Übungsblatt 3 (Topologie 1, WS 18/19)

Achim Krause, Thomas Nikolaus

zur Abgabe und Besprechung in den Übungsgruppen am 30.-31.10.

Aufgabe 1.

(a) Beweisen Sie das sog. Fünferlemma: Gegeben ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

in dem die Zeilen exakte Sequenzen sind, und $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ Isomorphismen, so ist auch γ ein Isomorphismus.

(b) Gilt die Aussage auch, wenn α und ε nur injektiv sind? Wenn α und ε nur surjektiv sind? Wenn α surjektiv ist und ε injektiv ist? Geben Sie ggf. Gegenbeispiele an.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass in der Kategorie Ch Koprodukte[1] existieren. Das Koprodukt zweier Kettenkomplexe A_* und B_* wird $A_* \oplus B_*$ geschrieben.

(b) Zeigen Sie, dass $H_n(A_* \oplus B_*) \cong H_n(A_*) \oplus H_n(B_*)$.

Aufgabe 3. Sei Set die Kategorie aller Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:
Set$^{\mathrm{op}}$ ist äquivalent zu Set.

Aufgabe 4. Für einen zusammenhängenden Raum X legt der Isomorphismus $\pi_1(X;x)^{\mathrm{ab}} \simeq H_1(X)$ aus der Vorlesung nahe, dass $\pi_1(X;x)^{\mathrm{ab}}$ nicht vom Basispunkt abhängt. Beweisen Sie ohne Benutzung von Homologie:

Für Punkte x_0, $x_1 \in X$ gibt es einen kanonischen[2] Isomorphismus $\pi_1(X;x_0)^{\mathrm{ab}} \simeq \pi_1(X;x_1)^{\mathrm{ab}}$

[1] Vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe 1
[2] d.h., von willkürlichen Wahlen unabhängigen