Übungsblatt 4 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 06.-07.11.

Aufgabe 1. Sei

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es existiert eine Abbildung $r : B \to A$ mit $r \circ f = \mathrm{id}_A$.

(ii) Es existiert eine Abbildung $s : C \to B$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_C$.

(iii) Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \oplus C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

in dem die Abbildungen in der unteren Sequenz die kanonische Inklusion bzw. die kanonische Projektion sind.

Folgern Sie außerdem, dass aus diesen Aussagen folgt, dass $B \cong A \oplus C$.[1]

Aufgabe 2. Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels (in singulärer Homologie), dass die Forderung $\overline{Z} \subseteq \mathrm{int}(A)$ für das Ausschneidungsaxiom notwendig ist. Finden Sie also $Z \subseteq A \subseteq X$ und n, sodass

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_n(X, A)$$

kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3.

(a) Sei E_* eine (verallgemeinerte) Homologietheorie, und $A \subseteq X$ ein *Retrakt*[2], d.h. es existiert eine Abbildung $r : X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$. Zeigen Sie:

$$E_n(X) \cong E_n(A) \oplus E_n(X, A).$$

[1] Wenn die drei äquivalenten Aussagen aus Aufgabe 1 erfüllt sind, sagt man dass die kurze exakte Sequenz *spaltet*.

[2] Nicht notwendigerweise Deformationsretrakt!

(b) Folgern Sie für eine disjunkte Vereinigung $X = X_1 \sqcup X_2$ ohne Benutzung des Additivitätsaxioms, dass

$$E_n(X) \cong E_n(X_1) \oplus E_n(X_2).$$ [3]

Aufgabe 4. Berechnen Sie $H_*(\mathbb{C}P^n)$. (Tipp: Bestimmen Sie zunächst $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$.)

[3] Man sieht hieraus induktiv: Das Additivitätsaxiom für endliche Indexmengen folgt aus den anderen Axiomen, ist also nur für unendliche Indexmengen eine echte Forderung.