Übungsblatt 5 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 13.-14.11.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Für n gerade hat jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ einen Fixpunkt. (Tipp: Universelle Überlagerung.)

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe konstruieren wir die sogenannte Mayer-Vietoris-Sequenz, eine Alternative zur langen exakten Sequenz mit relativer Homologie.

(a) Gegeben ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\alpha_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\alpha_{n-1}} & A_{n-2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \\
\dots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\beta_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\beta_{n-1}} & B_{n-2} & \longrightarrow & \dots,
\end{array}$$

in dem jede dritte vertikale Abbildung ein Isomorphismus ist, konstruieren Sie eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \longrightarrow A_n \xrightarrow{(\alpha_n, f_n)} A_{n-1} \oplus B_n \xrightarrow{f_{n-1}-\beta_n} B_{n-1} \xrightarrow{\delta} A_{n-3} \longrightarrow \dots$$

(b) Nun sei X ein topologischer Raum mit offenen Teilmengen U, V, sodass $U \cup V = X$. Seien $j_U : U \cap V \to U$, $j_V : U \cap V \to V$, $i_U : U \to X$ und $i_V : V \to X$ die natürlichen Inklusionsabbildungen. Konstruieren Sie eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \to H_n(U \cap V) \xrightarrow{(j_{U*}, j_{V*})} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{i_{U*}-i_{V*}} H_n(X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(U \cap V) \to \dots$$

Aufgabe 3.

Zeigen Sie, dass für eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$S^{n-1} \to S^{n-1},\ v \mapsto \frac{\varphi(v)}{\|\varphi(v)\|}$$

Grad $+1$ hat, wenn $\det(\varphi) > 0$, und Grad -1 hat, wenn $\det(\varphi) < 0$. (Tipp: Überlegen Sie sich zunächst den Fall von Elementarmatrizen.)

Aufgabe 4. Eine reelle Divisionsalgebra ist ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum A zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\mu : A \times A \to A$$

sodass für jedes $v \in A$ mit $v \neq 0$ gilt, dass $\mu(v, -) : A \to A$ und $\mu(-, v) : A \to A$ bijektiv sind.

(a) Gegeben eine reelle Divisionsalgebra A der Dimension $n \geq 2$, zeigen Sie dass für $v, w \in A$ mit $v \neq 0$, $w \neq 0$ die beiden Abbildungen $S^{n-1} \to S^{n-1}$,

$$x \mapsto \frac{\mu(v,x)}{\|\mu(v,x)\|}$$
$$x \mapsto \frac{\mu(w,x)}{\|\mu(w,x)\|}$$

denselben Grad haben, wobei wir A mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren und S^{n-1} als Einheitssphäre darin auffassen.

(b) Folgern Sie, dass eine reelle Divisionsalgebra der Dimension ≥ 2 notwendigerweise gerade Dimension hat.[1]

[1] Ein Theorem von Frobenius besagt, dass die einzigen *assoziativen* endlichdimensionalen reellen Divisionsalgebren durch $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ gegeben sind. Beachten Sie, dass wir hier keinerlei Assoziativität vorausgesetzt haben, was einen rein algebraischen Zugang unmöglich macht. Tatsächlich besagt ein Theorem von Milnor, dass eine endlichdimensionale reelle Divisionsalgebra immer Dimension 1, 2, 4 oder 8 haben muss, der Beweis benutzt aber fortgeschrittene Methoden aus der algebraischen Topologie.