Übungsblatt 11 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 01.07./02.07.

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Kohomologiering $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$ für alle n.

Aufgabe 2. Sei M eine zusammenhängende, kompakte, orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:
Falls $d \cdot [M] \in H_n(M)$ im Bild des Hurewicz-Homomorphismus[1] liegt, so sind alle Elemente von $H_i(M)$ für $0 < i < n$ d-Torsion.

Aufgabe 3. Zeigen Sie (jeweils $n \geq 1$):

(a) Wenn M eine $2n-1$-dimensionale kompakte (nicht notwendigerweise orientierbare) Mannigfaltigkeit ist, so ist $\chi(M) = 0$.

(b) Wenn M eine $4n$-dimensionale kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit ist, so ist $\chi(M) = \sigma(M) \bmod 2$.

(c) Wenn M eine $4n-2$-dimensionale kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit ist, so ist $\chi(M) = 0 \bmod 2$.

Aufgabe 4. Seien M und N zusammenhängende, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension $4m$ und $4n$. Zeigen Sie $\sigma(M \times N) = \sigma(M) \cdot \sigma(N)$.
Tipp: Benutzen Sie das Künneth-Theorem und zerlegen Sie $H^{2m+2n}(M \times N; \mathbb{R})$ in geeignete Summanden.

[1] vgl. Blatt 9, Aufgabe 3.