Übungsblatt 9 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 17.06./18.06.

Aufgabe 1. Berechnen Sie alle cap-Produkte $H^p(T^n;\mathbb{Z}) \otimes H_p(T^n;\mathbb{Z}) \to H_{q-p}(T^n;\mathbb{Z})$, wo T^n der n-Torus ist.

Aufgabe 2. Wir erinnern uns: Für eine topologische Gruppe[1] G ist der Pontryagin-Ring mit Koeffizienten R gegeben durch die Homologie $H_*(G;R)$ mit Multiplikationsabbildung

$$H_*(G;R) \otimes H_*(G;R) \xrightarrow{\times} H_*(G \times G;R) \xrightarrow{\mu_*} H_*(G;R).$$

(a) Zeigen Sie: Für topologische Gruppen G, G' ist das Kreuzprodukt

$$H_*(G;R) \otimes H_*(G';R) \to H_*(G \times G';R)$$

ein Ringhomomorphismus.

(b) Berechnen Sie den Pontryagin-Ring des n-Torus $H_*(T^n;\mathbb{Z})$.

Aufgabe 3. Wie sagen, ein Element $x \in H_n(X)$ liegt im Bild des Hurewicz-Homomorphismus[2], wenn es eine Abbildung $f : S^n \to X$ gibt, sodass $f_*([S^n]) = x$. Hierbei ist $[S^n] \in H_n(S^n)$ unser bevorzugter Erzeuger.
Zeigen Sie: Wenn $x \in H_n(X)$ im Bild des Hurewicz-Homomorphismus liegt, dann ist $\alpha \cap x = 0$ für alle $\alpha \in H^m(X)$, $m \neq n$.

Aufgabe 4. Wir erinnern uns: $\mathbb{R}P^3$ ist homöomorph zu $SO(3)$, der Gruppe der reellen orthogonalen 3×3-Matrizen mit Determinante 1. Insbesondere existiert auf $\mathbb{R}P^3$ eine H-Raum-Struktur.

(a) Nutzen Sie die H-Raum-Struktur auf $\mathbb{R}P^3$ um den Kohomologiering $H^*(\mathbb{R}P^3;\mathbb{F}_2)$ zu berechnen.

(b) Berechnen Sie alle cap-Produkte $H^p(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}) \otimes H_q(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}) \to H_{q-p}(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z})$. (Tipp: vergleichen Sie mit $\mathbb{F}_2$-Koeffizienten.)

[1] allgemeiner: homotopie-assoziativer H-Raum.
[2] Der Hurewicz-Homomorphismus ist eine entsprechend definierte Abbildung $\pi_n(X) \to H_n(X)$.