Übungsblatt 6 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 19.-20.11.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Kategorie Top alle (kleinen) Kolimiten hat. Genauer: sei $F : I \to \mathrm{Top}$ ein Funktor aus einer kleinen Kategorie I. Geben Sie eine explizite Beschreibung für $\mathrm{colim}_I F$ an und beweisen Sie die universelle Eigenschaft.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Für abelsche Gruppen A, B, C und Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) Die Folge

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

ist exakt.

(ii) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

kommutiert, und ist ein Pushout- und ein Pullbackdiagramm.[1]

Aufgabe 3. Sei A eine abelsche Gruppe mit einer Wirkung durch eine Gruppe G. Als *Invarianten* dieser Wirkung bezeichnen wir die Untergruppe $A^G \subseteq A$ aller $x \in A$ mit $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$. Als *Koinvarianten* bezeichnen wir den Quotient $A \to A_G$ von A nach der Untergruppe erzeugt von allen $x - g \cdot x$ für $x \in A$ und $g \in G$.

Beschreiben Sie A^G und A_G als Limes und Kolimes eines geeigneten Funktors $I \to \mathrm{Ab}$ für eine geeignete Diagrammkategorie I.

Aufgabe 4.

(a) Sei X ein topologischer Raum, $n \geq 2$ und $\varphi : S^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung. Der Raum X' sei gegeben durch das folgende Pushoutdiagramm:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "i"] \\ D^n \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

wo die vertikale Abbildung $S^{n-1} \to D^n$ die Standardinklusion ist.[2]

[1] Ein solches Diagramm heißt oft *Bikartesisches Diagramm*.

[2] Man sagt, X' entsteht aus X durch Ankleben einer n-Zelle entlang φ. Dazu später mehr, wenn wir uns mit CW-Komplexen befassen.

Zeigen Sie: Die Abbildung $i : X \to X'$ induziert einen Isomorphismus $H_k(X) \to H_k(X')$ wenn $k < n-1$ oder $k > n$, und es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{i_*} H_n(X') \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X') \longrightarrow 0.$$

(b) Berechnen Sie nun die Homologiegruppen von $\mathbb{R}P^2$.