Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 1
E. Große-Klönne

Aufgabe 1:
Für $\varepsilon \leq 1$ ist $B_\varepsilon(a)$ Nebenklasse eines Ideals in 0 zum Nebenklassenvertreter a.

Aufgabe 2:
Führe aus, weshalb in den Beispielen (A), (B), (C) der Vorlesung tatsächlich nichtarchimedische Absolutbeträge auf $F = K$ (Fall (A)), auf $F = K(X)$ (Fall (B)) und auf $F = \mathbb{C}((T))$ (Fall (C)) definiert werden.
Bestimme jeweils $\mathcal{O}_F = \{a \in F| \quad |a| \leq 1\}, m_F = \{a \in F| \quad |a| < 1\}$ und $\mathcal{O}_{F/m_F}$.

Aufgabe 3:
Sei K ein nichtarchimedischer Körper. Zeige, daß $K^\times$ eine topologische Gruppe ist, und daß es zu $1 \in K^\times$ eine Basis offener Umgebungen gibt, welche zugleich Untergruppen von $K^\times$ sind.

Aufgabe 4:
$\mathbb{Q}_p$ enthält alle $(p-1)$-ten Einheitswurzeln.

Aufgabe 5:
Für den nichtarchimedischen Körper $(K, |\ .\ |)$ sei $|K^\times| = \{|a|_i\ a \in K^\times\}$ eine diskrete Teilmenge in $\mathbb{R}$. Fixiere für jedes $v \in |K^\times|$ ein $b_v \in K^\times$ mit $|b_v| = v$.
Fixiere ein System $A \subseteq 0$ von Repräsentanten für $0_{/m}$ mit $0 \in A$.
Zeige:

(a) Für jedes $x \in K^\times$ existiert eine eindeutige konvergente Reihendarstellung

$$\times = \sum_{v \in |K^\times| \cap]0,|x|]} a_v b_v \qquad \text{mit } a_v \in A.$$

(b) Ist $x' = \sum a_v' v_v$ eine andere solche konvergente Reihe, und $\lambda \in \mathbb{R}$, so

$$|x - x'| \leq \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad a_v' = a_v \text{ für alle } v > \lambda.$$

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 2
E. Große-Klönne

Aufgabe 6:
Bestimme alle Erweiterungskörper vom Grad 2 von $\mathbb{Q}_p$.
(Zumindest falls $p \geq 3$; der Fall $p = 2$ ist komplizierter.)

Aufgabe 7:
Sei $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Die beiden folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(i) $x \in \mathbb{Z}_p^\times$.

(ii) x^{p-1} besitzt n-te Wurzeln in $\mathbb{Q}_p$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8:

(i) Die Identität ist der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$.

(ii) Die Identität ist der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}_p$.

Aufgabe 9:
Der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}_p$ ist nicht vollständig.
(Tip: Betrachte die Reihe $\sum_n p^n p^{\frac{1}{n}}$ wobei n die Primzahlen durchläuft.)

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 3
E. Große-Klönne

Aufgabe 10:
Sei K ein endlicher Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}_p$, enthalten in $\mathbb{C}_p$, und sei $a \in \mathbb{C}_p$ algebraisch über K. Sei

$$r = \min\{|\sigma(a) - a| \ ; \ \sigma \in Gal(K(a)/K), \sigma(a) \neq a\} \ .$$

Zeige: Für jedes $b \in B_r^-(a) \subseteq \mathbb{C}_p$ gilt $K(a) \subseteq K(b)$.

Aufgabe 11:
Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ definiere die p-adische Quersumme $S_p(n)$ wie folgt: Schreibe

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots$$

mit $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ und setze $S_p(n) = \sum_i a_i$. Damit zeige

$$|n!|_p = p^{\frac{S_p(n)-n}{p-1}} \ .$$

Aufgabe 12:
Für die Potenzreihen

$$\begin{aligned} \log(1+X) &= \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k} \\ \exp(X) &= \sum_{k\geq 0} \frac{X^k}{k!} \end{aligned}$$

bestimme die jeweils maximale Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft:
Für jedes $x \in B_\varphi^-(0)$ konvergiert die durch Einsetzung $X \longmapsto x$ erhaltene Reihe in $\mathbb{C}_p$.

Aufgabe 13:
Sei $K = \mathbb{C}_p$. Zeige, daß die Potenzreihe $\log(T)$ aus Aufgabe 12 einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $B_1^-(1) \longrightarrow K$ definiert.

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 4
E. Große-Klönne

Aufgabe 14:
Sei K ein vollständiger nicht archimedischer Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}_p$. Sei $f \in \mathcal{A}_1$ und $r_p = |p|^{\frac{1}{(p-1)}}$. Dann gilt

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |h| \cdot \|f'\|_1$$

für alle $t, h \in K$ mit $|t| \leq 1$ und $|h| \leq r_p$.

Aufgabe 15:
Die Restriktion $\log : B^-_{r_p}(1) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ der in Aufgabe 13 betrachteten Funktion $\log : B^-_1(1) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ ist eine Isometrie (insbesondere injektiv). Bestimme den Kern von $B^-_1(1) \longrightarrow \mathbb{C}_p$.

Aufgabe 16:
Für eine Potenzreihe $f = \sum\limits_{n \geq 0} a_n X^n$ sei der Konvergenzradius definiert als

$$r_f = \sup\{r \geq 0;\ |a_n| r^n \longrightarrow 0\} .$$

Zeige:

$$r_f = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}} .$$

Zeige außerdem $r_f = r_g$ mit $g = \left(\frac{\partial}{\partial X}\right) f$.

Aufgabe 17:
Für $f \in K[[X]]$ gelte $r_f = \infty$. Sei $|K^\times|$ dicht in $\mathbb{R}_{>0}$. Ist dann $|f|$ auf K beschränkt, so ist f konstant. Allgemeiner: Falls $|f(x)| \leq c|X|^N$ für ein $c > 0$, $N \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in K$ mit $|x| \geq c$, so ist f ein Polynom vom Grade höchstens N.

Aufgabe 18:
Seien E und F normierte K-Vektorräume. Zeige, daß $\mathcal{L}(E,F)$ bezüglich der Operatornorm ein vollständiger K-Vektorraum ist, der außerdem vollständig ist, wenn F es ist. Sei $\ell^\infty(\mathbb{N},F)$ der Vektorraum der beschränkten Folgen $a=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in F, versehen mit der Norm $\|a\| = \sup_i \|a_i\|$. Konstruiere einen kanonischen isometrischen Isomorphismus

$$\mathcal{L}(C_0(\mathbb{N}),F) \simeq \ell^\infty(\mathbb{N},F) \ .$$

Aufgabe 19:
Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, dazu $f \in \mathcal{A}_1$ (mit Koeffizienten in K). Es gelte $\|f\|_1 \leq 1$, $\|f'\|_1 < 1$ und

$$\inf_{x\in B_1(0)} |f(x)-x| \leq r_p = |p|^{\frac{1}{p-1}} \ .$$

Dann hat f einen Fixpunkt in $B_1(0)$.
Tip: Aufgabe 14.

Aufgabe 20:
Betrachte

$$\begin{aligned} f: &\quad B_1(0)_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathbb{Q}_p, x \longmapsto x^p - x \\ g: &\quad B_{|p|}(0)_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathbb{Q}_p, x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ . \end{aligned}$$

Überlege $f(B_1(0)_{\mathbb{Q}_p}) \subseteq B_{|p|}(0)_{\mathbb{Q}_p}$, aber $g\circ f : B_1(0)_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ ist nicht in eine Potenzreihe entwickelbar.
Tip: Überlege $g(x) = (1-x)^{-1}$. Untersuche die Fortsetzbarkeit von

$$h(x) = (1-(x^p - x))\ g\circ f(x) - 1$$

nach $B_1(0)_{\mathbb{C}_p}$.

Aufgabe 21:
Sei $W = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x| \geq 1\}$. Auf

$$R_b(W) = \{f = \frac{g}{h} \mid g,h \in \mathbb{C}_p[X], h \text{ ohne Nullstelle in } W,\ f \text{ beschränkt auf } W\}$$

definiere die Norm $\|f\| = \sup_{x\in W} |f(x)|$. Sei $H_b(W)$ die Komplettierung. Andererseits sei

$$\mathcal{A}(W) = \{f\left(\frac{1}{X}\right) \mid f(X) \in \mathcal{A}_1\} \ .$$

Zeige $\mathcal{A}(W) = H_b(W)$.

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 6
E. Große-Klönne

Aufgabe 22:
Die Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto n!$, läßt sich nicht zu einer stetigen Funktion $\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ fortsetzen.

Aufgabe 23:
Die Primzahl p sei ungerade.

(a) Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $\nu \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$\prod_{\substack{a \leq j < a+p^\nu \\ p \nmid j}} j \equiv -1 \pmod{p^\nu} .$$

(Für $\nu = 1$ ist dies der Satz von Wilson!)

(b) Die Abbildung $\mathbb{N}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{Z}$,

$$n \longmapsto (-1)^n \prod_{\substack{1 \leq j < n \\ p \nmid j}} j$$

läßt sich zu einer stetigen Funktion $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ fortsetzen.

Aufgabe 24:
Zeige: Es gibt genau eine Fortsetzung $|.|_{K(X)} : K(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ des auf K definierten Absolutbetrags $|.|_K$, welche folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) genügt. Es bezeichne $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ den Restklassenkörper von K, und $k' = \mathcal{O}_{K(X)}/\mathfrak{m}_{K(X)}$ den Restklassenkörper von $K(X)$ (bezüglich $|.|_{K(X)}$). Dann

(1) $|X|_{K(X)} = 1$

(2) $|.|_{K(X)}|_K = |.|_K$

(3) Das Bild $t \in k'$ von X (beachte (1)) ist transzendent über k.

Zeige zusätzlich $|K(X)^\times| = |K^\times|$ und $k' = k(t)$.

Aufgabe 25:
Für $V = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(B_1(0))$, für $V = \bigcup_{r>1} \mathcal{A}(B_r(0))$, für $V = \mathcal{A}(B_1^-(0))$ und $V = \bigcap_{r>0} \mathcal{A}(B_r(0))$ entscheide, ob

$$V \longrightarrow V, f(X) \longmapsto \frac{\partial}{\partial X} f$$

endlichen Index hat, und bestimme diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 26:

a) Sei $|.|$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf K. Zeige: Es gibt zu jedem $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\beta^j \notin |K|$ für alle $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ genau einen nicht-archimedischen Absolutbetrag $|.|_{K(X)}$ auf $K(X)$, der der Formel
$$|\sum a_j X^j|_{K(X)} = \sup_j\{|a_j|\beta^j\}$$
für $\sum a_j X^j \in K[X]$ genügt.

b) Zeige, daß der in (a) definierte Absolutbetrag $|.|_{K(X)}$ der einzige ist, der $|.|$ fortsetzt, und $|X|_{K(X)} = \beta$ erfüllt. Zeige, daß die zugehörige Erweiterung der Restklassenkörper trivial ist.

Aufgabe 27:
Zeige: In $\mathbb{C}_p$ existieren absteigende Folgen $B_1 \supset B_2 \supset B_2 \supset \ldots$ abgeschlossener Bälle, deren Durchschnitt $\bigcap\limits_{n\geq 1} B_n$ leer ist!
Hinweis: Wähle eine streng monoton fallende Folge $r_1 > r_2 > \ldots$ in $p^{\mathbb{Q}} = |\mathbb{C}_q^\times|$ mit $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} r_n > 0$. Betrachte absteigende Folgen $(B_i)_{i\geq 1}$ wie oben mit Radius $(B_i) = r_i$. Benutze, daß es in $\mathbb{C}_p$ nur abzählbar viele Bälle gibt (weshalb?).

Aufgabe 28:
Der eindimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^1(K)$ über K ist
$$\mathbb{P}^1(K) = \{(x,y) \in K^2\backslash\{(0,0)\}\}/\sim$$
mit $[(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)] \Longleftrightarrow [x_2 = cx_1, y_2 = cy_1$ für ein $c \in K^\times]$.
Fasse K vermöge $x \longmapsto (x,1)$ als in $\mathbb{P}^1(K)$ enthalten auf. Ein *Ball in* $\mathbb{P}^1(K)$ ist ein Ball $B \subseteq K$ oder das Komplement in $\mathbb{P}^1(K)$ eines Balles $B \subseteq K$.

- Rechtfertige diese Bezeichnung
- Beschreibe die allgemeine Form eines Durchschnitts zweier Bälle in $\mathbb{P}^1(K)$.
- Die Gruppe $GL(2,K)$ operiert in offensichtlicher Weise auf $\mathbb{P}^1(K)$. Zeige, daß für jedes $g \in GL(2,K)$ und jeden Ball B in $\mathbb{P}^1(K)$ auch gB ein Ball in $\mathbb{P}^1(K)$ ist. (Hinweis: Es ist bequem, g geeignet zu zerlegen und jeden Faktor getrennt zu behandeln.)

Aufgabe 29:
Für jede Nullstelle $\pi \in \mathbb{C}_p$ des Polynoms $p + X^{p-1}$ existiert eine eindeutige p-te Einheitswurzel $\zeta_\pi \in \mathbb{C}_p$ mit
$$|\zeta_\pi - 1 - \pi| < |\pi| \ .$$
Ist ζ eine p-te Einheitswurzel, so $|\zeta - 1| = |\pi| = |p|^{\frac{1}{(p-1)}}$ und für die Zahl $\alpha = \overline{\pi^{-1}(\zeta - 1)} \in \mathbb{F}_p$ gilt $\zeta = \zeta_\pi^\alpha$.

Hinweis: $\pi^{-1}(\zeta - 1)$ ist Nullstelle von $P(X) = \frac{(1+\pi X)^p - 1}{p\pi X}$. Dies ist ein Polynom ....

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 8
E. Große-Klönne

Aufgabe 30:
Seien $n \in \mathbb{N}, \lambda \in K^\times$. Zu $a_1, \dots, a_n \in K$ betrachte den Differentialoperator

$$L_{(a_1,\dots,a_n)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{Xd}{dX} - a_i \right) + \lambda X \ .$$

Sei $B \subseteq K \backslash \{0\}$ ein Ball, dazu

$$K_{(a_1,\dots,a_n)} = Ker(\mathcal{A}(B) \xrightarrow{L_{(a_1,\dots,a_n)}} \mathcal{A}(B)) \ .$$

Zu $b_1, \dots, b_n \in K$ mit $a_i - b_i \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i \leq n$ konstruiere einen Isomorphismus $K_{(a_1,\dots,a_n)} \simeq K_{(b_1,\dots,b_n)}$.

Aufgabe 31:
Sei $K \subseteq \mathbb{C}_p$ vollständig. Zeige, daß die folgende Menge einen Ring bildet:

$$\mathcal{A}_{\log} := \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i X^i \mid a_i \in K, \lim_{i \longrightarrow \infty} \inf \frac{ord_p a_i}{\log_p i} = \infty \right\} \ .$$

Zeige $\mathcal{A}(B_r(0)) \subseteq \mathcal{A}_{\log} \subseteq \mathcal{A}(B_1(0))$ für $r > 1$, und $\frac{d}{dX}\mathcal{A}_{\log} \subseteq \mathcal{A}_{\log}$. Bestimme den Index von $\frac{d}{dX} : \mathcal{A}_{\log} \longrightarrow \mathcal{A}_{\log}$.

Aufgabe 32:
Sei K algebraisch abgeschlossen. Sei $B^- = B_1^-(0)$. Für $f \in \mathcal{A}(B^-)\backslash\{0\}$ sei $(f) : B^- \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ der Nullstellendivisor (der jedem Punkt $P \in B^-$ die Nullstellenvielfachheit von f in P zuordnet; die Abbildung (f) hat also endlichen Träger).
Zeige: Für $f, g \in \mathcal{A}(B^-)\backslash\{0\}$ gilt

$$f \text{ teilt } g \Longleftrightarrow (f) \leq (g) \ .$$

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 9
E. Große-Klönne

Aufgabe 34:
K sei p-adisch. In den Notationen aus der Vorlesung gelte $P(0) \neq 0$. Sei (L, y) ein generischer Punkt von $B_1(0)$. Zeige

$$\varepsilon(D, y) \geq \frac{|p|^{\frac{1}{p-1}}}{\max(1,\ |R_1|_0(1))} \ .$$

Aufgabe 35:
K sei p-adisch. Es gelte $P(0) \neq 0$ und $|R_1|_0(1) \leq 1$.
Zeige $|n!R_n|_0(1) \leq 1$ für alle $n \geq 1$. Folglich erhalte durch Reduktion der Koeffizienten von $n!R_n$ eine rationale Funktion $g_n \in k(X)$ über dem Restklassenkörper k von K. Insbesondere erhalten wir den Operator

$$\overline{D} : k(X) \longrightarrow k(X),\ h \longmapsto \left(\frac{d}{dX}\ h\right) - g_1 h \ .$$

Zeige, daß die p-fache Iteration $\overline{D}^p$ eine $k(X)$-lineare Abbildung ist. Zeige $g_{np} = (g_p)^n$ für alle $n \geq 1$.
y **Aufgabe 36:**
K sei p-adisch. Sei (L, y) ein generischer Punkt von $B_1(0)$. Es gelte $P(0) \neq 0$ und $|R_1|_0(1) \leq 1$, also $\varepsilon(D, y) \geq |p|^{\frac{1}{p-1}}$ gemäß Aufgabe 34. Zeige

$$\varepsilon(D, y) > |p|^{\frac{1}{p-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{D}^p = 0 \ .$$

Hinweis für $'' \Longleftarrow''$: Durch Induktion nach $m \in \mathbb{N}$ zeige $ord_p\left((pm)!R_{pm}\right) \geq m\ ord_p\left(p!R_p\right)$.

Aufgabe 37:

a) Seien $a \in K, r > 0$, dazu $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B_r^-(a))$. Sei $u \in \mathcal{A}$ invertierbar und $R \in K(X)$ habe keinen Pol in $B_r^-(a)$. Setze $D = \frac{d}{dX} - R$ und $\tilde{D} = \frac{d}{dX} - \big(R + u^{-1}\left(\frac{d}{dX}u\right)\big)$. Zeige $\mathrm{ind}(D|\mathcal{A}) = \mathrm{ind}(\tilde{D}|\mathcal{A})$.

b) Sei $H \in K(X)$ ohne Pol in $B_1^-(0)$ und es gelte $|H|_0(1) = 1$; insbesondere erhalten wir durch Koeffizientenreduktion ein Element $\overline{H} \in k(X)$. Sei $\pi \in K$ Nullstelle von $X^{p-1} + p$ und $R = \pi \frac{d}{dX} H \in K(X)$, dazu $D = \frac{d}{dX} - R$. Zeige, daß $\mathrm{ind}(D|\mathcal{A}(B_1^-(0)))$ nur von $\overline{H}$ abhängt.

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 10
E. Große-Klönne

Aufgabe 38:
Sei $(R^{(K)})_{K\geq 1}$ eine Folge rationaler Funktionen ohne Polstellen in $B_1^-(0)$, die auf $B_1^-(0)$ gleichmäßig gegen $R \in \mathcal{A}(B_1^-(0))$ konvergiert. Für jedes $K \geq 1$ existiere eine Funktion $u^{(K)} \in \mathcal{A}(B_1^-(0))$ mit $\frac{d}{dX}\ u^{(K)} = R^{(K)}u^{(K)}$ und $u^{(K)}(0) = 1$. Zeige: $(u^{(K)})_{K\geq 1}$ konvergiert gegen eine Funktion $u \in \mathcal{A}(B_1^-(0))$ mit $\frac{d}{dX}\ u = Ru$. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $D_r(0)$ für jedes $0 < r < 1$.

Aufgabe 39:
K sei p-adisch. Für $\alpha \in K$ und $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ setze

$$\binom{\alpha}{s} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-s+1)}{s!}$$

$$(1+X)^\alpha := \sum_{s=0}^{\infty} \binom{\alpha}{s} X^s .$$

Mittels Aufgabe 38 zeige, daß $(1+X)^\alpha$ auf $B_1^-(0)$ konvergiert und durch 1 beschränkt ist, falls $\alpha \in \mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 40:

(a) $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ sind K-linear unabhängig genau dann, wenn

$$\det\left(\left(\left(\frac{d}{dX}\right)^{i-1} u_j\right)_{1\leq i,j\leq n}\right) \neq 0 .$$

Hinweis: Beweise die schwierige Implikation durch Induktion nach n.

(b) Sei $D = \sum_{i=0}^{n} g_i \left(\frac{d}{dX}\right)^i \in End_K(\mathcal{A})$ mit $g_i \in \mathcal{A}$ und $g_n \neq 0$ (vgl. Aufgabe 33).
Zeige $\dim_K(Ker(D)) \leq n$.

Aufgabe 41:
Sei $f(X) \in 1 + X\mathbb{Q}_p[[X]]$ eine formale Potenzreihe. Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) Die Koeffizienten von f liegen in $\mathbb{Z}_p$.

(ii) $f(X)^p/f(X^p) \in 1 + pX\mathbb{Z}_p[[X]]$.

Hinweis zu (ii) $\Longrightarrow$ (i): Schreibe $f(X)^p = f(X^p)g(X)$, dann Koeffizientenvergleich.

Übungsaufgaben zur Vorlesung p-adische Differentialgleichungen SS 04
P. Schneider Blatt 11
E. Große-Klönne

Aufgabe 42:
Sei K p-adisch. Das Polynom P besitze keine Nullstelle in $B^-(\widehat{\overline{K}})$, es gelte $\rho_a(D,r) = r$. Zeige, daß $D|\mathcal{A}(B^-)$ ein Fredholmoperator mit Index 1 ist.

Aufgabe 43:
Sei K p-adisch. Betrachte folgende Teilmenge von $K[[X^{-1}]]$:

$$\mathcal{A}^\dagger(B_1(\infty)) := \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i X^{-i} \mid \text{es existiert ein } \delta > 1 \text{ mit } |a_i|\delta^i \xrightarrow{i \to \infty} 0 \right\} .$$

(a) Überlege, daß $\mathcal{A}^\dagger(B_1(\infty))$ ein Ring ist. Wie lassen sich seine Elemente interpretieren?

(b) Zu $\alpha \in K$ setze $\lambda_+(\alpha) := \varliminf_{n \to \infty} |\alpha + n|^{\frac{1}{n}}$. Zeige: Der Differentialoperator $D_{X,\alpha}$ hat endlichen Index auf $\mathcal{A}^\dagger(B_1(\infty))$ genau dann, wenn $\lambda_+(\alpha) = 1$.

Aufgabe 44:
Zeige, daß es zu jeder Zahl $0 \leq r < 1$ ein $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ mit $\lambda(\alpha) = r$ gibt. (Oder zeige dies wenigstens für $r = 0$.)

Aufgabe 45:

(a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$ und gelte $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$.

(b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p$ und gelte $p\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ und $|p\alpha| < 1$. Dann gilt $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)^p$.