Übungsblatt (Topologie 2, SS 2019)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Besprechung in den Übungsgruppen am 15.04./16.04.

Aufgabe 1. Das Tensorprodukt $A \otimes B$ zweier abelscher Gruppen ist definiert durch die folgende universelle Eigenschaft: Es ist eine abelsche Gruppe, ausgestattet mit einer bilinearen Abbildung[1]

$$\mu_{A,B} : A \times B \to A \otimes B,$$

sodass für jede abelsche Gruppe G die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(A \otimes B, G) \to \mathrm{Bil}(A, B; G), \quad f \mapsto f \circ \mu_{A,B},$$

eine Bijektion ist. Hier bezeichnet $\mathrm{Bil}(A, B; G)$ die Menge der bilinearen Abbildungen $A \times B \to G$.

Berechnen Sie die folgenden Tensorprodukte mithilfe der universellen Eigenschaft

(a) $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^m$ für $n, m \geq 0$.

(b) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/n$ für $n > 0$.

(c) $\mathbb{Z}/n \otimes \mathbb{Z}/m$ für $n, m > 0$.

Aufgabe 2. Betrachten Sie den folgenden Kettenkomplex:

$$C_* \qquad \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2$$

Berechnen Sie die Homologie von C_*, den dualen Kokettenkomplex $(C^\vee)^* = \mathrm{Hom}(C_*, \mathbb{Z})$, und die Kohomologie von $(C^\vee)^*$.

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen:

(a) Ist X ein CW-Komplex mit $H_i(X; \mathbb{F}_2) = 0$ für alle $i \geq 1$, so ist auch $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ für alle $i \geq 1$.

(b) Ist X ein CW-Komplex mit $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ für alle $i \geq 1$, so ist auch $H_i(X; \mathbb{F}_2) = 0$ für alle $i \geq 1$.

Aufgabe 4. Finden Sie ein Paar von Räumen (X, A), für das die lange exakte Sequenz in $\mathbb{Z}$-Homologie

$$\ldots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to \ldots$$

nach Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ nicht mehr exakt ist.[2]

---

[1] Bilinear bedeutet einfach dass $\mu_{A,B}(x_0 + x_1, y) = \mu_{A,B}(x_0, y) + \mu_{A,B}(x_1, y)$, und entsprechend in der anderen Variable.

[2] Dies zeigt dass $\mathrm{Hom}(H_*(X), \mathbb{Z})$, im Gegensatz zu $H^*(X; \mathbb{Z})$, wo wir zuerst den Kettenkomplex dualisieren und dann erst zu (Ko)homologie übergehen, keine Kohomologietheorie bildet.