Übungsblatt 8 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 4.-5.12.

Aufgabe 1. Gegeben zwei homotope Abbildungen $f_0, f_1 : S^{n-1} \to X$, so erhalten wir Räume X_0 und X_1 durch Ankleben von Zellen entlang von f_0, f_1, also durch die Pushouts

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f_0} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X_0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f_1} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X_1. \end{array}$$

Zeigen Sie: X_0 ist homotopieäquivalent zu X_1. (Tipp: Schreiben sie beide Räume als Deformationsretrakt eines dritten Raumes.)

Aufgabe 2. Sei X ein Raum, und $A \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum, der Urbild $\phi^{-1}(0)$ einer Funktion $\phi : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist. (Für gute Räume erfüllt jede abgeschlossene Teilmenge das, zum Beispiel metrische Räume.)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Gegeben eine Abbildung $f : X \to Z$ in irgendeinen Raum Z, und eine Homotopie $H : A \times [0,1] \to Z$ mit $H|_{A\times\{0\}} = f|_A$, so existiert eine Fortsetzung von H auf $X \times [0,1]$ mit $H|_{X\times\{0\}} = f$.

(ii) Der Unterraum $X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \subseteq X \times [0,1]$ ist ein Retrakt.

(iii) Der Unterraum $X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \subseteq X \times [0,1]$ ist ein (starker) Deformationsretrakt.

(iv) Es existiert eine Homotopieäquivalenz $X \simeq X \cup_A A \times [0,1]$ rel A, wobei $X \cup_A A \times [0,1]$ den Pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{A\times\{0\}} & A \times [0,1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \cup_A A \times [0,1] \end{array}$$

bezeichnet, und mit Homotopieäquivalenz rel A gemeint ist, dass sowohl die Abbildungen in beide Richtungen als auch die jeweiligen Homotopien zu den Identitäten die Inklusionen $A \to X$ und $A \times \{1\} \to X \cup_A A \times [0,1]$ ineinander überführen bzw. erhalten.

(Tipp: Für (iv)$\Rightarrow$(i) überlegen Sie sich zunächst (i) für das Paar $A \times \{1\} \subseteq X \cup_A A \times [0,1]$, und benutzen Sie dann die Funktion ϕ um eine geeignete Homotopie auf $X \times [0,1]$ zu bauen.)

Man nennt eine Inklusion $A \to X$, die diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, eine h-Kofaserung. Bedingung (i) wird auch oft als Homotopieerweiterungseigenschaft bezeichnet.

Aufgabe 3. Sei $i : A \subseteq X$ eine h-Kofaserung (vgl. Aufgabe 2), und $j : A \to Y$ irgendeine Abbildung. Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & P \end{array}$$

ein Pushoutdiagramm. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{(j_*, i_*)} H_k(Y) \oplus H_k(X) \xrightarrow{g_* - f_*} H_k(P) \longrightarrow H_{k-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

gibt, und dass, falls A, X und Y wegzusammenhängend sind,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_1(Y) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(P) \end{array}$$

ein Pushoutdiagramm ist.

Aufgabe 4. Gegeben eine n-blättrige Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$, so definieren wir eine Abbildung

$$p_! : C_*(X; M) \to C_*(\widetilde{X}, M),$$

indem wir einen singulären Simplex $f : \Delta^k \to X$ auf die Summe $\sum_{\widetilde{f}:\Delta^k \to \widetilde{X}} \widetilde{f}$ all seiner Lifts zu $\widetilde{X}$, also aller $\widetilde{f} : \Delta^k \to X$ mit $p \circ \widetilde{f} = f$, schicken.

(a) Zeigen Sie, dass $p_!$ ein Morphismus von Kettenkomplexen ist, und dass die Komposition

$$H_k(X; M) \xrightarrow{p_!} H_k(\widetilde{X}; M) \xrightarrow{p_*} H_k(X; M)$$

mit Multiplikation mit n übereinstimmt.

(b) Nun sei $\widetilde{X} \to X$ eine normale Überlagerung, i.e. so, dass die Gruppe G der Decktransformationen transitiv auf den Fasern der Überlagerung wirkt. Zeigen Sie, dass die Komposition

$$H_k(\widetilde{X}; M) \xrightarrow{p_*} H_k(X; M) \xrightarrow{p_!} H_k(\widetilde{X}; M)$$

mit der Abbildung $\sum_{\sigma \in G} \sigma_* : H_k(\widetilde{X}; M) \to H_k(\widetilde{X}; M)$ übereinstimmt.

(c) Zeigen Sie schließlich: Wenn $p : \widetilde{X} \to X$ eine endliche Überlagerung ist, so ist $p_! : H_k(X; \mathbb{Q}) \to H_k(\widetilde{X}; \mathbb{Q})$ injektiv. Wenn $p : \widetilde{X} \to X$ zusätzlich normal mit Decktransformationsgruppe G ist, so hat $p_!$ als Bild genau $H_k(\widetilde{X}; \mathbb{Q})^G$.[1]

[1]Die Invarianten der Wirkung von G auf $H_k(\widetilde{X}; \mathbb{Q})$, vergleiche Blatt 6, Aufgabe 3.