Übungsblatt 9 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 11.-12.12.

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie: ein zusammenhängender CW-Komplex X mit $H_1(X) = 0$ ist einfach-zusammenhängend.

Aufgabe 2. Sei Σ_g die Fläche von Geschlecht g. Berechnen Sie die Homologie von Σ_g mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die unreduzierte Einhängung $S(\Sigma_g)$. Für welche g ist $S(\Sigma_g)$ eine topologische Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 4. Sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine zweiblättrige Überlagerung. Blatt 8, Aufgabe 4 liefert uns die *Transferabbildung*

$$p_! : C_*(X; M) \to C_*(\widetilde{X}; M).$$

(a) Zeigen Sie: Mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C_*(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_!} C_*(\widetilde{X}; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_*} C_*(X; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

von Kettenkomplexen, mit assoziierter langer exakter Sequenz[1]

$$\ldots \longrightarrow H_k(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_!} H_k(\widetilde{X}; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_*} H_k(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{e} H_{k-1}(X; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \ldots$$

(b) Berechnen Sie nun $H_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2)$.

[1] Diese lange exakte Sequenz ist die *Gysin-Sequenz*, bzw. ein Spezialfall davon. Allgemeiner gibt es für ein Bündel mit Faser S^n eine ähnliche lange exakte Sequenz in Homologie. Hier ist unsere Faser S^0, und wir können die Sequenz mit Überlagerungstheorie konstruieren.