Übungsblatt 2 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 22.04./23.04.

Aufgabe 1. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen, und sei R eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die folgenden Sequenzen exakt sind:

$$A \otimes R \to B \otimes R \to C \otimes R \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(C, R) \to \mathrm{Hom}(B, R) \to \mathrm{Hom}(A, R).$$

Finden Sie außerdem jeweils ein Beispiel in denen die Sequenzen

$$0 \to A \otimes R \to B \otimes R \to C \otimes R \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(C, R) \to \mathrm{Hom}(B, R) \to \mathrm{Hom}(A, R) \to 0.$$

nicht exakt sind.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$. Berechnen Sie die Kohomologiegruppen $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$ und $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{F}_2)$, sowie die jeweils von der Quotientenabbildung

$$q : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \cong S^n$$

induzierte Abbildung.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Kohomologiegruppen der orientierten Flächen Σ_g sowie der unorientieren Flächen Σ_g^- mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 4. Sei X zusammenhängend. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $H^1(X; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z})$ gibt.
(Tipp: Benutzen Sie Korollar 2.3.2 aus der Vorlesung, und überlegen Sie sich dann explizit dass ein Kozykel im Kern der Abbildung auch im Bild von $\delta : C^0(X; \mathbb{Z}) \to C^1(X; \mathbb{Z})$ liegt.)