# Übungsblatt 3 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 29.04./30.04.

**Aufgabe 1.** Betrachten Sie auf Paaren von endlichen abelschen Gruppen die beiden Funktoren $\mathrm{FinAb} \times \mathrm{FinAb} \to \mathrm{FinAb}$,

$$(M, N) \mapsto M \otimes_{\mathbb{Z}} N$$
$$(M, N) \mapsto \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, N).$$

Zeigen Sie, dass diese Funktoren punktweise isomorph sind, also für jedes $(M, N)$ die Gruppen $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ und $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, N)$ isomorph sind, aber es keinen natürlichen Isomorphismus geben kann.

**Aufgabe 2.** Sei $I$ eine kleine Kategorie und sei

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Funktoren $I \to \mathrm{Ab}$, also eine Sequenz von Funktoren und natürlichen Transformationen, sodass

$$0 \to F(i) \to G(i) \to H(i) \to 0$$

für jedes $i \in I$ exakt ist.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch

$$\mathrm{colim}_I F \to \mathrm{colim}_I G \to \mathrm{colim}_I H \to 0$$

exakt ist. (Tipp: Universelle Eigenschaften)

(b) Finden Sie ein Beispiel, in dem $\mathrm{colim}_I F \to \mathrm{colim}_I G$ nicht injektiv ist, also

$$0 \to \mathrm{colim}_I F \to \mathrm{colim}_I G \to \mathrm{colim}_I H \to 0$$

nicht exakt ist.

(c) Sei nun $I = \mathbb{N}$, was wir als Kategorie auffassen, deren Objekte durch die Elemente $x \in \mathbb{N}$ gegeben sind, und wo Morphismen gegeben sind durch

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{N}}(x, y) = \begin{cases} \{*\} & \text{wenn} \quad x \leq y \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann

$$0 \to \mathrm{colim}_I F \to \mathrm{colim}_I G \to \mathrm{colim}_I H \to 0$$

exakt ist. (Tipp: Erinnern Sie sich, dass für Kolimiten von Funktoren $\mathbb{N} \to \mathrm{Ab}$ die unterliegende Menge von $\mathrm{colim}_I F$ gegeben ist durch $\coprod_{i \in I} F(i)/\sim$ mit einer passenden Äquivalenzrelation $\sim$.)

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie: Für jede exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

abelscher Gruppen ist

$$0 \to A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to 0 \tag{1}$$

exakt. (Tipp: Nutzen Sie Aufgabe 2(c). Überlegen Sie sich zunächst, wie sich $\mathbb{Q}$ als sequentieller[1] Kolimit von Kopien von $\mathbb{Z}$ schreiben lässt.)
Berechnen Sie nun $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q})$ für $M \in \mathrm{Ab}$.

**Aufgabe 4.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Seien $f, g : X \to Y$ zwei stetige Abbildungen, die dieselbe Abbildung auf Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten induzieren:

$$f_* = g_* : H_*(X; \mathbb{Z}) \to H_*(Y; \mathbb{Z}).$$

Dann gilt auch

$$f_* = g_* : H_*(X; A) \to H_*(Y; A)$$

für alle abelschen Gruppen $A$.

---

[1] also über $\mathbb{N}$ indizierter