Übungsblatt 6 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 20.05./21.05.

Aufgabe 1. Entscheiden Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften durch Angabe eines Beispiels oder eines Gegenbeweises, ob es einen CW-Komplex X vom endlichen Typ gibt, der sie erfüllt:

(a) $H^1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$.

(b) $H^1(X;\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/4$.

(c) $H_1(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$ und $H^2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$.

(d) $H_2(X;\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ und $H_2(X;\mathbb{Q}) = 0$.

(e) $H_2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ und $H_2(X;\mathbb{Q}) = 0$.

(f) **Bonusaufgabe:** $H^n(X;\mathbb{Z}) = 0$ für alle $n \geq 1$ und $H_1(X;\mathbb{Z}) \neq 0$. (Tipp: Bocksteinsequenzen!)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $S^4 \to S^2 \times S^2$ auf $H_4(-;\mathbb{Z})$ die Nullabbildung induziert. (Tipp: fassen Sie zunächst $S^4 \to S^2 \times S^2$ als Paar zweier Abbildungen $S^4 \to S^2$ auf.)

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass das Homologie-Kreuzprodukt assoziativ ist, in dem Sinn dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_*(X) \otimes H_*(Y) \otimes H_*(Z) \arrow[r, "\times\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\times"] & H_*(X \times Y) \otimes H_*(Z) \arrow[d, "\times"] \\ H_*(X) \otimes H_*(Y \times Z) \arrow[r, "\times"] & H_*(X \times Y \times Z) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie hierzu zunächst (ähnlich zur Konstruktion von $\times, \theta$ und den entsprechenden Kettenhomotopien in der Vorlesung) dass zwei natürliche Kettenabbildungen $C_*(X) \otimes C_*(Y) \otimes C_*(Z) \to C_*(X \times Y \times Z)$, für die die induzierten Abbildungen $H_0(X) \otimes H_0(Y) \otimes H_0(Z) \to H_0(X \times Y \times Z)$ übereinstimmen, schon kettenhomotop sind.

(b) Sei G eine topologische Gruppe (also eine Gruppe mit einer Topologie für die die Multiplikationsabbildung $\mu : G \times G \to G$ und Inversionsabbildung $G \to G$ stetig sind). Zeigen Sie, dass die Komposition

$$H_*(G) \otimes H_*(G) \xrightarrow{\times} H_*(G \times G) \xrightarrow{\mu_*} H_*(G)$$

$H_*(G)$ die Struktur eines (nicht notwendigerweise kommutativen) Rings gibt. Hierbei handelt es sich um das sogenannte *Pontryagin-Produkt.*

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Für zwei levelweise freie Kettenkomplexe C_*, D_* über einem Hauptidealring R folgt aus

$$H_*(C_* \otimes D_*) = 0$$

immer $H_*(C_*) = 0$ oder $H_*(D_*) = 0$.