Übungsblatt 5 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 13.05./14.05.

Aufgabe 1. Sei P_i ein sequentielles Diagramm projektiver Moduln über einem Hauptidealring R, und M der Kolimes $\varinjlim P_i$. Zeigen Sie, dass dann für jeden R-Modul N gilt, dass

$$\mathrm{Ext}^1_R(M, N) \cong \varprojlim{}^1 \mathrm{Hom}_R(P_i, N).$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie $\varprojlim^1$ des folgenden invers sequentiellen Diagramms:

$$\ldots \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}.$$

Benutzen Sie dann Aufgabe 1 um $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Z})$ zu berechnen.[1]

(Tipp: Finden Sie zunächst eine geeignete exakte Sequenz $0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0$ von Diagrammen, wo A_i das gegebene Diagramm ist und B_i und C_i jeweils die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllen.)

Aufgabe 3. In dieser und der nächsten Aufgabe lernen wir, warum Ext^i_R "Ext" heißt. Sei R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Wir definieren $\mathrm{Ext}(M, N)$ als die Menge der Isomorphieklassen von Erweiterungen (engl. "extensions") von M entlang N: Eine solche Erweiterung ist gegeben durch eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to N \to E \to M \to 0,$$

und ein Isomorphismus von Erweiterungen ist gegeben durch einen Isomorphismus zwischen exakten Sequenzen, der auf M und N jeweils die Identität ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ext}(M, N)$ auf die folgende Art funktoriell ist: Gegeben einen Homomorphismus $f : M' \to M$, so erhalten wir durch Pullback eine wohldefinierte Abbildung $f^* : \mathrm{Ext}(M, N) \to \mathrm{Ext}(M', N)$. Gegeben einen Homomorphismus $g : N \to N'$, so erhalten wir durch Pushout eine wohldefinierte Abbildung $g_* : \mathrm{Ext}(M, N) \to \mathrm{Ext}(M, N')$. Ferner kommutieren diese induzierten Abbildungen im folgenden Sinn:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}(M, N) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Ext}(M', N) \\ \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ \mathrm{Ext}(M, N') & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Ext}(M', N') \end{array}$$

[1] Mit denselben Methoden kann eine ähnliche, etwas kompliziertere Beschreibung von $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ erhalten werden.

(b) Auf $\mathrm{Ext}(M,N)$ betrachten wir nun die folgende Komposition:

$$\mathrm{Ext}(M,N) \times \mathrm{Ext}(M,N) \xrightarrow{\oplus} \mathrm{Ext}(M \oplus M, N \oplus N) \xrightarrow{\Delta^*} \mathrm{Ext}(M, N \oplus N) \xrightarrow{\Delta_*} \mathrm{Ext}(M,N).$$

Hierbei bildet die erste Abbildung zu Erweiterungen E und E' von M entlang N die direkte Summe $E \oplus E'$, aufgefasst als Erweiterung von $M \oplus M$ entlang $N \oplus N$.

Zeigen Sie, dass diese Komposition $\mathrm{Ext}(M,N)$ die Struktur eines kommutativen Monoids gibt.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass der Monoid von Erweiterungen $\mathrm{Ext}(M,N)$, der in der vorherigen Aufgabe definiert wurde, tatsächlich mit $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ übereinstimmt. Wir fixieren dazu eine projektive Auflösung

$$\ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

(a) Für eine Erweiterung $0 \to N \to E \to M \to 0$, zeigen Sie dass es Abbildungen τ_0 und τ_1 gibt, die das folgende Diagramm kommutieren lassen:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\tau_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(b) Zeigen Sie, dass die dadurch definierte Abbildung $\mathrm{Ext}(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ wohldefiniert ist, also dass $\tau_1 : P_1 \to N$ ein Kozykel im Kokettenkomplex $\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N)$ ist, und verschiedene Wahlen von τ_0, τ_1 in (a) kohomologe Kozykel produzieren.

(c) In die andere Richtung formen wir für eine Abbildung $\tau_1 : P_1 \to N$ den Pushout

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[d] \\
N \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass wir hierfür eine kurze exakte Sequenz $N \to E' \to M \to 0$ erhalten.

(d) Zeigen Sie, dass die dadurch definierte Umkehrabbildung $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \to \mathrm{Ext}(M,N)$ wohldefiniert ist, also dass die Abbildung $N \to E'$ injektiv ist wenn $\tau_1 : P_1 \to N$ ein Kozykel ist, und dass die somit erhaltene Erweiterung $0 \to N \to E' \to M \to 0$ bis auf Isomorphie nur von der Kohomologieklasse $[\tau_1]$ abhängt.