Übungsblatt 8 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 03.06./04.06.

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Kohomologiering von $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ mit $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.

Aufgabe 2. Der Bocksteinhomomorphismus $\beta : H^*(X; \mathbb{Z}/p) \to H^{*+1}(X; \mathbb{Z}/p)$ war definiert als der Verbindungshomomorphismus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to C^*(X; \mathbb{Z}/p) \to C^*(X; \mathbb{Z}/p^2) \to C^*(X; \mathbb{Z}/p) \to 0$$

von Kokettenkomplexen. Zeigen Sie: β ist eine Derivation, also

$$\beta(x \cup y) = \beta(x) \cup y + (-1)^{|x|} x \cup \beta(y).$$

Aufgabe 3. Für $k \geq 1$ sei X ein CW-Komplex von endlichem Typ mit Kohomologiering

$$H^*(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/x^{k+1}$$

mit $x \in H^2(X; \mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass X kein H-Raum sein kann.[1]

Aufgabe 4. Für $k \geq 1$ sei X ein CW-Komplex von endlichem Typ mit $\mathbb{F}_2$-Kohomologiering

$$H^*(X; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x]/x^{k+1}$$

mit $x \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$. Zeigen Sie: Wenn X eine H-Raum-Struktur hat, so ist $k+1$ eine Potenz von 2. (Tipp: Gehen Sie ähnlich wie in Aufgabe 3 vor, und schreiben Sie dann $k + 1 = 2^d u$ mit ungeradem u.)[2]

---

[1] Wir werden später sehen, dass $\mathbb{C}P^k$ tatsächlich diesen Kohomologiering hat. Das impliziert den Fundamentalsatz der Algebra: Wäre P ein irreduzibles Polynom von Grad $d \geq 2$ über $\mathbb{C}$, so wäre $K = \mathbb{C}[x]/P(x)$ eine Körpererweiterung von Grad d, und dann würden wir auf $(K \setminus 0)/\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{C}P^{d-1}$ eine H-Raum-Struktur erhalten.

[2] Wir werden später sehen, dass $\mathbb{R}P^k$ tatsächlich diesen $\mathbb{F}_2$-Kohomologiering hat. Ähnlich wie für $\mathbb{C}P^k$ folgt hiermit zumindest dass Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ Dimension eine Zweierpotenz haben müssen. Beispiele sind $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$.