Übungsblatt 7 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 27.-28.11.

Aufgabe 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ das Komplement der Standardeinbettung des Volltorus $S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass U nicht homotopieäquivalent zu S^1 ist.[1]

Aufgabe 2. Seien (X, x_0), (Y, y_0) gut punktierte Räume, i.e. $x_0 \in X$ besitzt eine Umgebung U, sodass x_0 starker Deformationsretrakt von U ist, und entsprechend für $y_0 \in Y$.

Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ ist

$$H_n(X \vee Y) \simeq H_n(X) \oplus H_n(Y),$$

wobei $X \vee Y = (X \sqcup Y)/x_0 \sim y_0$.[2]

Aufgabe 3.

(a) Gegeben eine Sequenz von abelschen Gruppen A_i, $i \in \mathbb{Z}$, und Abbildungen $\varphi_i : A_i \to A_{i+1}$, zeigen Sie dass die folgende Sequenz kurz exakt ist:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i \xrightarrow{\mathrm{id} - \bigoplus \varphi_i} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i \longrightarrow \operatorname{colim} A_i \longrightarrow 0$$

(b) Für eine Folge von Räumen X_i, $i \in \mathbb{Z}$ und Abbildungen $f_i : X_i \to X_{i+1}$ definieren wir das Teleskop $\mathrm{Tel}(X_i)$ als den Raum

$$\mathrm{Tel}(X_i) := \coprod X_i \times [0,1]/\sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die von

$$((x,1) \in X_i \times [0,1]) \sim ((f(x),0) \in X_{i+1} \times [0,1])$$

erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $H_k(\mathrm{Tel}(X_i)) = \operatorname{colim}_i H_k(X_i)$. (Tipp: Wenden Sie die Mayer-Vietoris-Sequenz auf eine geeignete Überdeckung von $\mathrm{Tel}(X_i)$ an.)

Aufgabe 4. Sei X ein CW-Komplex mit Filtration

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq \ldots \subseteq X,$$

und sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ mit der Filtration durch die Urbilder $p^{-1}(X_i)$ wiederum ein CW-Komplex ist.

[1] ...wie fälschlicherweise in der Vorlesung behauptet.

[2] Das *Wedge* von X und Y.