} R$, und aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt $1 = a_i \in F_{-1} R$.
(Übrigens folgt aus $1 \in F_{-1} R$, daß $F_n R = F_0 R$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.)
- * Sei $\bar{x}_i := x_i + F_{m_i-1} M \in \text{gr}_{m_i}(M)$. Dann ist

$$\text{gr}_n(M) = \bigoplus_i \text{gr}_{n-m_i}(R) \cdot \bar{x}_i$$

und somit

$$\text{gr}(M) = \bigoplus_n \text{gr}_n(M) = \bigoplus_n \bigoplus_i \text{gr}_{n-m_i}(R) \cdot \bar{x}_i = \bigoplus_i \text{gr}(R) \cdot \bar{x}_i$$

(mit "eindeutigen Koeffizienten"). Also ist $\text{gr}(M)$ ein freier $\text{gr}(R)$ -Modul mit Basis $\{\bar{x}_i\}_{i \in I}$.

Lemma 12.1. Sei M filt-frei mit filt-Basis $\{(x_i, m_i)\}_{i \in I}$; dann gilt:

- i. Gegeben seien ein $p \in \mathbb{Z}$ und Elemente $y_i \in F_{p+m_i}N$ in einem filtrierten R -Modul N ; dann existiert genau ein R -Modulhomomorphismus $f : M \rightarrow N$ vom Grade $\leq p$ mit

$$f(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i \in I ;$$

- ii. ist N ein weiterer filtrierter R -Modul und $\bar{f} : \text{gr}(M) \rightarrow \text{gr}(N)$ ein $\text{gr}(R)$ -Modulhomomorphismus vom Grade p , so existiert ein R -Modulhomomorphismus $f : M \rightarrow N$ vom Grade $\leq p$ mit $\text{gr}(f) = \bar{f}$.

Beweis. i. Dies ist klar. ii. Wir wählen Elemente $y_i \in F_{p+m_i}N$ mit $\bar{f}(\bar{x}_i) = y_i + F_{p+m_i-1}N$ und wenden i. an. \square

Lemma 12.2. Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend, und sei M ein filtrierter R -Modul mit ausschöpfender Filtrierung $F_\bullet M$; dann existiert eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R -Moduln

$$\dots \rightarrow P^q \xrightarrow{\delta^q} \dots \xrightarrow{\delta^{-1}} P^0 \xrightarrow{\delta^0} M \rightarrow 0 ,$$

in welcher alle P^q filt-frei sind; sind $F_\bullet R$ und $F_\bullet M$ diskret, so können zusätzlich auch alle $F_\bullet P^q$ diskret gewählt werden.

Beweis. Setze $I_m := F_m M \setminus \{0\}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und bezeichne I die disjunkte Vereinigung aller I_m . Wir definieren einen filt-freien R -Modul P^0 durch

$$P^0 := \bigoplus_m \bigoplus_{x \in I_m} R \quad \text{und} \quad F_n P^0 := \bigoplus_m \bigoplus_{x \in I_m} F_{n-m} R$$

sowie einen Homomorphismus von filtrierten R -Moduln

$$\begin{aligned} \delta^0 : \quad P^0 &\rightarrow M \\ (a_{m,x})_{m,x} &\mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{x \in I_m} a_{m,x} x . \end{aligned}$$

Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, ist δ^0 surjektiv. Wir haben

$$F_n M \setminus \{0\} \subseteq \sum_{x \in F_n M \setminus \{0\}} F_0 R \cdot x \subseteq \delta^0(F_n P^0) = \sum_m \sum_{x \in F_m(M) \setminus \{0\}} F_{n-m} R \cdot x \subseteq F_n M$$

und folglich $\delta^0(F_n P^0) = F_n M$. Dies zeigt, daß δ^0 strikt. Existiert außerdem ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $F_n R = 0$ und $F_n M = 0$ für alle $n < N$, so ist

$$F_n P^0 = \bigoplus_{m \geq N} \bigoplus_{x \in I_m} F_{n-m} R = 0 \quad \text{für } n < 2N .$$

Mit $F_\bullet R$ sind $F_\bullet P^0$ und dann auch $F_\bullet(\ker \delta^0)$ ausschöpfend. Wir können also diese Konstruktion für $\ker \delta^0$ wiederholen und auf diese Weise induktiv die gewünschte Sequenz konstruieren. \square

Sei S ein graduerter Ring und N graduerter S -Modul. Durch "Verschieben" der Graduierung definieren wir zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ einen neuen graduierten S -Modul $N(m)$ durch $N(m) := N$ als S -Modul und $N(m)_n := N_{n+m}$.

Analog sei M ein filtrierter R -Modul. Zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ haben wir dann den filtrierten R -Modul $M(m)$ gegeben durch $M(m) := M$ als R -Modul und $F_n(M(m)) := F_{n+m}M$.

Beachte:

- i. Ist S ein graduerter Ring und $f : N_1 \rightarrow N_2$ ein S -Modulhomomorphismus vom Grade p , so ist $f : N_1(-p) \rightarrow N_2$ ein Homomorphismus von graduierten S -Moduln.
- ii. Ist $f : M_1 \rightarrow M_2$ ein R -Modulhomomorphismus vom Grade $\leq p$, so ist $f : M_1(-p) \rightarrow M_2$ ein Homomorphismus von filtrierten R -Moduln.
- iii. $\text{gr}(M(m)) = \text{gr}(M)(m)$.
- iv. M ist filt-frei über der filt-Basis $\{(x_i, m_i)\}_{i \in I}$ genau dann, wenn

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} R(-m_i)$$

gilt im Sinne von filtrierten R -Moduln.

Konstruktion 12.3. Gegeben sei ein filtrierter R -Modul M , so daß $\text{gr}(M)$ endlich-erzeugt ist als $\text{gr}(R)$ -Modul; weiter gelte:

(a) $F_\bullet R$ ist vollständig und $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert

oder

(b) $F_\bullet M$ ist ausschöpfend und diskret.

Wir wählen homogene Erzeugende $\bar{x}_i = x_i + F_{n_i-1}M \in \text{gr}_{n_i}(M)$ für $i = 1, \dots, r$ von $\text{gr}(M)$ als $\text{gr}(R)$ -Modul. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{gr}(R)(-n_1) \oplus \dots \oplus \text{gr}(R)(-n_r) &\longrightarrow \text{gr}(M) \\ (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r) &\longmapsto \bar{a}_1 \bar{x}_1 + \dots + \bar{a}_r \bar{x}_r \end{aligned}$$

ein surjektiver Homomorphismus von graduierten $\text{gr}(R)$ -Moduln von der Form $\text{gr}(\delta^0)$ zu dem Homomorphismus von filtrierten R -Moduln

$$\begin{aligned} \delta^0 : P^0 := R(-n_1) \oplus \dots \oplus R(-n_r) &\longrightarrow M \\ (a_1, \dots, a_r) &\longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_r x_r \end{aligned}$$

Per Konstruktion ist P^0 endlich-erzeugt und filt-frei. Ist $F_\bullet R$ vollständig, so ist es auch $F_\bullet P^0$. Aus Satz 11.2.v folgt also: $\delta^0 : P^0 \rightarrow M$ ist strikt und surjektiv; insbesondere ist M endlich-erzeugt (von höchstens r Elementen).

Satz 12.4. Sei M ein filtrierter R -Modul, so daß $\text{gr}(M)$ als $\text{gr}(R)$ -Modul endlich-präsentiert ist; weiter sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert (z. B. falls $F_\bullet R$ und $F_\bullet M$ ausschöpfend und diskret sind). Dann existiert eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R -Moduln

$$P^{-1} \xrightarrow{\delta^{-1}} P^0 \xrightarrow{\delta^0} M \longrightarrow 0$$

mit P^0, P^{-1} endlich-erzeugt und filt-frei; insbesondere ist M endlich-präsentiert. Ist $\text{gr}(R)$ darüberhinaus linkskohärent, so existiert sogar eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R -Moduln

$$\dots \longrightarrow P^q \longrightarrow \dots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

mit P^q endlich-erzeugt und filt-frei für alle $q \leq 0$.

Beweis. Sei $P^0 \xrightarrow{\delta^0} M$ wie in 12.3 konstruiert. Setze $L := \ker(\delta^0)$ als filtrierter R -Modul. Mit $F_\bullet R$ ist auch $F_\bullet P^0$ und damit $F_\bullet L$ ausschöpfend und separiert. Weiter ist

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\subseteq} P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

per Konstruktion strikt-exakt. Nach Satz 11.2.i ist auch

$$0 \longrightarrow \text{gr}(L) \longrightarrow \text{gr}(P^0) \longrightarrow \text{gr}(M) \longrightarrow 0$$

exakt. Aus Lemma 8.2 (bzw. Satz 8.5) folgt dann, daß $\text{gr}(L)$ endlich-erzeugt (bzw. endlich-präsentiert) ist. Wir wiederholen nun Konstruktion 12.3 für L statt M und fahren gegebenenfalls induktiv fort. \square

Satz 12.5. Sei M ein filtrierter R -Modul, und sei

(a) $F_\bullet R$ vollständig und $F_\bullet M$ ausschöpfend und separiert

oder

(b) $F_\bullet M$ ausschöpfend und diskret;

dann gilt:

$\text{gr}(M)$ ist noetherscher $\text{gr}(R)$ -Modul $\implies M$ ist noetherscher R -Modul .

Beweis. Sei $N \subseteq M$ ein R -Untermodule betrachtet als filtrierter Untermodul. Also ist die Inklusionsabbildung $N \xrightarrow{\subseteq} M$ strikt. Außerdem erfüllt $F_\bullet N$ ebenfalls (a) oder (b). Wegen Satz 11.2.i ist $\text{gr}(N) \hookrightarrow \text{gr}(M)$ auch injektiv. Auf Grund der Voraussetzung ist $\text{gr}(N)$ also endlich-erzeugt. In 12.3 haben wir gesehen, daß dann auch N endlich-erzeugt ist. \square

Corollar 12.6. Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig; dann gilt:

$\text{gr}(R)$ ist linksnoethersch $\implies R$ ist linksnoethersch.

Beweis. Wende Satz 12.5 auf $M = R$ an. □

Anwendung. Die Weyl-Algebren $A_r(k)$ sind (links)noethersch.

Definition. Ein filtrierter R -Modul P heißt *filt-projektiv*, wenn es zu jedem Diagramm von filtrierten R -Moduln

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \tilde{\beta} \swarrow & \downarrow \beta & \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei α strikt und surjektiv ist, einen Homomorphismus von filtrierten R -Moduln $\tilde{\beta} : P \rightarrow M$ mit $\alpha \circ \tilde{\beta} = \beta$ gibt.

Beachte: Wegen Lemma 12.1.i ist jeder filt-freie Modul auch filt-projektiv.

Lemma 12.7. Sei P ein filtrierter R -Modul mit ausschöpfender Filtrierung $F_\bullet P$. Dann ist P filt-projektiv genau dann, wenn P isomorph ist zu einem direkten Summanden (im Sinne filtrierter R -Moduln) eines filt-freien R -Moduls. Insbesondere ist jeder filt-projektive Modul P auch projektiv.

Beweis. Ist $P \oplus P'$ (mit einem geeigneten weiteren filtrierten R -Modul P') filt-frei, so ergänzen wir ein gegebenes Testdiagramm

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \beta & \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

zu dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & P \oplus P' & \\ \gamma \swarrow & \downarrow \beta+0 & \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

und definieren $\tilde{\beta} := \gamma|_P$.

Für die umgekehrte Implikation nehmen wir P jetzt als filt-projektiv an. Im ersten Teil des Beweises von Lemma 12.2, in welchem die dortige Voraussetzung " $F_\bullet R$ ausschöpfend" noch nicht gebraucht wurde, haben wir gesehen, daß ein filt-freier R -Modul P^0 zusammen mit einem strikten surjektiven Homomorphismus von filtrierten R -Moduln $\delta^0 : P^0 \rightarrow P$ existiert. Aus dem Testdiagramm

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \gamma \swarrow & \parallel & \\ P^0 & \xrightarrow{\delta^0} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

erhalten wir dann einen Homomorphismus von filtrierten R -Moduln $\gamma : P \longrightarrow P^0$ mit $\delta^0 \circ \gamma = \text{id}_P$. Offensichtlich gilt

$$P^0 = \text{im}(\gamma) \oplus \ker(\delta^0) .$$

als R -Moduln. Wir prüfen zunächst nach, daß γ strikt ist. Dazu sei $x \in F_n P^0 \cap \text{im}(\gamma)$ bzw. $x = \gamma(y) \in F_n P^0$ für ein $y \in P$. Es folgt $y = \delta^0(\gamma(y)) = \delta^0(x) \in F_n P$ und somit $x \in \gamma(F_n P)$. Es bleibt zu zeigen, daß

$$F_n P^0 = F_n P^0 = F_n P^0 \cap \text{im}(\gamma) + F_n P^0 \cap \ker(\delta^0) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

gilt. Offensichtlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Sei also umgekehrt $x = y + z \in F_n P^0$ mit $y = \gamma(y') \in \text{im}(\gamma)$ und $z \in \ker(\delta^0)$. Dann

$$y' = \delta^0(\gamma(y')) = \delta^0(y) = \delta^0(x) \in F_n P ,$$

also

$$y = \gamma(y') \in \gamma(F_n P) \subseteq F_n P^0 \cap \text{im}(\gamma)$$

und somit

$$z = x - y \in F_n P^0 \cap \ker(\delta^0) .$$

□

Im Folgenden wollen wir die projektiven Dimensionen von M und $\text{gr}(M)$ vergleichen. Dazu müssen wir aber etwas ausholen. Sei M ein filtrierter R -Modul. Dann:

- * $F_0 \text{End}_R(M)$ ist ein Ring bzgl. Komposition.
- * $\text{End}_{\text{gr}(R)}^0(\text{gr}(M)) := \{\alpha \in \text{End}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M)) : \alpha \text{ hat Grad } 0\}$ ist ein Ring bzgl. Komposition.
- * Die Abbildung

$$\begin{aligned} F_0 \text{End}_R(M) &\longrightarrow \text{End}_{\text{gr}(R)}^0(\text{gr}(M)) \\ f &\longmapsto \text{gr}(f) \end{aligned}$$

ist ein Ringhomomorphismus mit Kern $F_{-1} \text{End}_R(M)$.

Wir erinnern auch daran, daß ein Element e eines Ringes S *idempotent* heißt, falls $e^2 = e$.

Lemma 12.8. *Sei M ein filtrierter R -Modul, und sei $F_\bullet M$ ausschöpfend und vollständig; weiter sei $f \in F_0 \text{End}_R(M)$, so daß $\text{gr}(f)$ idempotent ist; dann existiert ein idempotentes und striktes $g \in F_0 \text{End}_R(M)$ mit $\text{gr}(g) = \text{gr}(f)$.*

Beweis. Wegen $\text{gr}(f) = \text{gr}(f)^2 = \text{gr}(f^2)$ ist $\text{gr}(f^2 - f) = 0$. Folglich ist $h := f^2 - f$ vom Grade ≤ -1 und damit h^n vom Grade $\leq -n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $x \in M$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, finden wir ein $m \in \mathbb{Z}$, so daß $x \in F_m M$. Dann gilt $h^n(x) \in F_{m-n} M$ für alle $n \geq 0$. Beachten wir, daß $\binom{2n}{n}$ als "mittlerer" Koeffizient der Binomialentwicklung von $(1-1)^{2n} = 0$ eine gerade ganze Zahl sein muss, so ist also

$$x_\infty := \sum_{1 \leq n < k} (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \binom{2n}{n} h^n(x) \in \varprojlim_{k \geq 1} F_{m-1} M / F_{m-k} M$$

ein wohldefiniertes Element. Dadurch erhalten wir einen R -Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} l_\infty : M &\longrightarrow \varprojlim_{k \geq 1} M / F_k M \\ x &\longmapsto x_\infty . \end{aligned}$$

Aus der Vollständigkeit von $F_\bullet M$ folgt dann die Existenz des schrägen Pfeils in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow l & \downarrow \cong \\ M & \xrightarrow{l_\infty} & \varprojlim_{k \geq 0} M / F_{-k} M . \end{array}$$

Per Konstruktion gilt $l \in F_{-1} \text{End}_R(M) \subseteq F_0 \text{End}_R(M)$ und $l \circ f = f \circ l$. Wir definieren nun

$$g := f + l \circ (\text{id}_M - 2f) .$$

Es gilt $g \in F_0 \text{End}_R(M)$ und $\text{gr}(g) = \text{gr}(f)$ (beachte $l \in F_{-1}$ und $\text{id}_M - 2f \in F_0$, also $l \circ (\text{id}_M - 2f) \in F_{-1}$). Um zu beweisen, daß g idempotent ist, benutzen wir die Identität

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 1}} \binom{2n}{n} \binom{2m}{m} + 2 \cdot \binom{2k}{k} = 4^k .$$

Dazu überlegt man sich zuerst induktiv, daß $\binom{2n}{n} = (-1)^n \cdot 4^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n}$ gilt und rechnet

dann

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 1}} (-1)^n \cdot 4^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{m} + 2 \cdot (-1)^k \cdot 4^k \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{k} \\
&= (-4)^k \cdot \left(\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 1}} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \binom{-\frac{1}{2}}{m} + 2 \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{k} \right) \\
&= (-4)^k \cdot \sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 0}} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \binom{-\frac{1}{2}}{m} \\
&= (-4)^k \cdot \binom{-1}{k} = 4^k .
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel rechnet man explizit nach, daß

$$(l^2 - l) \circ (\text{id}_M + 4h) + h = 0 .$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
g^2 - g &= (f + l(\text{id}_M - 2f))^2 - (f + l(\text{id}_M - 2f)) \\
&= f^2 + l(2f - 4f^2) + l^2(\text{id}_M - 4f + 4f^2) - f - l(\text{id}_M - 2f) \\
&= f^2 - f - l(\text{id}_M - 4f + 4f^2) + l^2(\text{id}_M - 4f + 4f^2) \\
&= h + (l^2 - l)(\text{id}_M + 4(f^2 - f)) = h + (l^2 - l)(\text{id}_M + 4h) = 0 .
\end{aligned}$$

Also ist g idempotent. Es bleibt die Beobachtung, daß überhaupt jedes idempotente Element $g \in F_0 \text{End}_R(M)$ strikt ist. Für $x = g(y) \in F_n M$ haben wir nämlich $x = g^2(y) = g(x) \in g(F_n M)$. \square

Satz 12.9. Sei Π ein graduierter $\text{gr}(R)$ -Modul, welcher projektiv ist; weiter gelte:

(a) $F_\bullet R$ ist ausschöpfend und diskret, und $\Pi_n = 0$ für alle $n \ll 0$

oder

(b) $F_\bullet R$ ist ausschöpfend und vollständig, und Π ist endlich-erzeugt.

Dann existiert ein filt-projektiver R -Modul P mit $\text{gr}(P) \cong \Pi$ und

$F_\bullet P$ ist ausschöpfend und diskret im Falle (a) bzw.

$F_\bullet P$ ist ausschöpfend und vollständig, und P ist endlich-erzeugt im Falle (b).

Außerdem existiert zu jedem filtrierten R -Modul M und zu jedem $\text{gr}(R)$ -Modulhomomorphismus

$$\bar{\gamma} : \Pi \longrightarrow \text{gr}(M) \quad \text{vom Grade } p$$

ein R -Modulhomomorphismus

$$\gamma : P \longrightarrow M \quad \text{vom Grade } \leq p \text{ mit } \text{gr}(\gamma) = \bar{\gamma} .$$

Beweis. Wir fixieren homogene Erzeugende $\bar{x}_i \in \Pi_{n_i}$ für $i \in I$ und erhalten so einen surjektiven Homomorphismus von graduierten $\text{gr}(R)$ -Moduln

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \bigoplus_{i \in I} \text{gr}(R)(-n_i) \xrightarrow{\alpha} \Pi \\ (\bar{a}_i)_i &\longmapsto \sum_i \bar{a}_i \bar{x}_i . \end{aligned}$$

Da Π als projektiv vorausgesetzt ist, existiert wegen Lemma 11.1 ein Homomorphismus von graduierten $\text{gr}(R)$ -Moduln

$$\beta : \Pi \longrightarrow \Lambda \quad \text{mit } \alpha \circ \beta = \text{id}_\Pi .$$

Wir definieren $h := \beta \circ \alpha : \Lambda \longrightarrow \Lambda$. Es gilt $h^2 = h$ und $\text{im}(h) \cong \Pi$. Außerdem ist

$$L := \bigoplus_{i \in I} R(-n_i) \quad \text{filt-frei mit } \text{gr}(L) = \Lambda .$$

Nach Lemma 12.1.ii existiert ein $f \in F_0 \text{End}_R(L)$ mit $\text{gr}(f) = h$.

An dieser Stelle halten wir fest, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können:

Im Falle (a): Die Menge $\{n_i\}_{i \in I}$ ist nach unten beschränkt. Dann gilt $\Lambda_n = 0$ für $n \ll 0$, und $F_\bullet L$ ist diskret (und ausschöpfend).

Im Falle (b): I ist endlich. Dann ist $F_\bullet L$ vollständig (und ausschöpfend), und L ist endlich-erzeugt.

Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 12.8 erfüllt, und wir finden ein idempotentes und striktes $g \in F_0 \text{End}_R(L)$ mit $\text{gr}(g) = \text{gr}(f) = h$. Wir definieren

$$P := \text{im}(g) \quad \text{als filtrierte Untermodul von } L .$$

Insbesondere ist $F_\bullet P$ ausschöpfend und im Falle (a) auch diskret. Da g strikt ist mit $g^2 = g$, gilt

$$\begin{aligned} L &= \ker(g) \oplus \text{im}(g) \\ &= \ker(g) \oplus P \end{aligned}$$

im Sinne von filtrierte R -Moduln. Im Falle (b) ist insbesondere $F_\bullet P$ vollständig und P endlich-erzeugt. Wegen Lemma 12.7 ist P filt-projektiv. Und wegen Satz 11.2.i impliziert die Striktheit von g , daß

$$\text{gr}(P) = \text{gr}(\text{im}(g)) = \text{im}(\text{gr}(g)) = \text{im}(h) \cong \Pi .$$

Schließlich sei ein $\bar{\gamma} : \Pi \longrightarrow \text{gr}(M)$ vom Grade p gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$\text{gr}(L) = \text{gr}(\ker(g)) \oplus \text{gr}(P) \cong \text{gr}(\ker(g)) \oplus \Pi \xrightarrow{0 + \bar{\gamma}} \text{gr}(M) .$$

Nach Lemma 12.1.ii existiert ein $\tilde{\gamma} : L \longrightarrow M$ vom Grade $\leq p$ mit $\text{gr}(\tilde{\gamma}) = 0 + \bar{\gamma}$. Dann erfüllt $\gamma := \tilde{\gamma}|_P$ die Behauptung. \square

Satz 12.10. *Sei M ein filtrierter R -Modul, und seien $F_\bullet R$ und $F_\bullet M$ ausschöpfend und diskret; dann gilt*

$$\mathrm{pd}_R(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M)) .$$

Beweis. Nach Lemma 12.2 existiert eine strikt-exakte Sequenz von filtrierten R -Moduln

$$\dots \longrightarrow P^q \xrightarrow{\delta^q} \dots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

so daß alle P^q filt-frei und alle $F_\bullet P^q$ diskret sind. Wegen Satz 11.2.i ist dann auch die Sequenz

$$\dots \longrightarrow \mathrm{gr}(P^q) \xrightarrow{\mathrm{gr}(\delta^q)} \dots \longrightarrow \mathrm{gr}(P^0) \longrightarrow \mathrm{gr}(M) \longrightarrow 0$$

exakt, und alle $\mathrm{gr}(P^q)$ sind frei und damit projektiv. Sei $d := \mathrm{pd}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M))$. Da sonst nichts zu beweisen ist, können wir $d < \infty$ annehmen. Auf Grund von Satz 7.1 ist $\Pi := \ker(\mathrm{gr}(\delta^{-d+1}))$ ein projektiver graduerter $\mathrm{gr}(R)$ -Modul. Die Filtrierung $F_\bullet P^{-d+1}$ ist diskret. Also gilt $\mathrm{gr}_n(P^{-d+1}) = 0$ und damit $\Pi_n = 0$ für $n < -d$. Nach Satz 12.9(a) existiert dann ein filt-projektiver R -Modul P mit ausschöpfender und diskreter Filtrierung $F_\bullet P$ sowie ein Homomorphismus von filtrierten R -Moduln $\gamma : P \longrightarrow \ker(\delta^{-d+1})$ mit

$$\mathrm{gr}(\gamma) : \mathrm{gr}(P) \cong \Pi = \ker(\mathrm{gr}(\delta^{-d+1})) = \mathrm{gr}(\ker(\delta^{-d+1})) .$$

Wegen Cor. 11.3 ist γ bijektiv. Also erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P^{-d+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

von R -Moduln, wobei P und P^q filt-projektiv und alle Filtrierungen ausschöpfend sind. Nach Lemma 12.7 ist dies eine projektive Auflösung von M . Aus Satz 7.1 folgt schließlich $\mathrm{pd}_R(M) \leq d$. \square

Corollar 12.11. *Ist $F_\bullet R$ ausschöpfend und diskret, so gilt*

$$l.\mathrm{gldim}(R) \leq l.\mathrm{gldim}(\mathrm{gr}(R)) .$$

Beweis. Sei M ein beliebiger R -Linksmodul M . Wir machen M zu einem filtrierten R -Modul durch

$$F_n M := \text{die von } F_n R \cdot M \text{ erzeugte abelsche Untergruppe.}$$

Ersichtlich ist $F_\bullet M$ diskret und wegen $F_0 M \supseteq F_0 R \cdot M \supseteq 1 \cdot M = M$ auch ausschöpfend. Satz 12.10 impliziert dann

$$\mathrm{pd}_R(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathrm{gr}(R)}(\mathrm{gr}(M)) \leq l.\mathrm{gldim}(\mathrm{gr}(R)) .$$

\square

Die Ungleichung im obigen Corollar ist eine sehr grobe Abschätzung. Zum Beispiel für die Weyl-Algebren $A_r(k)$ besagt sie

$$\text{l.gldim}(A_r(k)) \leq \text{l.gldim}(k[x_1, \dots, x_r, \partial_1, \dots, \partial_r]) = 2r .$$

Es gilt aber in der Tat

$$\text{l.gldim}(A_r(k)) = r$$

(vgl. [Bjo] Thm. 2.3.15 (und Prop. 2.2.5)).

Satz 12.12. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und $\text{gr}(R)$ linksnoethersch; weiter sei M ein filtrierter R -Modul mit ausschöpfender und separierter Filtrierung $F_\bullet M$ und endlich-erzeugtem $\text{gr}(M)$; dann gilt*

$$\text{pd}_R(M) \leq \text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M)) .$$

Beweis. Dies ist analog zu Beweis von Satz 12.10 unter Benutzung von Satz 12.4 und Satz 12.9(b). \square

Corollar 12.13. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und $\text{gr}(R)$ linksnoethersch; dann ist R linksnoethersch mit*

$$\text{l.gldim}(R) \leq \text{l.gldim}(\text{gr}(R)) .$$

Beweis. Nach Cor. 12.6 ist R linksnoethersch. Wir betrachten zunächst einen beliebigen endlich-erzeugten R -Modul M . dann existiert ein surjektiver R -Modulhomomorphismus $\alpha : R^m \rightarrow M$. Wir fassen M auf als filtrierten R -Modul mittels $F_n M := \alpha(F_n R^m)$. Mit $F_\bullet R$ ist dann auch $F_\bullet M$ ausschöpfend. Den Beweis, daß $F_\bullet M$ separiert ist, geben wir später in Satz 14.4. Da α per Konstruktion strikt ist, ist nach Satz 11.2.i auch die Abbildung $\text{gr}(\alpha) : \text{gr}(R)^m \rightarrow \text{gr}(M)$ surjektiv und $\text{gr}(M)$ somit endlich-erzeugt. Aus Satz 12.12 folgt dann

$$\text{pd}_R(M) \leq \text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M)) \leq \text{l.gldim}(\text{gr}(R)) .$$

Es gilt aber

$$\text{l.gldim}(R) = \sup\{\text{pd}_R(M) : M \text{ endlich-erzeugt}\} \leq \text{l.gldim}(\text{gr}(R))$$

(vgl. [McL] Cor. VII 1.5). \square

Corollar 12.14. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig und $\text{gr}(R)$ linksnoethersch und linksregulär; dann ist R linksnoethersch und linksregulär.*

Beweis. Nach Cor. 12.6 ist R linksnoethersch. Sei $I \subseteq R$ ein Linksideal betrachtet als filtrierter Untermodul. Insbesondere ist $F_\bullet I$ ausschöpfend und separiert. Auf Grund von Satz 11.2.i ist also $\text{gr}(I)$ ein Linksideal in $\text{gr}(R)$. Da $\text{gr}(R)$ linksnoethersch und linksregulär ist, ist $\text{gr}(I)$ endlich-erzeugt mit $\text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(I)) < \infty$. Aus Satz 12.12 folgt dann $\text{pd}_R(I) \leq \text{pd}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(I)) < \infty$. \square

13 Gute Filtrierungen

Sei R ein filtrierter Ring mit ausschöpfender Filtrierung $F_\bullet R$.

Definition. Sei M ein endlich-erzeugter filtrierter R -Modul; die Filtrierung $F_\bullet M$ heißt gut, wenn ein Erzeugendensystem x_1, \dots, x_r von M und $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$F_n M = \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Beachte:

- 1) $F_\bullet M$ ist gut genau dann, wenn ein strikter surjektiver Homomorphismus von filtrierten R -Moduln

$$R(-p_1) \oplus \dots \oplus R(-p_r) \twoheadrightarrow M$$

existiert.

- 2) Gute Filtrierungen sind ausschöpfend.
- 3) Ist $F_\bullet M$ gut, $L \subseteq M$ R -Untermodul und $N := M/L$ als filtrierter R -Modul, so ist $F_\bullet N$ ebenfalls gut. (Warnung: $F_\bullet L := L \cap F_\bullet M$ ist im Allgemeinen **nicht** gut.)
- 4) Sei M ein endlich-erzeugter R -Modul mit Erzeugendensystem x_1, \dots, x_r , und seien $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Z}$. Dann wird durch $F_n M := \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i$ eine gute Filtrierung auf M definiert.

Lemma 13.1. Seien $F_\bullet M$ und $F'_\bullet M$ gute Filtrierungen des endlich-erzeugten R -Moduls M ; dann existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit

$$F_{n-c} M \subseteq F'_n M \subseteq F_{n+c} M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} F_n M &= F_{n-p_1} R \cdot x_1 + \dots + F_{n-p_r} R \cdot x_r , \\ F'_n M &= F_{n-q_1} R \cdot y_1 + \dots + F_{n-q_s} R \cdot y_s . \end{aligned}$$

Wir wählen $N, N' \in \mathbb{N}$ mit

$$x_1, \dots, x_r \in F'_N M \quad \text{und} \quad y_1, \dots, y_s \in F_{N'} M .$$

Setze $N'' := \max\{|p_1|, \dots, |p_r|, |q_1|, \dots, |q_s|\}$ und $c := N + N' + N''$. Dann

$$\begin{aligned} F'_n M &\subseteq F_{n+|q_1|} R \cdot F_{N'} M + \dots + F_{n+|q_s|} R \cdot F_{N'} M \\ &\subseteq F_{n+N''} R \cdot F_{N'} M \subseteq F_{n+c} M \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_{n-c} M &\subseteq F_{n-c+|p_1|} R \cdot F'_N M + \dots + F_{n-c+|p_r|} R \cdot F'_N M \\ &\subseteq F'_{n-c+N+N''} M = F'_{n-N'} M \subseteq F'_n M . \end{aligned}$$

□

Der graduierte Ring

$$\tilde{R} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_n R \quad \text{als abelsche Gruppe}$$

mit der Multiplikation

$$(a_n)_n \cdot (b_m)_m := \left(\sum_{n+m=k} a_n b_m \right)_k$$

heißt der *Rees-Ring* zu $F_\bullet R$. Für jeden filtrierten R -Modul M heißt der graduierte \tilde{R} -Modul

$$\tilde{M} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F_n M \quad \text{als abelsche Gruppe}$$

mit der Skalarmultiplikation

$$(a_n)_n \cdot (y_m)_m := \left(\sum_{n+m=k} a_n y_m \right)_k$$

der *Rees-Modul* zu $F_\bullet M$.

Für $f \in F_0 \text{Hom}_R(M, N)$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \quad \tilde{M} &\longrightarrow \tilde{N} \\ (y_n)_n &\longmapsto (f(y_n))_n \end{aligned}$$

ein Homomorphismus von graduierten \tilde{R} -Moduln. Also ist

$$\begin{aligned} \text{filtrierter } R\text{-Modul} &\longrightarrow \text{graduierter } \tilde{R}\text{-Modul} \\ M &\longmapsto \tilde{M} \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

ein Funktor.

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \tilde{R} &\longrightarrow \text{gr}(R) \\ (a_n)_n &\longmapsto (a_n + F_{n-1} R)_n \end{aligned}$$

ein surjektiver Homomorphismus von graduierten Ringen. Was ist der Kern?

Notation. Für $y \in F_m M$ bezeichne $[y]_m \in \tilde{M}$ das durch

$$\dots + 0 + y + 0 + \dots \in \dots \oplus F_{m-1} M \oplus F_m M \oplus F_{m+1} \oplus \dots$$

gegebenen Element. Wir setzen

$$X := [1]_1 \in \tilde{R}.$$

Beachte:

- 1) X liegt im Zentrum von \tilde{R} und ist kein Nullteiler.

- 2) Für $y \in F_m M$ gilt $X \cdot [y]_m = [y]_{m+1}$, also $[y]_{m+1} - [y]_m \in (X - 1)\tilde{M}$. Wenn $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, ist folglich

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \tilde{M}/(X - 1)\tilde{M} \\ y &\longmapsto [y]_m + (X - 1)\tilde{M}, \text{ falls } y \in F_m M \end{aligned}$$

eine wohldefinierte additive Abbildung. Für $M = R$ ist diese Abbildung ein Ringhomomorphismus.

- 3) Die Abbildung

$$\tilde{M} \xrightarrow{X \cdot} \tilde{M}$$

ist stets injektiv, denn $X \cdot (y_n)_n = (y_{n-1})_n$.

Satz 13.2. *Sei M ein filtrierter R -Modul; dann gilt:*

- i. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \tilde{M}/X\tilde{M} &\xrightarrow{\cong} \text{gr}(M) \\ (y_n)_n + X\tilde{M} &\longmapsto (y_n + F_{n-1}M)_n \end{aligned}$$

ist bijektiv;

- ii. *ist $F_\bullet M$ ausschöpfend, so ist $M \xrightarrow{\cong} \tilde{M}/(X - 1)\tilde{M}$ ein Isomorphismus.*

Insbesondere hat man die Ringisomorphismen

$$\tilde{R}/X\tilde{R} \cong \text{gr}(R) \quad \text{und} \quad R \cong \tilde{R}/(X - 1)\tilde{R}.$$

Beweis. i. Wegen $X \cdot (y_n)_n = (y_{n-1})_n$ ist die Abbildung wohldefiniert. Offensichtlich ist sie surjektiv. Seien also $(y_n)_n$ und $(y'_n)_n \in \tilde{M}$ mit $z_{n-1} := y_n - y'_n \in F_{n-1}M$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$(y_n)_n - (y'_n)_n = (y_n - y'_n)_n = (z_{n-1})_n = X \cdot (z_n)_n \in X\tilde{M}.$$

ii. Es wurde schon begründet, daß die Abbildung wohldefiniert ist. *Injektivität:* Seien $z \in F_m M$ und $z' \in F_l M$ mit $m \leq l$ und $[z]_m - [z']_l = (X - 1)(y_n)_n$. Das bedeutet

$$(y_{n-1} - y_n)_n = (\dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle } m}}{z}, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stelle } l}}{-z'}, 0, \dots).$$

Es folgt $z = y_{m-1} - y_m$, $z' = y_l - y_{l-1}$ und $y_n = y_{n-1}$ für alle $n \neq m, l$. Aber $y_n = 0$ für $n \ll 0$ und $n \gg 0$ und somit $y_{m-1} = y_l = 0$. Wir erhalten schließlich $z = -y_m = -y_{m+1} = \dots = -y_{l-1} = z'$. *Surjektivität:* $(y_n)_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [y_n]_n$. \square

Satz 13.3. *Sei M ein filtrierter R -Modul; dann gilt:*

- i. *Ist M endlich-erzeugt mit guter Filtrierung $F_\bullet M$, so ist \tilde{M} endlich-erzeugt als \tilde{R} -Modul und $\text{gr}(M)$ ist endlich-erzeugt als $\text{gr}(R)$ -Modul;*

ii. ist \tilde{M} endlich-erzeugt als \tilde{R} -Modul und ist $F_\bullet M$ ausschöpfend, so ist M endlich-erzeugt und $F_\bullet M$ ist gut.

Beweis. i. Seien x_1, \dots, x_r Erzeugende von M und $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Z}$ mit

$$F_n M = \sum_i F_{n-p_i} R \cdot x_i$$

Dann gilt $x_i \in F_{p_i} M$ und

$$\tilde{M} = \sum_{i=1}^r \tilde{R} \cdot [x_i]_{p_i} .$$

Aus Satz 13.2.i folgt also, daß

$$\text{gr}(M) = \sum_{i=1}^r \text{gr}(R) \cdot (x_i + F_{p_i-1} M) .$$

ii. Sei \tilde{M} endlich-erzeugt. Wegen $(y_n)_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [y_n]_n$ in \tilde{M} finden wir endlich viele Erzeugende der Form

$$[x_1]_{p_1}, \dots, [x_r]_{p_r} \quad \text{mit } x_i \in F_{p_i} M .$$

Also $\tilde{M} = \sum_i \tilde{R} \cdot [x_i]_{p_i}$ und

$$F_n M = \tilde{M}_n = \sum_i \tilde{R}_{n-p_i} \cdot [x_i]_{p_i} = \sum_i F_{n-p_i} R \cdot x_i .$$

Ist $F_\bullet M$ ausschöpfend, so folgt $M = \sum_{i=1}^r R x_i$. □

Corollar 13.4. Sei \tilde{R} linksnoethersch; weiter sei M ein endlich-erzeugter filtrierter R -Modul und $N \subseteq M$ ein filtrierter Untermodul; dann gilt:

$$F_\bullet M \text{ gut} \implies F_\bullet N \text{ gut}.$$

Beweis. Nach Satz 13.3.i ist \tilde{M} endlich-erzeugt als \tilde{R} -Modul. Da \tilde{R} linksnoethersch ist, muß der Untermodul $\tilde{N} \subseteq \tilde{M}$ ebenfalls endlich-erzeugt sein. Mit $F_\bullet M$ ist auch $F_\bullet N$ ausschöpfend. Also ist $F_\bullet N$ gut nach Satz 13.3.ii. □

Beachte: (Satz 13.2) \tilde{R} linksnoethersch $\implies R$ und $\text{gr}(R)$ sind linksnoethersch.

Lemma 13.5. Sei $F_\bullet R$ vollständig; weiter sei M ein filtrierter R -Modul mit ausschöpfender und separierter Filtrierung $F_\bullet M$; dann ist M endlich-erzeugt mit guter Filtrierung $F_\bullet M$ genau dann, wenn $\text{gr}(M)$ endlich-erzeugt ist als $\text{gr}(R)$ -Modul.

Beweis. Die direkte Implikation folgt aus Satz 13.3.i. Für die Rückimplikation benutze man die Existenz einer strikten Surjektion

$$R(-p_1) \oplus \dots \oplus R(-p_r) \twoheadrightarrow M$$

nach 12.3. □

Das *graduierte Jacobson-Radikal* von \tilde{R} ist definiert als

$$\text{Jac}^{\text{gr}}(\tilde{R}) := \text{Durchschnitt aller maximalen echten graduierten Linksideale von } \tilde{R} .$$

Mit vollständig analogem Beweis gilt dann das "graduierte Nakayama-Lemma":

Sei L endlich-erzeugter graduiertes \tilde{R} -Modul; aus $\text{Jac}^{\text{gr}}(\tilde{R})L = L$ folgt $L = 0$.

Satz 13.6. *Sei \tilde{R} linksnoethersch und gelte $F_{-1}R \subseteq \text{Jac}(F_0R)$; ist für einen filtrierten R -Modul M der Rees-Modul \tilde{M} ein endlich-erzeugter \tilde{R} -Modul, so ist $F_{\bullet}M$ separiert.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß

$$L := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} X^m \tilde{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m M) = 0$$

gilt. Auf Grund der Voraussetzungen an \tilde{R} und \tilde{M} ist L ein endlich-erzeugter \tilde{R} -Modul. Außerdem gilt $XL = L$. Die Behauptung folgt deswegen aus dem graduierten Nakayama-Lemma, sobald wir gezeigt haben, daß $X \in \text{Jac}^{\text{gr}}(\tilde{R})$. Sei dazu $\mathfrak{m} \subseteq \tilde{R}$ ein beliebiges maximales graduiertes Linksideal. Aus $1 \notin \mathfrak{m}$ folgt $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap \tilde{R}_0 \neq \tilde{R}_0$. Dann existiert ein maximales Linksideal $\mathfrak{n} \subseteq \tilde{R}_0$ mit $\mathfrak{m}_0 \subseteq \mathfrak{n}$. Aus der Voraussetzung, daß $F_{-1}R \subseteq \text{Jac}(F_0R)$, ergibt sich andererseits

$$X\tilde{R} \cap \tilde{R}_0 \subseteq \text{Jac}(\tilde{R}_0) .$$

Wir erhalten

$$(\mathfrak{m} + X\tilde{R})_0 = \mathfrak{m}_0 + (X\tilde{R})_0 \subseteq \mathfrak{n} + \text{Jac}(\tilde{R}_0) \subseteq \mathfrak{n}$$

und damit $\mathfrak{m} + X\tilde{R} \neq \tilde{R}$. Aus der Maximalität von \mathfrak{m} folgt dann aber $X\tilde{R} \subseteq \mathfrak{m}$. Da \mathfrak{m} beliebig war, beweist dies, daß $X\tilde{R} \subseteq \text{Jac}^{\text{gr}}(\tilde{R})$. \square

Corollar 13.7. *Sei \tilde{R} linksnoethersch und gelte $F_{-1}R \subseteq \text{Jac}(F_0R)$; weiter sei M ein endlich-erzeugter filtrierter R -Modul mit guter Filtrierung $F_{\bullet}M$; dann gilt:*

- i. *Für jeden Untermodul $N \subseteq M$ ist $N = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (N + F_n M)$;*
- ii. *$F_{\bullet}M$ ist separiert;*
- iii. *für filtrierte Untermoduln $L \subseteq N \subseteq M$ gilt: $\text{gr}(L) = \text{gr}(N) \implies L = N$.*

Beweis. Nach Satz 13.3.i ist \tilde{M} endlich-erzeugt als \tilde{R} -Modul. Aus Satz 13.6 folgt dann, daß $F_{\bullet}M$ separiert ist. Wenden wir dies an auf den filtrierten Faktormodul M/N , so ergibt sich

$$0 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F_n(M/N) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (F_n M + N)/N ,$$

was nichts anderes als die Behauptung i. ist. Schließlich gelte $\text{gr}(L) = \text{gr}(N)$. Sei $x \in N$. Da $F_{\bullet}M$ ausschöpfend ist, existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $x \in F_m N$. Nach Annahme gilt $\text{gr}_m(L) = \text{gr}_m(N)$ und damit $x \in L + F_{m-1}N$. Induktiv folgt so $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} L + F_n N \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} L + F_n M$. Wegen i. heißt das $x \in L$, also $N \subseteq L$ und damit $L = N$. \square

Bemerkung 13.8. *ist $F_\bullet R$ vollständig, so gilt $F_{-1}R \subseteq \text{Jac}(F_0R)$.*

Beweis. Sei $x \in F_{-1}R$. Dann ist $x^n \in F_{-n}R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Vollständigkeit von $F_\bullet R$ ist $y := 1 + x + x^2 + \dots \in R$ wohldefiniert mit $y(1-x) = 1$. Da $F_{-1}R$ ein Ideal in F_0R ist, gilt $-ax \in F_{-1}R$ für alle $a \in F_0R$ und folglich $1 + (F_0R)x \subseteq (F_0R)^\times$. Letzteres impliziert aber $x \in \text{Jac}(F_0R)$. \square

14 Die Artin-Rees-Eigenschaft

Weiterhin sei R ein filtrierter Ring mit ausschöpfender $F_\bullet R$.

Definition. *Sei M ein filtrierter R -Modul; die Filtrierung $F_\bullet M$ heißt Artin-Rees, falls zu jedem endlich-erzeugten R -Untermodul $N \subseteq M$ eine gute Filtrierung $G_\bullet N$ auf N und ein $c \in \mathbb{N}$ existieren mit*

$$N \cap F_n M \subseteq G_{n+c} N \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Lemma 14.1. *Sei M ein filtrierter R -Modul, und sei die Filtrierung $F_\bullet M$ ausschöpfend und Artin-Rees; dann existiert zu jedem endlich-erzeugten Untermodul $N \subseteq M$ und zu jeder guten Filtrierung $G_\bullet N$ auf N ein $c \in \mathbb{N}$ mit*

$$G_{n-c} N \subseteq N \cap F_n M \subseteq G_{n+c} N \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Beweis. Seien zunächst $G_\bullet N$ und $c \in \mathbb{N}$ gegeben wie in der Definition verlangt. Gelte etwa

$$G_n N = \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot y_i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

mit geeigneten Erzeugenden $y_i \in N$. Da $F_\bullet M$ ausschöpfend ist, existiert ein $a \in \mathbb{N}$ mit $y_1, \dots, y_r \in F_a M$. Wir setzen $b := \max(|p_1|, \dots, |p_r|)$. Dann gilt

$$G_n N \subseteq F_{n+a+b} M \quad \text{bzw.} \quad G_{n-(a+b)} N \subseteq N \cap F_n M .$$

Für $d := \max(a+b, c)$ ergibt sich also

$$G_{n-d} N \subseteq N \cap F_n M \subseteq G_{n+d} N .$$

Daraus folgt die Behauptung für eine beliebige gute Filtrierung auf N mit Hilfe von Lemma 13.1. \square

Lemma 14.2. *Sei $(N, G_\bullet N) \subseteq (M, F_\bullet M)$ eine Inklusion von filtrierten R -Moduln, wobei $G_\bullet N$ ausschöpfend sei; für die Rees-Moduln \tilde{N}^G und \tilde{N}^F zu den Filtrierungen $G_\bullet N$ und $F_\bullet N := N \cap F_\bullet M$ gilt dann:*

- i. $\tilde{N}^G \subseteq \tilde{N}^F$ ist \tilde{R} -Untermodul;
- ii. zu jedem $a \in \tilde{N}^F$ existiert ein $k \geq 1$, so daß $X^k a \in \tilde{N}^G$;

iii. $G_\bullet N = F_\bullet N$ genau dann, wenn die Abbildung $\tilde{M}/\tilde{N}^G \xrightarrow{X \cdot} \tilde{M}/\tilde{N}^G$ injektiv ist.

Beweis. i. Dies ist klar wegen $G_n N \subseteq F_n N$.

ii. Es genügt, Elemente a der Form $a = [y]_m$ mit $y \in F_m N$ zu betrachten. Da $G_\bullet N$ ausschöpfend ist, existiert ein $l > m$ mit $y \in G_l N$. Dann ist

$$X^{l-m} \cdot [y]_m = [y]_l \in \tilde{N}^G .$$

iii. Zunächst gelte $G_\bullet N = F_\bullet N$. Wir betrachten M/N als filtrierten R -Modul bezüglich der Quotientenfiltrierung $F_n(M/N) = F_n M + N/N$. Dann ist

$$0 \longrightarrow \tilde{N}^G = \tilde{N}^F \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \widetilde{M/N} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von \tilde{R} -Moduln. Folglich erhalten wir $\tilde{M}/\tilde{N}^G \cong \widetilde{M/N}$. Auf dem Rees-Modul $\widetilde{M/N}$ ist die Multiplikation mit X aber injektiv, wie wir schon festgehalten haben.

Umgekehrt sei jetzt die waagrechte Abbildung in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}/\tilde{N}^G & \xrightarrow{X \cdot} & \tilde{M}/\tilde{N}^G \\ \uparrow & \nearrow X \cdot & \\ \tilde{N}^F/\tilde{N}^G & & \end{array}$$

injektiv. Wegen ii. ist aber die schräge Abbildung nur injektiv, wenn $\tilde{N}^F/\tilde{N}^G = 0$, also $F_\bullet N = G_\bullet N$ gilt. \square

Satz 14.3. Für einen filtrierten R -Modul M mit ausschöpfender Filtrierung $F_\bullet M$ sind äquivalent:

- i. \tilde{M} ist noethersch;
- ii. M und $\text{gr}(M)$ sind noethersch, und $F_\bullet M$ ist Artin-Rees.

Beweis. i. \implies ii. Wegen Satz 13.2 sind M und $\text{gr}(M)$ sind noethersch. Nach Satz 13.3.ii ist die Filtrierung $F_\bullet M$ gut. Sei nun $N \subseteq M$ ein (endlich-erzeugter) R -Untermodul. Im Beweis von Cor. 13.4 haben wir gesehen, daß dann auch die Filtrierung $F_\bullet N := N \cap F_\bullet M$ gut ist. Also ist $F_\bullet M$ Artin-Rees.

ii. \implies i. *Schritt 1:* Sei $\mathcal{N} \subseteq \tilde{M}$ ein *graduierter* \tilde{R} -Untermodul. Wir wollen zeigen, daß \mathcal{N} endlich-erzeugt ist. Dazu definieren wir einen R -Untermodul $N \subseteq M$ durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} + (X-1)\tilde{M}/(X-1)\tilde{M} & \xrightarrow{\subseteq} & \tilde{M}/(X-1)\tilde{M} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ N & \xrightarrow{\subseteq} & M \end{array}$$

und setzen

$$G_n N := \text{Bild von } \mathcal{N}_n + (X-1)\tilde{M} \text{ in } N.$$

Hierzu ist zu beachten:

- * Für $a \in \mathcal{N}_n$ gilt $Xa = a + (X-1)a$, also $a = Xa - (X-1)a$. Es folgt $\mathcal{N}_n + (X-1)\tilde{M} \subseteq \mathcal{N}_{n+1} + (X-1)\tilde{M}$ und damit

$$G_n N \subseteq G_{n+1} N.$$

- * Wegen $F_m R \cdot \mathcal{N}_n = \tilde{R}_m \cdot \mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{N}_{n+m}$ gilt $F_m R \cdot G_n N \subseteq G_{n+m} N$. Also ist N ein filtrierter R -Modul.
- * Wegen $\mathcal{N}_n \cap (X-1)\tilde{M} = 0$ ist die rechte waagrechte Abbildung in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_n + (X-1)\tilde{M}/(X-1)\tilde{M} & \supseteq & \mathcal{N}_n + (X-1)\tilde{M}/(X-1)\tilde{M} \xleftarrow{\cong} \mathcal{N}_n \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ y \mapsto [y]_m & & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ F_n M & \supseteq & G_n N \end{array}$$

ein Isomorphismus. Das bedeutet, daß die Inklusion $(N, G_\bullet N) \subseteq (M, F_\bullet M)$ ein Homomorphismus von filtrierten R -Moduln ist, der beim Übergang zu den Rees-Moduln die Inklusion

$$\tilde{N}^G = \mathcal{N} \subseteq \tilde{M}$$

induziert.

Andererseits haben wir die Filtrierung $F_\bullet N := N \cap F_\bullet M (\supseteq G_\bullet N)$ auf N . Als Untermoduln noetherscher Moduln sind $N \subseteq M$ und $\text{gr}^F(N) \subseteq \text{gr}(M)$ endlich erzeugt über R bzw. $\text{gr}(R)$. Wir wählen endlich viele homogene Erzeugende $\bar{x}_i = x_i + F_{p_i-1} N \in \text{gr}_{p_i}^F(N)$ (für $i = 1, \dots, r$) für $\text{gr}(N)$. Durch Hinzufügen geeigneter weiterer Elemente können wir annehmen, daß die x_1, \dots, x_r den R -Modul N erzeugen.

Wir behaupten nun, daß die Filtrierung $F_\bullet N$ gut ist. Es gilt

$$\text{gr}_n^F(N) = \sum_{i=1}^r \text{gr}_{n-p_i}(R) \bar{x}_i$$

und damit

$$(7) \quad F_n N \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i + F_k N \right)$$

Andererseits ist wegen $N = \sum_{i=1}^r R x_i$ jedenfalls die Filtrierung

$$F'_n N := \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i$$

auf N gut. Per Konstruktion gilt

$$F'_n N \subseteq F_n N .$$

Da $F_\bullet M$ als Artin-Rees vorausgesetzt ist, finden wir nach Lemma 14.1 ein $c \in \mathbb{N}$ mit

$$F_n N = N \cap F_n M \subseteq F'_{n+c} N \quad \text{und damit} \quad F_{n-c} N \subseteq F'_n N = \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Zusammen mit (7) erhalten wir

$$F_n N \subseteq \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i + F_{n-c} N = \sum_{i=1}^r F_{n-p_i} R \cdot x_i = F'_n N$$

Somit ist $F_\bullet N = F'_\bullet N$ gut.

Es folgt (vgl. den Beweis von Satz 13.3), daß

$$\tilde{N}^F = \sum_{i=1}^r \tilde{R} \cdot [x_i]_{p_i}$$

endlich-erzeugt ist. Wegen $G_\bullet N \subseteq F_\bullet N$ und Lemma 14.2 ist $\tilde{N}^G = \mathcal{N} \subseteq \tilde{N}^F$ ein \tilde{R} -Untermodul, und es existiert ein $k \gg 0$ mit $X^k \tilde{N}^F \subseteq \mathcal{N}$. Folglich ist

$$\mathcal{N} / X^k \tilde{N}^F \subseteq \tilde{N}^F / X^k \tilde{N}^F$$

ein \tilde{R} -Untermodul. Andererseits ist $\tilde{M} / \tilde{N}^F \xrightarrow{X^k} \tilde{M} / \tilde{N}^F$ injektiv wegen Lemma 14.2.iii. Somit ist die von der Inklusion $\tilde{N}^F \subseteq \tilde{M}$ induzierte Abbildung

$$\tilde{N}^F / X^k \tilde{N}^F \longrightarrow \tilde{M} / X^k \tilde{M}$$

injektiv. Beides zusammen impliziert, daß $\mathcal{N} / X^k \tilde{N}^F$ isomorph ist zu einem Untermodul von $\tilde{M} / X^k \tilde{M}$. Wir betrachten nun die exakte Sequenz von \tilde{R} -Moduln

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & X^{k-1} \tilde{M} / X^k \tilde{M} & \xrightarrow{\subseteq} & \tilde{M} / X^k \tilde{M} & \xrightarrow{\text{pr}} & \tilde{M} / X^{k-1} \tilde{M} & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow \cong & & & & & \\ & \tilde{M} / X \tilde{M} & \cong & \text{gr}(M) & & & \end{array}$$

Da $\text{gr}(M)$ noethersch ist, folgt induktiv, daß auch $\tilde{M} / X^k \tilde{M}$ noethersch ist. Somit ist $\mathcal{N} / X^k \tilde{N}^F$ als Untermodul endlich-erzeugt. Aber $X^k \tilde{N}^F \cong \tilde{N}^F$ ist ebenfalls endlich-erzeugt. Folglich ist \mathcal{N} endlich-erzeugt.

2. *Schritt:* Wir zeigen, daß \tilde{M}_m für alle $m \in \mathbb{Z}$ ein noetherscher \tilde{R}_0 -Modul ist. Dazu sei $L \subseteq \tilde{M}_m$ ein \tilde{R}_0 -Untermodul. Der von L in \tilde{M} erzeugte \tilde{R} -Untermodul $\mathcal{N} := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{R}_{n-m} \cdot L$ ist ein graduierter \tilde{R} -Untermodul von \tilde{M} und ist somit nach

dem 1. Schritt endlich-erzeugt. Per Konstruktion können entsprechende Erzeugende in L gewonnen werden, also

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^s \tilde{R}z_i \quad \text{mit } z_1, \dots, z_s \in L .$$

Insbesondere folgt

$$L \subseteq \mathcal{N}_m = \sum_{i=1}^s \tilde{R}_0 z_i \subseteq L .$$

Also ist $L = \sum_{i=1}^s \tilde{R}_0 z_i$ endlich-erzeugt.

3. *Schritt:* Wir betrachten den graduierten Modul $\tilde{M}^+ := \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{M}_n$ über dem graduierten Ring $\tilde{R}^+ := \bigoplus_{n \geq 0} \tilde{R}_n$. Sei $\mathcal{L} \subseteq \tilde{M}^+$ ein graduiertes \tilde{R}^+ -Untermodul. Wir wollen zeigen, daß \mathcal{L} endlich-erzeugt ist. Sei \mathcal{N} der von \mathcal{L} in \tilde{M} erzeugte \tilde{R} -Untermodul. Dies ist wiederum ein graduiertes Untermodul, der deshalb nach dem 1. Schritt von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt wird, etwa

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^r \tilde{R}y_i \quad \text{mit } y_i \in \mathcal{L}_{p_i} \subseteq \mathcal{N}_{p_i} .$$

(insbesondere $p_i \geq 0$). Dann gilt

$$\mathcal{N}_n = \sum_{i=1}^r \tilde{R}_{n-p_i} \cdot y_i .$$

Mit $p := \max(p_1, \dots, p_r)$ erhalten wir

$$\bigoplus_{n \geq p} \mathcal{L}_n \subseteq \sum_{i=1}^r \tilde{R}^+ \cdot y_i .$$

Auf Grund des 2. Schrittes ist $\mathcal{L}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{p-1}$ als \tilde{R}_0 -Untermodul von $\tilde{M}_0 \oplus \dots \oplus \tilde{M}_{p-1}$ endlich-erzeugt etwa von z_1, \dots, z_s . Dann sind $y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_s$ Erzeugende von \mathcal{L} als \tilde{R}^+ -Modul.

4. *Schritt:* Sei $L \subseteq \tilde{M}^+$ ein beliebiger \tilde{R}^+ -Untermodul. Wir wollen zeigen, daß L endlich-erzeugt ist. Dazu definieren wir zu L einen graduierten \tilde{R}^+ -Untermodul $L^{\text{gr}} \subseteq \tilde{M}^+$ durch

$$L_m^{\text{gr}} := \{x \in \tilde{M}_m : \text{es existiert ein } y \in L \text{ mit } y - x \in \bigoplus_{n < m} \tilde{M}_n\} .$$

Nach dem 3. Schritt wird L^{gr} erzeugt von endlich vielen homogenen Elementen x_1, \dots, x_r mit $x_i \in L_{p_i}^{\text{gr}}$. Wir fixieren Elemente $y_i \in L$ mit $y_i \in x_i + \bigoplus_{n < p_i} \tilde{M}_n$, und wir zeigen, daß y_1, \dots, y_r den \tilde{R}^+ -Modul L erzeugen. Sei also $z \in L$ ein beliebiges Element, das wir in seine homogenen Komponenten $z = z_1 + \dots + z_k$ mit $z_j \in \tilde{M}_{m_j}$ und $m_1 < \dots < m_k$ zerlegen. Dann gilt $z_k \subseteq L_{m_k}^{\text{gr}}$. Genauer sei

$$z_k = \sum_{\substack{i=1 \\ m_k \geq p_i}}^r a_i x_i \quad \text{mit } a_i \in \tilde{R}_{m_k - p_i} \subseteq \tilde{R}^+ .$$

Wir setzen $z' := \sum_{\substack{i=1 \\ m_k \geq p_i}}^r a_i y_i \in L$. Dann gilt

$$z - z' \in L \cap \bigoplus_{n < m_k} \tilde{M}_n \quad \text{und} \quad z \in \left(\sum_{i=1}^r \tilde{R}^+ y_i \right) + \left(\bigoplus_{n < m_k} \tilde{M}_n \right).$$

Diese Argumentation wiederholend und induktiv so fortfahrend erhalten wir schließlich $z \in \sum_{i=1}^r \tilde{R}^+ y_i$.

5. *Schritt:* Sei nun $\mathcal{N} \subseteq \tilde{M}$ ein beliebiger \tilde{R} -Untermodul. Wir definieren einen graduierten \tilde{R} -Untermodul $\mathcal{N}' \subseteq \tilde{M}$ durch

$$\mathcal{N}'_m := \{x \in \tilde{M}_m : \text{es existiert ein } y \in \mathcal{N} \text{ mit } y - x \in \bigoplus_{n > m} \tilde{M}_n\}.$$

Nach dem 1. Schritt wird \mathcal{N}' als \tilde{R} -Untermodul erzeugt von endlich vielen homogenen Elementen x_1, \dots, x_r mit $x_i \in \mathcal{N}'_{p_i}$. Wir fixieren Elemente $y_i \in \mathcal{N}$ mit $y_i \in x_i + \bigoplus_{n > p_i} \tilde{M}_n$. Mit dem gleichen Argument wie im 4. Schritt folgt induktiv

$$\mathcal{N} \subseteq \sum_{i=1}^r \tilde{R} y_i + (\mathcal{N} \cap \tilde{M}^+).$$

Nach dem 4. Schritt ist $\mathcal{N} \cap \tilde{M}^+$ endlich-erzeugt über \tilde{R}^+ . Beides zusammen ergibt, daß \mathcal{N} endlich-erzeugt ist. \square

Satz 14.4. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig, und sei $\text{gr}(R)$ linksnoethersch; dann gilt:*

- i. R und \tilde{R} sind linksnoethersch;
- ii. $F_\bullet R$ ist Artin-Rees.

Für jeden endlich-erzeugten filtrierten R -Modul M mit guter Filtrierung $F_\bullet M$ gilt außerdem:

- iii. $F_\bullet M$ ist separiert;
- iv. für jeden filtrierten Untermodul $N \subseteq M$ ist $F_\bullet N$ gut und

$$N = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (N + F_n M);$$

- v. für filtrierte Untermoduln $L \subseteq N \subseteq M$ gilt: $\text{gr}(L) = \text{gr}(N) \implies L = N$.

Beweis. Nach Cor. 12.6 ist R linksnoethersch. Sei $L \subseteq R$ ein Linksideal mit $F_\bullet L := L \cap F_\bullet R$, so daß $\text{gr}(L) \subseteq \text{gr}(R)$. Da $\text{gr}(R)$ als linksnoethersch vorausgesetzt ist, ist $\text{gr}(L)$ endlich-erzeugt. Wegen Lemma 13.5 ist dann (L endlich-erzeugt und) $F_\bullet L$ gut. Insbesondere ist $F_\bullet R$ Artin-Rees. Aus Satz 14.3 erhalten wir, daß \tilde{R} linksnoethersch ist. Wegen Bem. 13.8 gilt $F_{-1} R \subseteq \text{Jac}(F_0 R)$. Also folgen iii. - v. mit Hilfe der Corollare 13.4 und 13.7. \square

15 Übertragung der Auslander-Regularität

Wir setzen in diesem Paragraphen $F_\bullet R$ als ausschöpfend und vollständig voraus und $\text{gr}(R)$ als links- und rechtsnoethersch. Wegen Cor. 12.6 ist dann auch R links- und rechtsnoethersch.

Sei M ein endlich-erzeugter R -Modul. Wir fixieren eine *gute* Filtrierung $F_\bullet M$ auf M . Wegen Satz 14.4 ist $F_\bullet M$ automatisch separiert. Nach Satz 13.3 ist $\text{gr}(M)$ ein endlich-erzeugter $\text{gr}(R)$ -Modul. Nach Satz 12.4 existiert eine strikt-exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow P^q \xrightarrow{\delta^q} \dots \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

wobei die P^q für alle $q \leq 0$ endlich-erzeugt und filt-frei sind. Dann ist auch (Satz 11.2) die Sequenz

$$\dots \rightarrow \text{gr}(P^q) \xrightarrow{\text{gr}(\delta^q)} \dots \rightarrow \text{gr}(P^0) \rightarrow \text{gr}(M) \rightarrow 0$$

exakt mit endlich-erzeugten freien $\text{gr}(R)$ -Moduln $\text{gr}(P^q)$ für alle $q \leq 0$. Wir halten fest:

* $\text{Ext}_R^*(M, R)$ wird berechnet durch den Komplex

$$(8) \quad \text{Hom}_R(P^0, R) \xrightarrow{d^0} \dots \rightarrow \text{Hom}_R(P^q, R) \xrightarrow{d^{-q}} \dots$$

mit $d^q := \text{Hom}_R(\delta^{-q-1}, R)$.

* $\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^*(\text{gr}(M), \text{gr}(R))$ wird berechnet durch den Komplex

$$(9) \quad \text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^0), \text{gr}(R)) \xrightarrow{\bar{d}^0} \dots \\ \dots \rightarrow \text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^q), \text{gr}(R)) \xrightarrow{\bar{d}^{-q}} \dots$$

mit $\bar{d}^q := \text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(\delta^{-q-1}), \text{gr}(R))$.

Auf $\text{Hom}_R(P^q, R)$ hatten wir die Filtrierung

$$F_m \text{Hom}_R(P^q, R) = \{f \in \text{Hom}_R(P^q, R) : f(F_n P^q) \subseteq F_{n+m} R \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

definiert. Dadurch wird $\text{Hom}_R(P^q, R)$ zu einem filtrierten R -Rechtsmodul und (8) zu einem Komplex von filtrierten Moduln. Außerdem erhalten wir induzierte Filtrierungen

$$F_m \text{Ext}_R^p(M, R) = F_m(\ker(d^p) / \text{im}(d^{p-1})) \\ = (\ker(d^p) \cap F_m \text{Hom}_R(P^{-p}, R) + \text{im}(d^{p-1})) / \text{im}(d^{p-1}).$$

Behauptung 1:

i. $F_\bullet \text{Hom}_R(P^q, R)$ ist gut;

ii. $F_\bullet \text{Ext}_R^p(M, R)$ ist gut.

Beweis. i. Aus $P^q \cong R(n_1) \oplus \dots \oplus R(n_r)$ folgt

$$\text{Hom}_R(P^q, R) \cong \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_R(R(n_i), R) = \bigoplus_i \text{Hom}_R(R, R)(-n_i) = \bigoplus_i R(-n_i) .$$

ii. Dies folgt aus Satz 14.4.iv mit i. und der Tatsache, daß Quotientenfiltrierungen von guten Filtrierungen wieder gut sind. \square

Behauptung 2: $\text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^q), \text{gr}(R))$ ist mittels

$$\text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^q), \text{gr}(R))_m := \{ \bar{f} \in \text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^q), \text{gr}(R)) : \bar{f} \text{ hat Grad } m \}$$

ein graduierter $\text{gr}(R)$ -Rechtsmodul, und (9) ist ein Komplex von graduierten Moduln. Insbesondere sind damit auch die

$$\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^p(\text{gr}(M), \text{gr}(R)) = \ker(\bar{d}^p) / \text{im}(\bar{d}^{p-1})$$

graduierete Moduln.

Behauptung 3: Wir haben

$$\text{gr}_\bullet \text{Hom}_R(P^q, R) = \text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^q), \text{gr}(R))$$

als graduierte $\text{gr}(R)$ -Rechtsmoduln.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} F_m \text{Hom}_R(P^q, R) &\longrightarrow \text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^q), \text{gr}(R))_m \\ f &\longmapsto \text{gr}(f) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert mit Kern $F_{m-1} \text{Hom}_R(P^q, R)$. Nach Lemma 12.1.ii ist sie surjektiv. \square

Wir erhalten also

$$\text{gr}_\bullet (8) = (9) .$$

Betrachten wir die Spektralsequenz zu dem filtrierten Komplex

$${}^p \text{Hom}_R(P^{-\bullet}, R) := F_{-p} \text{Hom}_R(P^{-\bullet}, R) ,$$

so folgt mit Cor. 5.2, daß

$$\begin{aligned} E_1^{pq} &= h^{p+q}(\text{gr}_{-p} \text{Hom}_R(P^{-\bullet}, R)) \\ &= h^{p+q}(\text{Hom}_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(P^{-\bullet}), \text{gr}(R))_{-p}) \\ &= \text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{p+q}(\text{gr}(M), \text{gr}(R))_{-p} , \end{aligned}$$

gilt, und mit Satz 5.3, daß

$$\begin{aligned} E_\infty^{pq} &\cong \frac{\operatorname{im}(h^{p+q}(F_{-p} \operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet}, R)) \rightarrow h^{p+q}(\operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet}, R)))}{\operatorname{im}(h^{p+q}(F_{-p-1} \operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet}, R)) \rightarrow h^{p+q}(\operatorname{Hom}_R(P^{-\bullet}, R)))} \\ &= \operatorname{gr}_{-p} \operatorname{Ext}_R^{p+q}(M, R) . \end{aligned}$$

Die Filtrierung auf (8) ist im Allgemeinen nicht regulär, weswegen die Diskussion in §5 nicht ausreicht. Allgemein hatte man

$$(10) \quad \begin{array}{c} E_r^{pq} = Z_r^{pq} / (B_{r-1}^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) \\ \downarrow \\ Z_r^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_{r-1}^{p+1, q-1}) \\ \uparrow \\ Z_r^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}) \\ \uparrow \\ E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / (B_\infty^{pq} + Z_\infty^{p+1, q-1}) . \end{array}$$

Behauptung 4: Für jedes $k \geq 0$ existiert ein $r(k) \geq 1$, so daß für alle $r \geq r(k)$ und $p \in \mathbb{Z}$ gilt:

- $Z_\infty^{p, k-p} + F_{-p-1} \operatorname{Hom}_R(P^{-k}, R) = Z_r^{p, k-p} + F_{-p-1} \operatorname{Hom}_R(P^{-k}, R)$,
- $B_\infty^{p, k-p} = B_r^{p, k-p}$,
- $Z_r^{p, k-p} = Z_\infty^{p, k-p} + Z_{r-1}^{p+1, k-p-1}$.

Beweis. a. Wir setzen $L^k := \operatorname{Hom}_R(P^{-k}, R)$. Nach Behauptung 1 sind $F_\bullet L^k$ und $F_\bullet L^{k+1}$ gut. Damit sind auch die Filtrierungen $d^k(F_\bullet L^k)$ und (nach Satz 14.4.iv) $F_\bullet L^{k+1} \cap \operatorname{im}(d^k)$ auf $\operatorname{im}(d^k)$ gut. Wegen Lemma 13.1 existiert dann ein $c \geq 1$ mit

$$F_n L^{k+1} \cap d^k(L^k) \subseteq d^k(F_{n+c} L^k) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Sei nun $x \in Z_{c+1}^{p, k-p} = (d^k)^{-1}(F_{-p-c-1} L^{k+1}) \cap F_{-p} L^k$. Dann gilt

$$d^k(x) \in F_{-p-c-1} L^{k+1} \cap d^k(F_{-p} L^k) \subseteq d^k(F_{-p-1} L^k) .$$

Also $d^k(x) = d^k(y)$ für ein $y \in F_{-p-1} L^k$. Wir erhalten $d^k(x-y) = 0$ und $x-y \in F_{-p} L^k$ und somit $x-y \in Z_\infty^{p, k-p}$. Es folgt

$$x \in Z_\infty^{p, k-p} + F_{-p-1} L^k .$$

b. Ganz analog wie eben haben wir ein $d \geq 1$ mit

$$F_n L^k \cap d^{k-1}(L^{k-1}) \subseteq d^{k-1}(F_{n+d} L^{k-1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} .$$

Dann gilt

$$B_\infty^{p,k-p} = d^{k-1}(L^{k-1}) \cap F_{-p}L^k \subseteq d^{k-1}(F_{-p+d}L^{k-1}) \cap F_{-p}L^k = B_d^{p,k-p} .$$

Deswegen nehmen wir $r(k) := \max(c+1, d)$.

c. Offensichtlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Umgekehrt sei also $x \in Z_r^{p,k-p}$. Aus a. folgt $x = z + y$ mit $z \in Z_\infty^{p,k-p}$ und $y \in F_{-p-1}L^k$. Also erhalten wir $y = x - z \in Z_r^{p,k-p} \cap F_{-p-1}L^k = Z_{r-1}^{p+1,k-p-1}$. \square

Durch Einsetzen in (10) erhalten wir Folgendes.

Behauptung 5: $E_r^{p,k-p} \cong E_\infty^{p,k-p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ und $r \geq r(k)$.

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \text{gr}_p \text{Ext}_R^k(M, R) &\cong E_\infty^{-p,k+p} \cong E_{r(k)}^{-p,k+p} = \text{Subquotient von } E_1^{-p,k+p} \\ &= \text{Subquotient von } \text{Ext}_{\text{gr}(R)}^k(\text{gr}(M), \text{gr}(R))_p . \end{aligned}$$

Behauptung 6: $j_R(M) \geq j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M))$.

Beweis. Sei $k < j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M))$. Aus Behauptung 5 folgt $\text{gr}_\bullet \text{Ext}_R^k(M, R) = 0$. Nach Behauptung 1 ist die Filtrierung auf $\text{Ext}_R^k(M, R)$ gut und damit ausschöpfend und separiert (Satz 14.4.iii). Also folgt $\text{Ext}_R^k(M, R) = 0$. \square

Satz 15.1. *Sei $F_\bullet R$ ausschöpfend und vollständig; dann gilt: Ist $\text{gr}(R)$ links- und rechtsnoethersch und Auslander-links- und rechtsregulär, so ist auch R links- und rechtsnoethersch und Auslander-links- und rechtsregulär. In diesem Falle hat man*

$$j_R(M) = j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M))$$

für jeden endlich-erzeugten R -Modul M mit guter Filtrierung $F_\bullet M$.

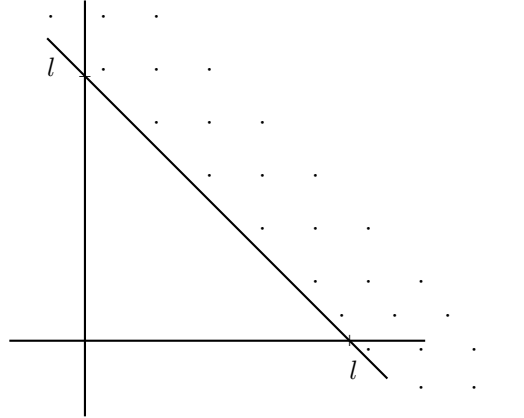
Beweis. Nach Cor. 12.14 ist R links- und rechtsnoethersch und links- und rechtsregulär. Sei M ein endlich-erzeugter R -Modul (links oder rechts), und sei $N \subseteq \text{Ext}_R^k(M, R)$ ein Untermodul. Wir haben zu zeigen, daß $j(N) \geq k$ gilt. Dazu fixieren wir eine gute Filtrierung auf M . Mit Hilfe von Behauptung 1 erhalten wir eine gute Filtrierung auf $\text{Ext}_R^k(M, R)$ und damit (Satz 14.4.iv) auf N . Nach Behauptung 6 gilt $j(N) \geq j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(N))$. Aber $\text{gr}(N) \subseteq \text{gr}_\bullet \text{Ext}_R^k(M, R)$, und Letzteres ist wegen Behauptung 5 isomorph zu einem Subquotienten von $\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^k(\text{gr}(M), \text{gr}(R))$. Mit Lemma 10.13.i folgt also

$$j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(N)) \geq j_{\text{gr}(R)}(\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^k(\text{gr}(M), \text{gr}(R))) \geq k .$$

Für den Zusatz bleibt wegen Behauptung 6 noch

$$j_R(M) \leq j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M))$$

zu zeigen. Wir können $M \neq 0$ und damit auch $\text{gr}(M) \neq 0$ annehmen. Sei $l := j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M)) < \infty$. Dann gilt $E_1^{pq} = 0$ für $p + q < l$.



Wir erhalten exakte Sequenzen von endlich-erzeugten $\text{gr}(R)$ -Moduln

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=l} E_{r+1}^{pq} \xrightarrow{\subseteq} \bigoplus_{p+q=l} E_r^{pq} \xrightarrow{d^r} S_r \subseteq \bigoplus_{p+q=l} E_r^{p+r, q-r+1} .$$

Außerdem ist S_r ein Subquotient von $\bigoplus_{p+q=l} E_1^{p+r, q-r+1} = \text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+1}(\text{gr}(M), \text{gr}(R))$. Wegen Lemma 10.13.i bzw. ii gilt dann

$$j_{\text{gr}(R)}(S_r) \geq j_{\text{gr}(R)}(\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+1}(\text{gr}(M), \text{gr}(R))) \geq l + 1$$

bzw.

$$j_{\text{gr}(R)}(\bigoplus_{p+q=l} E_r^{pq}) = \min(j_{\text{gr}(R)}(\bigoplus_{p+q=l} E_{r+1}^{pq}), j_{\text{gr}(R)}(S_r)) .$$

Nach Satz 10.9 gilt zudem

$$j_{\text{gr}(R)}(\bigoplus_{p+q=l} E_1^{pq}) = j_{\text{gr}(R)}(\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^l(\text{gr}(M), \text{gr}(R))) = l .$$

Diese Tatsachen kombinierend folgt induktiv

$$j_{\text{gr}(R)}(\bigoplus_{p+q=l} E_r^{pq}) = l \quad \text{für alle } r \geq 1 .$$

Mit Behauptung 5 erhalten wir

$$j_{\text{gr}(R)}(\text{gr} \bullet \text{Ext}_R^l(M, R)) = j_{\text{gr}(R)}(\bigoplus_{p+q=l} E_\infty^{pq}) = l < \infty .$$

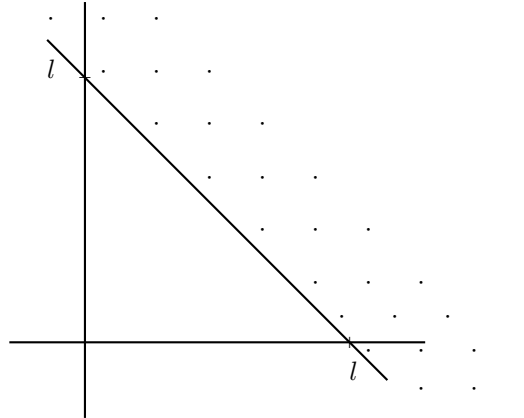
Insbesondere ist $\text{gr} \bullet \text{Ext}_R^l(M, R) \neq 0$, also $\text{Ext}_R^l(M, R) \neq 0$ und folglich $j(M) \leq l$. \square

Lemma 15.2. *Sei $F \bullet R$ ausschöpfend und vollständig, und sei $\text{gr}(R)$ links- und rechtsnoethersch und Auslander-links- und rechtsregulär; dann gilt:*

- i. Auf jedem endlich-erzeugten reinen R -Modul M existiert eine gute Filtrierung $F_\bullet M$, so daß $\text{gr}^F(M)$ ebenfalls rein ist;
- ii. sei M ein endlich-erzeugter R -Modul mit vorgegebener guter Filtrierung $F_\bullet M$; ist $\text{gr}^F(M)$ rein, so ist auch M rein.

Beweis. i. Sei M rein von der Stufe $l := j_R(M)$. Wir setzen $N := \text{Ext}_R^l(M, R)$ und fixieren eine gute Filtrierung auf N . Nach Satz 10.9 ist N rein von der Stufe l . Dabei gilt $l = j_R(N) = j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(N))$ wegen Satz 15.1. Wieder nach Satz 10.9 ist $\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^l(\text{gr}(N), \text{gr}(R))$ rein von der Stufe l . Mit Hilfe von Satz 10.12 und Satz 10.14.iii erhalten wir, daß jeder Untermodul $\neq 0$ von $\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^l(\text{gr}(N), \text{gr}(R))$ rein von der Stufe l ist.

Wir betrachten nun das Analogon für N der obigen Spektralsequenz. Nach Behauptung 1.ii existiert eine gute Filtrierung $F_\bullet \text{Ext}_R^l(N, R)$. Nach Satz 9.4 ist M ein Untermodul von $\text{Ext}_R^l(N, R)$. Also ist $\text{gr}(M)$ bezüglich der induzierten guten Filtrierung ein Untermodul von $\text{gr} \text{Ext}_R^l(N, R)$. Aber aus Behauptung 5 und der Gestalt der Spektralsequenz



folgt, daß $\text{gr} \text{Ext}_R^l(N, R) = \bigoplus_{p+q=l} E_\infty^{pq} = \bigoplus_{p+q=l} E_{r(l)}^{pq}$ ein $\text{gr}(R)$ -Untermodul von $\bigoplus_{p+q=l} E_1^{pq} = \text{Ext}_{\text{gr}(R)}^l(\text{gr}(N), \text{gr}(R))$ ist. Also können wir das eingangs Gezeigte auf $\text{gr}(M)$ anwenden und erhalten, daß $\text{gr}(M)$ rein ist von der Stufe l .

ii. Nach Satz 15.1 gilt $l := j_R(M) = j_{\text{gr}(R)}(\text{gr}(M))$. Aus der Reinheit von $\text{gr}(M)$ folgt

$$\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+s}(\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+s}(\text{gr}(M), \text{gr}(R)), \text{gr}(R)) = 0 \quad \text{für alle } s \geq 1 .$$

Zusammen mit der Gorenstein-Bedingung ergibt sich

$$j_{\text{gr}(R)}(\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+s}(\text{gr}(M), \text{gr}(R))) \geq l + s + 1 .$$

Da $\text{gr}_\bullet \text{Ext}_R^{l+s}(M, R)$ nach Beh. 5 ein Subquotient von $\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+s}(\text{gr}(M), \text{gr}(R))$ ist, erhalten wir mit Lemma 10.13.i also $j_{\text{gr}(R)}(\text{gr} \text{Ext}_R^{l+s}(M, R)) \geq l + s + 1$ und damit

$$\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+s}(\text{gr}(\text{Ext}_R^{l+s}(M, R)), \text{gr}(R)) = 0 .$$

Aus dem gleichen Grunde ist $\text{gr}_\bullet \text{Ext}_R^{l+s}(\text{Ext}_R^{l+s}(M, R), R)$ ein Subquotient von $\text{Ext}_{\text{gr}(R)}^{l+s}(\text{gr}_\bullet \text{Ext}_R^{l+s}(M, R), \text{gr}(R))$. Es folgt

$$\text{gr}_\bullet \text{Ext}_R^{l+s}(\text{Ext}_R^{l+s}(M, R), R) = 0 .$$

Nun ist aber die Filtrierung auf $\text{Ext}_R^{l+s}(\text{Ext}_R^{l+s}(M, R), R)$ gut und damit ausschöpfend und separiert. Also erhalten wir schließlich

$$\text{Ext}_R^{l+s}(\text{Ext}_R^{l+s}(M, R), R) = 0 \quad \text{für alle } s \geq 1 .$$

Dies zeigt, daß M rein ist von der Stufe l . □

Literatur

- [Bas] Bass H.: *Algebraic K-Theory*. New York: Benjamin 1968
- [Bjö] Björk J.-E.: *Rings of Differential Operators*. Amsterdam: North-Holland 1979
- [BH] Bruns W., Herzog J.: *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge Univ. Press 1993
- [CE] Cartan H., Eilenberg S.: *Homological algebra*. Princeton Univ. Press 1956
- [Eis] Eisenbud D.: *Commutative Algebra*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1995
- [God] Godement R.: *Théorie des faisceaux*. Paris: Hermann 1964
- [McL] MacLane S.: *Homology*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1975