Übungsblatt 4 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 06.04./07.04.

Aufgabe 1. Sei M eine abelsche Gruppe. Berechnen Sie $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ mithilfe der langen exakten Sequenz assoziiert zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Aufgabe 2. Sei TorsAb die Kategorie der abelschen Torsionsgruppen, d.h. abelsche Gruppen M in denen jedes Element endliche Ordnung hat. Finden Sie einen natürlichen Isomorphismus zwischen den beiden Funktoren $\mathrm{TorsAb} \to \mathrm{Ab}$,

$$M \mapsto \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$$
$$M \mapsto \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(Tipp: Gehen Sie ähnlich wie in Aufgabe 1 vor.)

Aufgabe 3. Sei C_* ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen, der levelweise frei ist, und A eine abelsche Gruppe. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass es dann eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$0 \to H_n(C) \otimes A \to H_n(C \otimes A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C), A) \to 0$$

gibt, die für jedes C spaltet. Zeigen Sie für passendes A, dass die entsprechende Retraktion $H_n(C \otimes A) \to H_n(C) \otimes A$ nicht natürlich in C gewählt werden kann.

Aufgabe 4. Sei X ein CW-Komplex von endlichem Typ (d.h. für jedes n besitzt X nur endlich viele Zellen der Dimension n). Zeigen Sie dann die Existenz kurzer exakter Sequenzen

$$0 \to H^n(X; \mathbb{Z}) \otimes A \to H^n(X; A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^{n+1}(X; \mathbb{Z}), A) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H^{n+1}(X; \mathbb{Z}), A) \to H^n(X; A) \to \mathrm{Hom}(H^n(X; \mathbb{Z}), A) \to 0.$$