Übungsblatt 10 (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 24.06./25.06.

Aufgabe 1. Sei M eine Mannigfaltigkeit, und $\widetilde{M}$ die Orientierungsüberlagerung.

Zeigen Sie: Die Orientierungsüberlagerung M kann mit einer kanonischen Orientierung ausgestattet werden. Bezüglich dieser Orientierung ist die Decktransformation $\widetilde{M} \to \widetilde{M}$, die in jeder Faser die zwei Punkte vertauscht, orientierungsumkehrend.

Aufgabe 2. Für n-dimensionale, zusammenhängende, kompakte Mannigfaltigkeiten M, N mit gewählten Einbettungen $\mathbb{R}^n \to M$, $\mathbb{R}^n \to N$ definieren wir die zusammenhängende Summe

$$M\#N = (M \setminus \mathring{D}^n) \amalg_{\partial D^n} (N \setminus \mathring{D}^n).$$

(a) Zeigen Sie: Ist M orientierbar, so ist die Abbildung $H_*(\partial D^n; \mathbb{Z}) \to H_*(M \setminus \mathring{D}^n; \mathbb{Z})$ null. Ist M nicht orientierbar, ist sie injektiv. Mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten ist die Abbildung immer null.

(b) Beschreiben sie die Homologie $H_*(M\#N; \mathbb{Z})$ und $H_*(M\#N; \mathbb{Z}/2)$.

Aufgabe 3. Sei X ein zusammenhängender Raum. Wir nennen eine Homologieklasse $x \in H_n(X; \mathbb{Z})$ "durch Mannigfaltigkeiten repräsentierbar", wenn es eine kompakte, *zusammenhängende*, orientierte n-Mannigfaltigkeit M gibt, und eine Abbildung $f : M \to X$, sodass $f_*[M] = x$. Hierbei ist $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ die Fundamentalklasse.

(a) Zeigen Sie: Sind $x, x' \in H_n(X)$ durch Mannigfaltigkeiten repräsentierbar, so auch $x + x' \in H_n(X)$.

(b) Zeigen Sie: Sind $x \in H_n(X)$ und $y \in H_m(Y)$ durch Mannigfaltigkeiten repräsentierbar, so auch $x \times y \in H_{n+m}(X \times Y)$.

(c) Sei $X = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{C}P^{n_i}$ für eine Folge $(n_0, \ldots, n_k)$ von positiven ganzen Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie: Jede Klasse in $H_k(X)$, $k > 0$, ist durch Mannigfaltigkeiten repräsentierbar.

Aufgabe 4. Seien M, N zwei n-dimensionale, zusammenhängende, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: Wenn $\pi_1(M)$ endlich und $\pi_1(N)$ unendlich ist, so induziert jede Abbildung $f : M \to N$ die Nullabbildung $H_n(M; \mathbb{Z}) \to H_n(N; \mathbb{Z})$. (Tipp: überlegen Sie sich die Aussage zunächst für M einfach-zusammenhängend.)